KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMANI YECHISHNING CHEKLI ELEMENTLAR USULI

Xaydarov I.U., Abduqaxxorova M.M. Abduqaxxorova M.M.

FarDU dotsenti, f.-m.f.n., dotsent

FarDU magistranti. abduqaxxorovamuborak173@gmail.com

FarDU talabasi abdukaxxorovamadinaxon@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada kasr tartibli differensial tenglamalarni chekli elementlar usuli yordamida yechish masalasi ko'rib chiqiladi. Riman–Liuvill va Veyl kasr tartibli hosilalarning aniqlanishi, ularning xossalari hamda energiya fazosi tushunchasi asosida umumlashgan yechim qurish usullari tadqiq etilgan. Muammoning raqamli echimini topishda chekli elementlar usulining qo'llanilishi tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: kasr tartibli differensial tenglamalar, chekli elementlar usuli, Riman–Liuvill hosilasi, Veyl operatori, energiya fazosi, umumlashgan yechim, musbat aniqlangan operator, simmetrik operator, raqamli yechish, Furye koeffitsientlari.

Quyidagi tenglamani ko'rib chiqamiz:

$$D^{(\alpha)}u + Tu = f, \quad u, \quad f \in L_2[0,2\pi], \tag{1.1}$$

bu yerda

$$D^{(\alpha)} = \frac{(D_{x+}^{(\alpha)} + D_{x-}^{(\alpha)})}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$$

ifoda $D_{x\pm}^{(\alpha)}$ kasr tartibli differensiallash operatorlari yordamida aniqlanadi. Bu operatorlar $[a,b]$ kesmada berilgan $\varphi(x)$ funksiyalar uchun quyidagi formulalar bilan ta'riflanadi:

$$\begin{aligned}
(D_{a+}^{(\alpha)}\varphi)(x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \quad -\infty < x < \infty, \\
(D_{b-}^{(\alpha)}\varphi)(x) &\overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^\alpha}, \quad -\infty < x < \infty,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

bu yerda $0 < \alpha < 1$. (1.2) ifodalar odatda α tartibli, chap qanotli va o'ng qanotli Riman-Liuvill kasr tartibli hosilalar deb ham yuritiladi. u noma'lum funksiya, f esa $L_2[0,2\pi]$ fazoning berilgan funksiyasidir. T – $(D^{(\alpha)} + T)$ chiziqli operator bo'ladigan qandaydir operator bo‘lib, umumiy holda cheklanmagan va musbat aniqlanmagan bo‘lishi mumkin.

Yetarlicha silliq funksiyalar uchun $D^{(\alpha)}$ operatori Veyl kasr tartibli differensiallash operatori bilan mos tushadi va quyidagi qoida asosida ta’sir etadi:

$$D^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k e^{ikx}. \tag{1.3}$$

Bu yerda $u_k - u$ funksiyaning Furye koeffitsientlari.

Endi (1.2) kasr tartibli hosilaning $\alpha \geq 1$ bo‘lgan holatini ko‘rib chiqamiz. Bunda uning ifodasi quyidagicha beriladi.

α soni – kasr tartibli hosilaning tartibi – quyidagi ko‘rinishda ifodalanishi mumkin:

$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, bu yerda α butun qism, $\{\alpha\}$ esa kasr qismdir. Agar α butun son bo‘lsa, kasr tartibli hosila oddiy differensiallash tushuniladi:

$$D^{\alpha}_{a+} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad D^{\alpha}_{b-} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots$$

Shunday qilib, yuqori tartibli kasr hosilalar quyidagicha aniqlanadi:

$$D^{\alpha}_{a+} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1,$$

$$D^{\alpha}_{b-} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Operator uchun quyidagi lemmalar o‘rinli.

Lemma 1.1 $D^{(\alpha)}$ – musbat aniqlangan operator.

Isbot. Ma’lumki, $D^{(\alpha)}$ operator quyidagi shart bajarilganda musbat aniqlangan operator bo‘ladi: $(D^{(\alpha)}u, u) > 0$. Bundan tashqari, e^{ikx} sistema $L_2[0, 2\pi]$ fazoda to‘liq bo‘lsa, quyidagi o‘rinli bo‘ladi:

$$\left(D^{(\alpha)}\square, u\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(D^{(\alpha)}u, e^{ikx}\right)\left(u, e^{ikx}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} |u_k|^2 > 0.$$

Isbot talab qilinganidek.

Lemma 1.2 $D^{(\alpha)}$ – simmetrik operator.

Isbot. $L_2[0,2\pi]$ fazodan olingan ixtiyoriy u,v funksiyalar uchun $D_+^{(\alpha)}u$ va v ning skalyar ko‘paytmasini ko‘rib chiqamiz:

$$(D_+^{(\alpha)}u,v)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x-t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)^{\alpha}e^{ikx}dtv(x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi}u(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)^{\alpha}e^{ik(x-t)}dtv(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-ik)^{\alpha}e^{ikx}dxu(t)dt=(u,D^{(\alpha)}v).$$

Xuddi shunday, $D_-^{(\alpha)}$ operatori uchun ham quyidagi o‘rinli: $(D_-^{(\alpha)}u,v)=(u,D_+^{(\alpha)}v)$.

Shundan kelib chiqadiki, $D^{(\alpha)}$ operatori (o‘zini $D_+^{(\alpha)}$ va $D_-^{(\alpha)}$ operatorlari orqali ifodalovchi) skalyar ko‘paytma xossasiga asosan simmetrik operator hisoblanadi.

Buni hisobga olib, skalyar ko‘paytma va normani mos ravishda quyidagicha kiritamiz:

$$[u,v]=(D^{(\alpha)}u,v),\quad \|u\|=(D^{(\alpha)}u,u)^{1/2}.$$

Skalyar ko‘paytma aniq ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$[u,v]=(D^{(\square)}u,v)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k\,|k|^{\alpha}\,e^{ikx}v(x)dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|^{\alpha}\,u_k\overline{v_k}.$$

$D(D^{(\alpha)})$ aniqlanish sohasini kiritilgan norma bo‘yicha to‘ldirib, energiya fazosi deb ataladigan fazo hosil qilamiz va uni H_D bilan belgilaymiz.

Boshlang‘ich (1.1) tenglamani ixtiyoriy $v\in D(D^{(\alpha)})$ funksiyaga ko‘paytirsak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$[u,v]+(Tu,v)=(f,v). \tag{1.4}$$

(1.4) tenglama masalaning umumlashgan qo‘yilishiga imkon beradi. (1.1) tenglamaning umumlashgan yechimi deb, (1.4) tenglamani H_D fazodan olingan har qanday v funksiya uchun qanoatlantiradigan $u\in H_D$ funksiyaga aytiladi.

Adabiyotlar:

1. Литвинова Н.Н. Приближенное вычисление дробной производной и метод конечных элементов для дробно - дифференциального уравнение. Выпускная квалификационная работа. Казань-2015.

2. Самарский А.А. Введение в численные методы. - Москва: Наука. Главная редакция физико - математической литературы, 1982.