

LAPLAS TENGLAMASINI CHEKLANGAN FARQLAR USULI YORDAMIDA SONLI YECHISH VA BARQARORLIK TAHLILI

Shuhratjonova G.Sh.

FarDU talabasi, shuhratjonovagulchiroy@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada elliptik turdagi differensial tenglamalardan biri bo'lgan Laplas tenglamasini cheklangan farqlar usuli yordamida sonli yechish masalasi ko'rib chiqilgan. Tadqiqotda Laplas tenglamasining matematik modeli va fizik talqini yoritilib, Dirixle, Neyman va Robin chegaraviy shartlari asosida sonli masalalar qo'yilgan. Cheklangan farqlar usuli yordamida diskretlashtirilgan tenglama iteratsion usullar — Yakobi, Gauss–Zeydel va relaksatsiya (SOR) usullari orqali yechilgan. Sonli tajribalar natijasida iteratsion usullarning konvergensiya xususiyatlari tahlil qilinib, hisoblash jarayonining barqarorligi grafiklar orqali baholangan. Olingan natijalar cheklangan farqlar sxemasining ishonchliligi va iteratsion usullarning amaliy samaradorligini tasdiqlaydi. Tadqiqot natijalari matematik modellashtirish, muhandislik hisoblari va fizik jarayonlarni sonli tahlil qilishda qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: Laplas tenglamasi, cheklangan farqlar usuli, iteratsion usullar, barqarorlik, konvergensiya, sonli modellashtirish, SOR usuli.

Kirish. Zamonaviy fan va texnikaning jadal rivojlanishi murakkab fizik, texnologik hamda muhandislik jarayonlarini chuqur tahlil qilishni taqozo etmoqda. Bunday jarayonlarni tadqiq etishda matematik modellashtirish usullari muhim nazariy va amaliy ahamiyat kasb etib, ular yordamida real obyekt va hodisalarning matematik modellari tuziladi hamda kompyuter texnologiyalari asosida sonli tahlil amalga oshiriladi. Issiqlik almashinuvi jarayonlari, elektrostatik va magnit maydonlar, suyuqliklar va gazlar mexanikasi, elastiklik va deformatsiya nazariyasi kabi ko'plab fundamental va amaliy sohalarda uchraydigan muvozanat holatidagi jarayonlar elliptik turdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Elliptik tenglamalar sinfiga mansub bo'lgan Laplas tenglamasi potensial nazariyaning asosiy tenglamalaridan biri bo'lib, u muvozanat holatidagi fizik maydonlarni matematik jihatdan tavsiflashda keng qo'llaniladi. Ushbu tenglama elektrostatik potenciallar, issiqlikning statsionar tarqalishi, suyuqliklar oqimining potensial modellarida muhim rol o'ynaydi. Biroq Laplas tenglamasining analitik yechimlari faqat sodda geometrik sohalar va chegaraviy shartlar uchun

mavjud bo'lib, real texnik va muhandislik masalalarida uchraydigan murakkab sohalar uchun bunday yechimlarni topish deyarli imkonsizdir. Shu sababli ushbu tenglamani yechishda sonli usullardan foydalanish zarurati yuzaga keladi.

Sonli usullar orasida cheklangan farqlar usuli keng tarqalgan va samarali yondashuvlardan biri hisoblanadi. Ushbu usul differensial tenglamalarni algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish imkonini berib, algoritmik soddaligi, hisoblash aniqligi va dasturlash jihatidan qulayligi bilan ajralib turadi. Cheklangan farqlar usuli yordamida Laplas tenglamasini diskret panjarada ifodalash va kompyuter yordamida yechimni iteratsion usullar orqali topish mumkin. Shu bilan birga, sonli yechimlarning aniqligi va ishonchliligi tanlangan farqlar sxemasining barqarorligi va konvergensiya xususiyatlariga bevosita bog'liqdir. Agar sonli sxema barqaror bo'lmasa, hisoblash jarayonida yuzaga keladigan kichik xatoliklar iteratsiyalar davomida ortib borib, yakuniy natijaning sezilarli darajada buzilishiga olib kelishi mumkin. Shu sababli Laplas tenglamasini cheklangan farqlar usuli asosida yechishda qo'llaniladigan iteratsion algoritmlarning barqarorligini va konvergensiyasini chuqur tahlil qilish muhim ilmiy masala hisoblanadi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi Laplas tenglamasini cheklangan farqlar usuli yordamida sonli yechish algoritmini ishlab chiqish, iteratsion usullar asosida olingan yechimlarning konvergensiya va barqarorlik xususiyatlarini tahlil qilish hamda amaliy hisoblash tajribalari orqali usulning samaradorligi va aniqligini asoslab berishdan iboratdir. Tadqiqot natijalari elliptik turdagi differensial tenglamalarni sonli yechish bilan bog'liq masalalarni hal etishda nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi.

