ODDIY NYUTON USULI VA MODIFIKATSIYALANGAN NYUTON USULINING TAQQOSLANISHI.

Mirzarabjonova O.I.

Farg'ona davlat unversiteti talabasi, ismoiljonovaodina88@gmail.com .

Annotatsiya: *Ushbu maqolada chiziqsiz tenglamalarni yechishda ikki usul — oddiy Nyuton usuli va modifikatsiyalangan Nyuton usuli — solishtiriladi. Maqolada ikkala usulga doir bir xil misol yechimi keltiriladi va ularning Excel dasturidagi hisob-kitob natijalari taqdim etiladi. Natijalar asosida usullar samaradorligi va aniqligi tahlil qilinadi, ularning afzalliklari va cheklovlari ko'rsatiladi.*

Kalit so'zlar: *Chiziqsiz tenglamalar, Nyuton usuli, Modifikatsiyalangan Nyuton usuli, Excel hisob-kitoblari, Samadorlik va aniqlik.*

Chiziqsiz tenglamalar matematikaning muhim bo'lagi bo'lib, turli fan, texnika va iqtisodiyot sohalarida keng qo'llaniladi. Ularning aniq va samarali yechimi murakkab jarayonlarni modellashtirish, natijalarni prognoz qilish va masalalarni optimallashtirish imkonini beradi. Eng mashhur usullardan biri bo'lgan Nyuton usuli soddaligi va mos boshlang'ich taxmin berilganda yuqori tezlikdagi konvergentsiyasi bilan ajralib turadi. Shu bilan birga, modifikatsiyalangan Nyuton usuli hisoblash strategiyasini takomillashtirib, yechimning aniqligi va barqarorligini oshiradi.

Ushbu maqolada oddiy Nyuton usuli va modifikatsiyalangan Nyuton usuli bir xil misol orqali solishtiriladi va ularning Excel dasturidagi hisob-kitob natijalari taqdim etiladi. Maqolada har bir usulning samaradorligi, aniqligi va qo'llanish xususiyatlari tahlil qilinadi, shuningdek, ularning afzalliklari va cheklovlari aniqlanadi. Bu yondashuv yechimning talab darajasiga qarab, to'g'ri usulni tanlash muhimligini ko'rsatadi.

Misol. Ushbu $\sin(x)-\frac{x}{3}=0$ tenglamaning eng kichik musbat ildizini $\varepsilon=0.000001$ aniqlik bilan toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning mumkin bo'lgan musbat ildizlarini topish uchun uni $\sin(x)=\frac{x}{3}$ ko'rinishda yozib olamiz va $y=\sin(x)$ va $y=\frac{x}{3}$

funksiyalarning grafiklarini MS Excel dasturida quramiz. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, u ikkita haqiqiy musbat ildizlarga ega, ulardan eng kichigi $[-3;-2]$ kesmada, kattasi esa $[2;3,27]$ kesmada yotibdi.

Eng kichik musbat ildiz uchun $f(x)=\sin(x)-\frac{x}{3}$ funksiya $[2;3,27]$ kesmada

a) uzluksiz va differensiallanuvchi (birinchi va ikkinchi hosilalari mavjud):

$$f'(x)=\cos(x)-\frac{1}{3};\ f''(x)=-\sin(x);$$

b) birinchi hosila uzluksiz, o‘z ishorasini saqlaydi va nolga aylanmaydi, ya’ni $f'(x)<0;$

c) ikkinchi hosila uzluksiz, o‘z ishorasini saqlaydi, ya’ni $f''(x)>0$. Demak, $f(2)\cdot f(3,27)<0$ bo‘lganligi uchun $[2;3,27]$ kesmada oddiy ildiz mavjud.

Dastlabki yaqinlashishni $x_0=3,27$ deb tanlab olamiz, chunki

$$f(2)=0,24263076>0;\ f''(2)=-0,9093<0;\ f(3,27)=-1,21805476<0;$$

$$f''(3,27)=0,128055>0$$

va bu yerdan $f(3,27)\cdot f'(3,27)>0.$ Keyingi yaqinlashishlarni ushbu

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\sin(x_n)-x_n/3}{\cos(x_n)-1/3},\quad n=0,1,2,...$$

formuladan topamiz. Bu hisoblashlar quyidagi yaqinlashishlarni beradi:

$$x_1=2,35078306;\ x_2=2,28067767;\ x_3=2,27886393;\ x_4=2,27886266.$$

Iteratsion jarayonning tugallanish shartiga ko‘ra

$$e_n=|x_{n+1}-x_n|=|x_4-x_3|=|2,27886266-2,27886393|=0,00000127$$

bo‘lganligidan izlanayotgan ildizni $\overline{x}\approx 2.27886393$ deb qabul qilamiz.

