

INTERPOLYASION MASALANING YAGONALIGI VA YECHIMNING BARQARORLIGI SHARTLARI.

G'afforova Z.I.

FarDU talabasi, zaxrobonugofforova@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada interpolyatsiya masalasining yagonaligi va yechim barqarorligi keng tahlil qilingan. Interpolyatsion polinomlarning mavjudligi hamda yagonaligi Vandermond determinanti va qarama-qarshilik usuli orqali asoslanib, sonli hisoblashlardagi ahamiyati yoritilgan. Barqarorlik interpolyatsion xatolik bilan bog'liq holda baholanib, tugun nuqtalardagi kichik o'zgarishlarning natijaga ta'siri amaliy misollar bilan ko'rsatilgan. Teng oraliqli va Chebyshev tugunlari taqqoslanib, barqaror yechim uchun tugun tanlashning muhimligi asoslab berilgan. Shuningdek, Lagrange va Nyuton interpolyatsion formulalarining nazariy jihatlari izchil bayon etilgan.

Kalit so'zlar: interpolyatsiya, interpolyatsion polinom, yagonalik, barqarorlik, interpolyatsion xatolik, tugun nuqtalar, Lagranch interpolyatsiyasi, Nyuton interpolyatsiyasi, Vandermond determinanti, Chebyshev tugunlari, sonli usullar, hisoblash matematikasi.

KIRISH. Interpolyatsiya masalasida yuqori darajali polinomlardan foydalanish ko'pincha beqarorlikka olib keladi. Bu holat matematik adabiyotlarda mashhur bo'lgan tebranish hodisalari bilan izohlanadi. Ayniqsa, teng oraliqli tugunlar tanlanganda interpolyatsion polinom oraliq chetlarida keskin tebranib, aniq qiymatlardan uzoqlashishi mumkin. Shu sababli barqarorlikni ta'minlash uchun tugunlarni to'g'ri tanlash masalasi muhim ahamiyatga ega bo'ladi.

Barqarorlik tushunchasi interpolyatsion xatolik bilan chambarchas bog'liq. Interpolyatsion xatolik deganda, haqiqiy funksiya qiymati bilan interpolyatsion funksiya qiymati orasidagi farq tushuniladi. Ushbu xatolikni baholash orqali yechimning barqarorligi haqida xulosa chiqarish mumkin. Agar xatolik tugunlardagi kichik o'zgarishlarga sezilarli darajada bog'liq bo'lsa, bunday usul beqaror hisoblanadi. Aksincha, xatolik nazorat ostida bo'lsa, interpolyatsiya masalasi barqaror yechimga ega bo'ladi.

Interpolyatsiya masalasining yagonaligi va yechimning barqarorligi shartlarini chuqur o'rganish sonli hisoblashlar sifatini oshirishga xizmat qiladi. Bu masalalar nafaqat sof matematik nuqtayi nazardan, balki muhandislik, fizika,

iqtisodiyot va axborot texnologiyalari sohalarida ham keng qo'llaniladi. Kompyuter modellashtirish, ma'lumotlarni qayta ishlash va prognozlash jarayonlarida interpolyatsiya usullari muhim o'rin egallaydi.

Mazkur mavzuning dolzarbligi shundaki, zamonaviy hisoblash texnikasi sharoitida katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlash talab etiladi. Bunday sharoitda interpolyatsiya masalasining yagonaligi va barqarorligi ta'minlanmasa, olingan natijalar noto'g'ri yoki ishonchsiz bo'lib chiqishi mumkin. Shu sababli ushbu masalalarni nazariy jihatdan asoslash va amaliy jihatdan to'g'ri qo'llash muhim vazifalardan biri hisoblanadi.

Interpolyatsiya masalasi tushunchasi va uning qo'yilishi

Interpolyatsiya masalasi matematik analiz va sonli hisoblashlar nazariyasining muhim yo'nalishlaridan biridir. Amaliy masalalarda ko'pincha funksiyaning analitik ifodasi noma'lum bo'ladi, biroq uning ayrim nuqtalardagi qiymatlari tajriba, kuzatish yoki oldindan hisoblash orqali aniqlangan bo'ladi. Bunday holatda funksiyaning butun aniqlanish sohasidagi xatti-harakatini taxminiy tarzda tiklash zarurati yuzaga keladi. Aynan shu jarayon interpolyatsiya masalasi deb ataladi.

Interpolyatsiya masalasining asosiy mazmuni quyidagicha ifodalanadi. Berilgan n ta o'zaro farqli tugun nuqtalar $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ va ularga mos ravishda funksiyaning qiymatlari $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ ma'lum bo'lsin. Talab shundan iboratki, ushbu nuqtalardan o'tuvchi va berilgan qiymatlarni qanoatlantiruvchi funksiya yoki polinom topilsin. Natijada topilgan interpolyatsion funksiya berilgan ma'lumotlar asosida noma'lum oraliq qiymatlarni aniqlash imkonini beradi.