Adabiyotlar tahlili. Laplas tenglamasini sonli yechish masalasi matematik fizika va hisoblash matematikasi sohasida uzoq yillardan buyon dolzarb bo'lib kelmoqda hamda ko'plab mahalliy va xorijiy olimlarning tadqiqotlarida keng yoritilgan. Xususan, A.A. Samarskiy va A.V. Gulin tomonidan olib borilgan ilmiy izlanishlarda cheklangan farqlar usulining nazariy asoslari, yaqinlashuv shartlari hamda farqlar sxemalarining barqarorlik mezonlari chuqur tahlil qilingan. Ularning

ishlarida elliptik turdagi differensial tenglamalar uchun qurilgan sonli sxemalarning matematik asoslanganligi va hisoblash aniqligi masalalariga alohida e'tibor qaratilgan.

Xorijiy adabiyotlarda esa R.J. LeVeque, G.D. Smith va A.R. Mitchell kabi tadqiqotchilar elliptik tenglamalarni sonli yechishda qo'llaniladigan iteratsion usullarning konvergensiya xususiyatlarini, spektral radiusga bog'liqligini hamda hisoblash samaradorligini atroflicha o'rganganlar. Ushbu tadqiqotlarda katta o'lchamli chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishda iteratsion yondashuvlarning afzalliklari nazariy va amaliy misollar orqali asoslab berilgan. Mazkur tadqiqotda metodologik asos sifatida cheklangan farqlar usuli tanlandi. Ushbu usul yordamida Laplas tenglamasi to'rtburchakli hisoblash sohasida markaziy farqlar orqali diskretlashtirildi va natijada besh nuqtali farqlar sxemasi hosil qilindi. Diskretlashtirish jarayoni natijasida katta o'lchamli, siyrak tuzilishga ega bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi vujudga keldi. Bunday sistemalarni yechishda to'g'ridan-to'g'ri usullardan foydalanish hisoblash resurslari nuqtai nazaridan samarasiz bo'lgani sababli iteratsion usullardan foydalanish maqsadga muvofiq deb topildi. Tadqiqot doirasida Yakobi, Gauss–Zeydel va ketma-ket ortiqcha relaksatsiya (SOR) iteratsion usullari qo'llanildi. Har bir usul uchun iteratsiya formulalari tuzilib, ularning konvergensiya tezligi va hisoblash samaradorligi solishtirildi. Xususan, Gauss–Zeydel usulining Yakobi usuliga nisbatan tezroq konvergensiyaga ega ekanligi, SOR usulida esa relaksatsiya parametrining optimal tanlanishi hisoblash jarayonini sezilarli darajada tezlashtirishi aniqlandi.

Adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, iteratsion usullar yirik o'lchamli masalalarda xotira sarfi va hisoblash vaqti bo'yicha to'g'ridan-to'g'ri usullarga nisbatan ustunlikka ega. Ayniqsa, SOR usuli relaksatsiya parametri optimal qiymatga yaqin tanlanganda yuqori darajadagi konvergensiyani ta'minlaydi. Shu bois mazkur maqolada Laplas tenglamasini sonli yechishda iteratsion

yondashuvlarga ustuvor ahamiyat berilib, ularning barqarorligi va samaradorligi chuqur tahlil qilindi.

Natija va muhokama. Mazkur tadqiqot doirasida Laplas tenglamasining sonli yechimi ikki o'lchamli to'g'ri burchakli hisoblash sohasi uchun amalga oshirildi. Hisoblash sohasining chegaralarida Dirixle turidagi chegaraviy shartlar berilib, ichki tugunlar uchun cheklangan farqlar usuliga asoslangan besh nuqtali farqlar sxemasi qo'llanildi. Natijada hosil bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi iteratsion usullar yordamida yechildi. Barcha sonli tajribalar MATLAB dasturiy muhitida amalga oshirilib, hisoblash jarayonining aniqligi va barqarorligi turli parametrlar asosida tahlil qilindi.