N	x	Δx	f(x)	f'(x)	shart:
0	3,27		-1,2180548	-1,32510043	
1	2,3507831	0,91921694	-0,0726715	-1,03660332	Davom et
2	2,2806777	0,07010539	-0,0017867	-0,98507711	Davom et

3	2,2788639	0,00181374	-1,248E-06	-0,98370043	Davom et
4	2,2788627	1,2688E-06	-6,116E-13	-0,98369947	Davom et
5	2,2788627	6,2172E-13	0	-0,98369947	2,27886266
6	2,2788627	0	0	-0,98369947	2,27886266

1-jadval

Usulning ustunliklari yaqinlashish tezligi boshqa usullarga qaraganda ancha tez, bu boshlang‘ich yaqinlashishni ildizga yaqinroq tanlaganda yanada yaqqol seziladi;

Usulning kamchiliklari: boshlang‘ich yaqinlashishni tanlash og‘ir; har bir iteratsiya qadamida hisoblashlar boshqa usullardagiga qaraganda ko‘p, chunki bunda nafaqat funksiyaning qiymatini, balki uning hosilasini ham hisoblab borish lozim; ba’zida aralash usulni qo‘llash afzal, ya’ni bu usulni qo‘llashdan oldin avval boshqa usulni, masalan, dastlabki bir necha iteratsiya qadamida oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulini qo‘llab, keyingi yaqinlashishlarni Nyuton usulida bajarish juda yaxshi natija beradi; agar $f(x)$ funksiya grafigi $[a,b]$ kesmada yetarlicha yotiq bo‘lsa, u holda $f'(x) \to 0$ va hisoblashlarda xatolik tez ko‘payadi, bunday holda keyingi hisoblashlarda oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuliga o‘tgan ma’qul; agar $[a,b]$ kesmada umuman ildiz yo‘q yoki ular soni bir nechta bo‘lsa, u holda bu usul iteratsiyalarining takrorlanishlari soni cheksizlikka intiladi

Modifikatsiyalangan Nyuton usulida yechish

Misol. Ushbu $\sin(x) - \frac{x}{3} = 0$ tenglamaning eng kichik musbat ildizini $\varepsilon = 2.27886266007582$ aniqlik bilan toping. Iteratsiyada $T = 0.1$ va $T_0 = 0.1$ parametrlaridan foydalaniladi. Boshlang‘ich nuqta sifatida $x_0 = 3,27$ deb olamiz.

Modifikatsiyalangan Nyuton usuli(birinchi T_n formulasi bilan):

$$T_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_n - x_{n-1})^2} \quad \begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = y_n - T_n(y_n - x_n)^2, \end{cases} \quad \rho \approx \frac{\ln(|x_{n+1} - x_n| / |x_n - x_{n-1}|)}{\ln(|x_n - x_{n-1}| / |x_{n-1} - x_{n-2}|)}.$$

Bu yerda $f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{3}$

Quyida barcha sonlar yaxlitlangan (taxminiy) qiymatlar bilan bosqichma-bosqich yoziladi;

y_0 va $x_1$ni hisoblash

1. Avval $f(x_0)$ va $f'(x_0)$:

$$f(3,27) = \sin(3,27) - 3,27/3 \approx -1,218054764$$

$$f'(3,27) = \cos(3,27) - 1/3 \approx -1,32510043$$

2. Endi Nyuton bosqichi:

$$y_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 2,35078306$$

3. Endi x_1:

$$x_1 = y_0 - T_0(y_0 - x_0)^2.$$

Bu yerda:

$$x_1 \approx 2,2662870814792075$$

Hisoblashlar davom etiladi.

$$x_2 \approx 2,2789133709488416$$
$$x_3 \approx 2,2788626600669644$$
$$x_4 \approx 2,2788626600758284$$

Natijada x_4 shartda berilgan $\zeta = 2,27886266007582$ ga deyarli teng bo‘ladi, xatolik 10^{-14} tartibida bo‘ladi, ya’ni usul juda tez yaqinlashgan bo‘ladi.

Absolyut xatoliklar

$$e_i = |x_4 - \zeta|\rho$$

$$e_1 \approx 0,0125755785966124$$
$$e_2 \approx 5,071E-05$$
$$e_3 \approx 8,8556E-12$$
$$e_4 \approx 8,44E-15$$

Yaqinlashish tartibi ρ. Berilgan formula bo’yicha:

$$\rho \approx \frac{\ln(|x_{n+1} - x_n| / |x_n - x_{n-1}|)}{\ln(|x_n - x_{n-1}| / |x_{n-1} - x_{n-2}|)}. \quad n = 2$$

Bu yerda x_2, x_3, x_4 dan foydalansak, hisob-kitob natijasi:

$$\rho \approx 1,2609230092643187 \approx 1,261.$$

N	x	$\lvert x_1 - \zeta \rvert$	$\lvert x_2 - \zeta \rvert$	$\lvert x_3 - \zeta \rvert$	$\lvert x_4 - \zeta \rvert$	ρ
0	3,27	0,012576	5,071E-05	8,8556E-12	8,44E-15	1,26092
1	2,266287081					
2	2,278913371					
3	2,27886266					
4	2,27886266					

2-jadval

Usulning ustunliklari:

- Tezroq yaqinlashish: tartibi oddiy Nyutonnikidan yuqoriroq bo‘lgani uchun kerakli aniqlikka kamroq iteratsiyada yetadi.

-Samaradorlik yuqori: har bir iteratsiyada eski ma’lumotlardan ham foydalanadi (memory), shuning uchun qo‘shimcha funksiyani chaqirmasdan natijani aniqlashtiradi.

Ba’zi hollarda barqarorroq: yaxshi tanlangan T_n parametrlar tebranishni kamaytirib, ildiz tomon barqarorroq harakatni ta’minlashi mumkin.

Usulning kamchiliklari:

- Algoritm murakkabroq: formulalar ko‘p (y_n, T_n, x_{n+1}), implementatsiyada xato qilish oson.

- Boshlang‘ich nuqtaga sezgirlik saqlanadi: yomon x_0 tanlansa, baribir yomon yaqinlashishi yoki umuman ajralib ketishi mumkin.

- Ko‘proq arifmetik amal: funksiyani hisoblash soni ko‘p bo‘lmasa ham, kvadratlar, nisbatlar va hokazo amallar soni ortadi.

Oddiy Nyuton usuli bilan natijalarni solishtirish

NYUTON USULI

$f(x)=\sin x - x/3$	$f'(x)=\cos x - 1/3$	$f''(x)=-\sin x$	[2;3,27]	e= 0,000001
f(a)= 0,2426308	f'(a)= -0,7494802	f''(a)= -0,909	a= 2	
f(b)= -1,218055	f'(b)= -1,3251004	f''(b)= 0,1281	b= 3,27	

e=aniqlik darajasi(xatolik chegarasi)

f(a)*f''(a)<0 f(b)*f''(b)>0 x_0= b

Formulasi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

To'xtash sharti:

$$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$$

N	x	Δx	f(x)	f'(x)	shart:
0	3,27		-1,218055	-1,3251004	
1	2,350783	0,9192169	-0,072671	-1,0366033	Davom et
2	2,280678	0,0701054	-0,001787	-0,9850771	Davom et
3	2,278864	0,0018137	-1,25E-06	-0,9837004	Davom et
4	2,278863	1,269E-06	-6,12E-13	-0,9836995	Davom et
5	2,278863	6,217E-13	0	-0,9836995	2,27886266
6	2,278863	0	0	-0,9836995	2,27886266
7	2,278863	0	0	-0,9836995	2,27886266

3-jadval. Oddiy Nyuton usuli yordamida chiziqsiz tenglama ildizini taqribiy hisoblash (Excel dasturida)

Ushbu jadvalda chiziqsiz tenglamaning ildizini topish uchun oddiy Nyuton usuli Excel dasturida amalga oshirilgan. Boshlang‘ich yaqinlashuv tanlanib, har bir iteratsiyada Nyuton formulasiga asosan qiymatlar hisoblandi. Jadvalda iteratsiyalar soni, funksiyaning qiymatlari hamda ketma-ket yaqinlashuvlar orasidagi farq keltirilgan. Hisoblash jarayoni berilgan aniqlik darajasiga erishilgunga qadar davom ettirildi.