Ikki o'lchamli fazoda Laplas tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

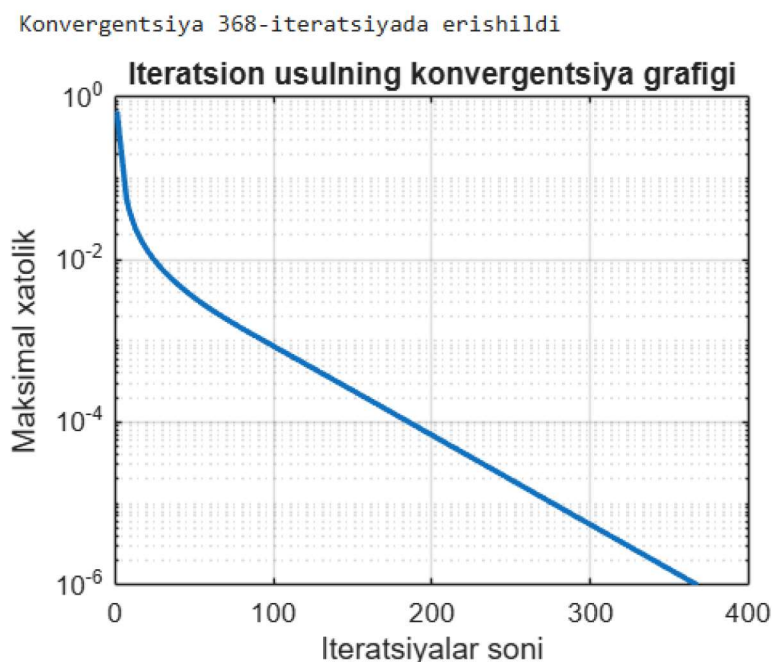
uch o'lchamli holatda esa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

olingan natijalar iteratsion usullar o'rtasida sezilarli farqlar mavjudligini ko'rsatdi. Xususan, Yakobi usuli algoritmik jihatdan sodda va amalga oshirish uchun qulay bo'lishiga qaramay, konvergensiya tezligining pastligi bilan ajralib turdi. Ushbu usulda har bir iteratsiyada faqat oldingi qadamdagi qiymatlardan foydalanilishi sababli yechimga yaqinlashish sekin kechdi va belgilangan aniqlikka erishish uchun katta iteratsiyalar soni talab qilindi.

Gauss–Zeydel usulida esa yangilangan qiymatlardan darhol foydalanilishi hisobiga konvergensiya jarayoni tezlashdi. Sonli tajribalar natijalari ushbu usul Yakobi usuliga nisbatan kamroq iteratsiyalar bilan yechimga yaqinlashishini ko'rsatdi. Bu holat adabiyotlarda keltirilgan nazariy natijalar bilan mos keladi va Gauss–Zeydel usulining amaliy samaradorligini tasdiqlaydi. Eng yuqori samaradorlik ketma-ket ortiqcha relaksatsiya (SOR) usulida kuzatildi. Relaksatsiya parametrining optimal qiymati tanlanganda iteratsiyalar soni sezilarli darajada

kamaydi va hisoblash vaqti qisqardi. Tajribalar shuni ko'rsatdiki, relaksatsiya parametri noto'g'ri tanlanganda konvergensiya sekinlashishi yoki umuman buzilishi mumkin, bu esa ushbu parametрни tanlash masalasining muhimligini yana bir bor tasdiqlaydi. Konvergensiya grafigi tahlili iteratsiyalar soni ortishi bilan maksimal xatolikning muntazam va monotond tarzda kamayib borishini ko'rsatdi. Ushbu holat tanlangan besh nuqtali farqlar sxemasining barqaror va konvergent ekanligini tasdiqlaydi. Bundan tashqari, hisoblangan potensial funksiyaning grafik tasvirlari silliq va uzluksiz taqsimotga ega ekanligini ko'rsatdi. Potensialning ekstremal qiymatlarining faqat chegaralarda kuzatilishi Laplas tenglamasi uchun amal qiluvchi maksimal prinsipga to'liq mos kelishini isbotlaydi.