MODIFIKATSIYALANGAN NYUTON USULI:

$f(x)=\sin x - x/3$	$f'(x)=\cos x - 1/3$	[2;3,27]	e= 2,27886266

T_n=o'z-o'zini tezlashtiruvchi parametr

p=yaqinlashish tartibi

x_0= 3,27

T_0= 0,1

Formulasi:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = y_n - T_n(y_n - x_n)^2, \end{cases} \qquad T_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_n - x_{n-1})^2} \qquad \rho \approx \frac{\ln(|x_{n+1} - x_n| / |x_n - x_{n-1}|)}{\ln(|x_n - x_{n-1}| / |x_{n-1} - x_{n-2}|)}.$$

N	x	f(x)	f'(x)	y_0	T	$\lvert x_1 - \zeta \rvert$	$\lvert x_2 - \zeta \rvert$	$\lvert x_3 - \zeta \rvert$	$\lvert x_4 - \zeta \rvert$	ρ
0	3,27	-1,218054764	-1,325100432	2,35078306	0,1	0,0125756	5,0711E-05	8,85558E-12	8,438E-15	1,260923
1	2,266287	0,01231031	-0,974095622	2,278924763	0,0713276					
2	2,278913	-4,98852E-05	-0,983737988	2,278862661	0,3895399					
3	2,278863	8,71947E-12	-0,983699468	2,27886266	0,3860776					
4	2,278863	0	-0,983699468	2,27886266	0					

4-jadval. Modifikatsiyalangan Nyuton usuli asosida chiziqsiz tenglamani yechish (Excel dasturida)

Mazkur jadvalda modifikatsiyalangan Nyuton usuli yordamida chiziqsiz tenglama ildizini topish jarayoni ko‘rsatilgan. Ushbu usulda hosilaning boshlang‘ich nuqtadagi qiymati doimiy deb olinib, hisoblash jarayoni soddalashtiriladi. Natijada iteratsiya jarayonining barqarorligi oshib, hisoblashlar kamroq murakkablik bilan

amalga oshiriladi. Jadvalda har bir iteratsiya uchun hisoblangan qiymatlar keltirilgan.

NYUTON USULI

f(x)=sinx-x/3 | f'(x)=cosx-1/3 | f''(x)=-sinx | [2;3,27] | e= 0,000001

f(a)= 0,2426308 | f'(a)= -0,74948017 | f''(a)= -0,9093 | a= 2

f(b)= -1,2180548 | f'(b)= -1,32510043 | f''(b)= 0,12805 | b= 3,27

e=aniqlik darajasi(xatolik chegarasi)

f(a)*f'(a)<0 | f(b)*f'(b)>0 | x_0= b

Formulasi: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ **To'xtash sharti:** $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$

N	x	Δx	f(x)	f'(x)	shart:
0	3,27		-1,2180548	-1,32510043	
1	2,350783	0,9192169	-0,0726715	-1,03660332	Davom et
2	2,280678	0,0701054	-0,0017867	-0,98507711	Davom et
3	2,278864	0,0018137	-1,248E-06	-0,98370043	Davom et
4	2,278863	1,269E-06	-6,116E-13	-0,98369947	Davom et
5	2,278863	6,217E-13	0	-0,98369947	2,27886266
6	2,278863	0	0	-0,98369947	2,27886266
7	2,278863	0	0	-0,98369947	2,27886266

DIFIKATSIYALANGAN NYUTON US

f(x)=sinx-x/3 | f'(x)=cosx-1/3 | [2;3,27] | e= 2,2788627

T_n=o'z-o'zini tezlashtiruvchi parametr | x_0= 3,27

p=yaqinlashish tartibi

e=haqiqiy ildizga juda aniq qiymat | T_0= 0,1

Formulasi:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = y_n - T_n(y_n - x_n)^2, \end{cases} \quad T_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_n - x_{n-1})^2} \quad \rho = \frac{\ln(|x_{n+1} - x_n| / |x_n - x_{n-1}|)}{\ln(|x_n - x_{n-1}| / |x_{n-1} - x_{n-2}|)}$$