1-rasm. Iteratsion usulining konvergensiya grafigi

Natijalar tahlili shuni ko'rsatdiki, hisoblash panjarasining zichligi oshirilganda yechimning aniqligi sezilarli darajada yaxshilanadi. Biroq panjara qadamining kichrayishi bilan birga algebraik tenglamalar sistemasi o'lchami ortadi va bu hisoblash vaqtining ko'payishiga olib keladi. Shu sababli amaliy masalalarni yechishda aniqlik va hisoblash xarajatlari o'rtasida optimal muvozanatni ta'minlash muhim hisoblanadi. Olingan natijalar Laplas tenglamasini sonli yechishda cheklangan farqlar usuli va iteratsion yondashuvlarning samaradorligini tasdiqlab,

ularni muhandislik va fizik masalalarni modellashtirishda keng qo'llash mumkinligini ko'rsatadi.

Xulosa. Mazkur maqolada Laplas tenglamasini cheklangan farqlar usuli yordamida sonli yechish masalasi nazariy va amaliy jihatdan kompleks tarzda tadqiq etildi. Tadqiqot davomida elliptik turdagi differensial tenglamalar uchun cheklangan farqlar usulining matematik asoslari ko'rib chiqildi hamda besh nuqtali farqlar sxemasi asosida qurilgan sonli modelning samaradorligi baholandi. O'tkazilgan sonli tajribalar ushbu yondashuv Laplas tenglamasi kabi muvozanat holatdagi jarayonlarni tavsiflovchi modellarda ishonchli va aniqligi yuqori natijalar berishini ko'rsatdi. Iteratsion usullar yordamida olingan sonli yechimlarning barqarorligi va konvergensiya xususiyatlari batafsil tahlil qilindi. Yakobi, Gauss–Zeydel va ketma-ket ortiqcha relaksatsiya (SOR) usullarining solishtirma tahlili shuni ko'rsatdiki, Yakobi usuli soddaligi bilan ajralib tursa-da, konvergensiya tezligi past bo'lib, amaliy hisoblashlarda ko'p iteratsiyalarni talab qiladi. Gauss–Zeydel usuli esa yangilangan qiymatlardan foydalanishi hisobiga tezroq yaqinlashuvni ta'minlaydi. Eng yuqori samaradorlik SOR usulida kuzatilib, relaksatsiya parametrining optimal tanlanishi iteratsiyalar sonini sezilarli darajada kamaytirishi aniqlandi. Konvergensiya grafigi va xatoliklarning kamayish dinamikasi tanlangan cheklangan farqlar sxemasining barqaror va konvergent ekanligini amaliy jihatdan tasdiqladi. Bundan tashqari, hisoblangan potensial funksiyaning fazoviy taqsimoti Laplas tenglamasi uchun amal qiluvchi maksimal prinsipga mos kelishi aniqlanib, olingan natijalarning fizik va matematik jihatdan asoslanganligi isbotlandi. Olingan natijalar matematik modellashtirish, muhandislik hisoblari, elektrostatika, issiqlik almashinuvi va suyuqliklar mexanikasi kabi sohalarda uchraydigan statsionar jarayonlarni sonli tahlil qilishda muhim amaliy ahamiyatga ega. Kelgusida ushbu tadqiqotni notekis panjaralar asosida qurilgan farqlar sxemalari, uch o'lchamli hisoblash sohalari hamda yuqori tartibli sonli usullarni qo'llash orqali yanada rivojlantirish mumkin. Shuningdek, iteratsion jarayonlarni tezlashtirish uchun

zamonaviy parallel hisoblash texnologiyalaridan foydalanish istiqbolli ilmiy yoʻnalishlardan biri hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Samarskiy A.A. Teoriya raznostnyx sxem. — Moskva: Nauka, 1989.
2. Tixomirov V.M. Differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: Oʻqituvchi, 2000.
3. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennye metody. — Moskva: Nauka, 1989.
4. Shoxamidov Sh.Sh. «Amaliy matematika unsurlari», T., "Oʻzbekiston", 1997
5. Boyzoqov A., Qayumov Sh. «Hisoblash matematikasi asoslari», Oʻquv qoʻllanma. Toshkent 2000.
6. Abduqodirov A.A. «Hisoblash matematikasi va programmalash», Toshkent. "Oʻqituvchi" 1989.
7. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995.
8. Siddiqov A. «Sonli usullar va programmashtirish», Oʻquv qoʻllanma. T.2001.