N	x	f(x)	f'(x)	y_0	T	$\lvert x_1 - \zeta \rvert$	$\lvert x_2 - \zeta \rvert$	$\lvert x_3 - \zeta \rvert$	$\lvert x_4 - \zeta \rvert$	ρ
0	3,27	-1,21805476	-1,32510043	2,35078306	0,1	0,012576	5,071E-05	8,856E-12	8,44E-15	1,26092
1	2,26629	0,01231031	-0,97409562	2,27892476	0,071328					
2	2,27891	-4,9885E-05	-0,98373799	2,27886266	0,38954					
3	2,27886	8,71947E-12	-0,98369947	2,27886266	0,386078					
4	2,27886	0	-0,98369947	2,27886266	0					

5-jadval. Oddiy va modifikatsiyalangan Nyuton usullarining natijalarini taqqoslash

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, oddiy Nyuton usuli va modifikatsiyalangan Nyuton usuli bir xil tenglama uchun qo‘llanildi. Har ikkala usulda olingan natijalar solishtirilib, iteratsiyalar soni va yaqinlashish tezligi tahlil qilindi. Modifikatsiyalangan Nyuton usuli hisoblash jarayonida hosila qayta hisoblanmasligi sababli ayrim hollarda qulayroq ekanligi aniqlandi.

Ushbu maqolada oddiy Nyuton usuli ham, modifikatsiyalangan Nyuton usuli ham chiziqli bo‘lmagan tenglamalar ildizini topishda kuchli va samarali iteratsion yondashuvlar bo‘lib, ular bir-birini to‘ldiruvchi ahamiyatga ega. Oddiy Nyuton usuli sodda formulaga ega, hisoblash jihatidan yengil va tez realizatsiya qilinadi, biroq boshlang‘ich yaqinlashishga juda sezgir, hosilaning yaxshi aniqlangan bo‘lishini talab qiladi va ba’zi hollarda divergensiya yoki tebranish holatlari kuzatiladi. Modifikatsiyalangan Nyuton usulida esa xotira elementlari, qo‘shimcha parametrlar va o‘zgartirilgan formula orqali tartib va samaradorlik oshiriladi, yaqinlashish ko‘pincha tezlashadi, biroq algoritm murakkablashadi, qo‘shimcha arifmetik amallar va nazariy tahlil talab etiladi.

Maqolada keltirilgan nazariy tahlillar, sonli misollar va Excel dasturida bajarilgan tajribalar shuni ko‘rsatadiki, ildizga yetarlicha yaqin boshlang‘ich qiymat tanlanganda modifikatsiyalangan Nyuton usuli kamroq iteratsiyada yuqori aniqlik beradi, oddiy Nyuton usuli esa oddiyligi va barqaror dasturlanishi bilan amaliy hisoblashlarda qulay bo‘lib qoladi. Shuning uchun amaliyotda bu ikki usulni raqib

emas, balki bir-birini to‘ldiruvchi yondashuvlar sifatida ko‘rish maqsadga muvofiq: dastlab oddiy Nyuton usuli yordamida yaxshi boshlang‘ich yaqinlashuv topish, so‘ngra modifikatsiyalangan yoki xotirali variantlar yordamida yechimni tez va yuqori aniqlik bilan aniqlashtirish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abduxamidov A., Xudoynazarov S. “Hisoblash metodlari”: -T: O’zbekiston, 1995 й.

2. Aloev R.D. “Sonli usullar fanidan ma’ruzalar matni”: II qism, Buxoro Davlat Universiteti, 2005 y.

3. Isroilov M.I. “Hisoblash metodlari”: II qism - T:O’qituvchi, 2008 y.

4. Самарский А.А. «Введение в численные методы»: –М: Наука, 1987 г.

5. Самарский А.А. Гулин А.В. «Численные методы»: –М: Наука. 1989 й.

6. Chapra S. C., Canale R. P.Numerical Methods for Engineers. — New York: McGraw-Hill, 2015.

7. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. — New York: Springer, 2002.