Interpolyatsiya masalasini qo'yishda bir nechta muhim shartlarga e'tibor qaratiladi. Avvalo, tugun nuqtalar bir-biridan farqli bo'lishi lozim. Agar tugunlar ustma-ust tushsa, masala matematik jihatdan noto'g'ri qo'yilgan hisoblanadi. Ikkinchidan, har bir tugun nuqtada funksiya qiymati aniq berilgan bo'lishi kerak. Bu shart interpolyatsion yechimni aniqlashda asosiy rol o'ynaydi.

Nazariy jihatdan interpolyatsiya masalasi cheksiz ko‘p yechimlarga ega bo‘lishi mumkin. Shu sababli amaliyotda ko‘pincha ma’lum bir sinfdagi funksiyalar, asosan polinomlar tanlanadi. Polinomlar bilan interpolyatsiya qilish qulay, chunki ular soddaroq hisoblanadi va ko‘plab nazariy xossalarga ega. Eng keng tarqalgan yondashuvlardan biri — darajasi $n-1$ dan oshmagan interpolyatsion polinomni topishdir. Bu yondashuv masalaning aniq qo‘yilishini va keyinchalik yagonalikni ta’minlaydi.

Interpolyatsiya masalasini qo‘yishda asosiy maqsad faqat berilgan nuqtalardan o‘tuvchi funksiya topish emas, balki bu yechimning sifatini ham baholashdan iborat. Sifat tushunchasi yechimning aniqligi, yagonaligi va barqarorligi bilan bevosita bog‘liq. Shu sababli interpolyatsiya masalasi nafaqat algebraik, balki funksional va sonli jihatdan ham tahlil qilinadi.

Interpolyatsiya masalasining qo‘yilishi real amaliy vazifalar bilan chambarchas bog‘liq. Fizika, texnika, iqtisodiyot va axborot texnologiyalarida tajriba natijalari ko‘pincha diskret nuqtalar ko‘rinishida olinadi. Ushbu nuqtalar asosida jarayonni uzluksiz funksiya sifatida tasvirlash talab etiladi. Interpolyatsiya aynan shu vazifani bajaradi va model qurish jarayonida muhim vosita hisoblanadi.

Interpolyatsion funksiyalar va polinomlar

Interpolyatsion funksiyalar va polinomlar interpolyatsiya masalasining markaziy tushunchalari hisoblanadi. Berilgan diskret nuqtalar asosida noma’lum funksiyaning tiklash jarayonida aynan shu matematik vositalar qo‘llaniladi. Interpolyatsion funksiya deb, berilgan tugun nuqtalarda funksiyaning ma’lum qiymatlarini aniq qanoatlantiruvchi funksiya aytiladi. Agar tugunlar to‘plami $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ va ularga mos funksiyaning qiymatlari $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ berilgan bo‘lsa, u holda interpolyatsiya masalasi quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $P(x)$ funksiyaning topishdan iborat bo‘ladi:

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Interpolyatsion funksiyalar turli ko‘rinishda bo‘lishi mumkin. Nazariy jihatdan cheksiz ko‘p funksiyalar ushbu shartni qanoatlantiradi. Shu sababli amaliy

va nazariy jihatdan qulay bo'lgan funksiyalar sinfi tanlab olinadi. Eng keng tarqalgan va muhim sinf bu interpolatsion polinomlardir. Interpolatsion polinomlar oddiy tuzilishga ega bo'lib, ular bilan ishlash matematik jihatdan qulaydir.

Interpolatsion polinom deganda, darajasi n dan oshmagan va yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi polinom tushuniladi:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ aniqlanishi lozim bo'lgan koeffitsiyentlardir. Ushbu koeffitsiyentlar interpolatsiya shartlari asosida topiladi.

Interpolatsion polinomlarning mavjudligi va yagonaligi asosiy teoremlardan biri bilan kafolatlanadi. Teorema ko'ra, agar $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlar o'zaro farqli bo'lsa, u holda darajasi n dan oshmagan yagona interpolatsion polinom mavjud bo'ladi. Bu natija interpolatsion polinomlarning nazariy poydevorini tashkil etadi va ularning ishonchliligini ta'minlaydi.

Interpolatsion polinomni qurishning eng mashhur usullaridan biri Lagranj interpolatsion formulasi hisoblanadi. Lagranj polinomi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x).$$

bu yerda $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Lagranj bazis polinomlari hisoblanadi. Ushbu bazis

polinomlar muhim xossaga ega:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Shu xossa tufayli Lagranj polinomi berilgan tugunlarda funksiyaning qiymatlarini aynan tiklaydi.

Interpolyatsion polinamlarni qurishda Nyuton interpolyatsion formulasi ham keng qo'llaniladi. Nyuton polinomi bo'lingan ayirmalar asosida quriladi va quyidagi ko'rinishga ega:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Bu yerda ($f[x_i] = f(x_i)$) bo'lib, bo'lingan ayirmalar quyidagi rekurrent formula bilan aniqlanadi:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Nyuton polinomining muhim afzalligi shundaki, yangi tugun qo'shilganda oldingi hisoblashlarni butunlay qayta bajarish talab etilmaydi. Interpolyatsion polinomlar yordamida funksiyani yaqinlashtirishda xatolik tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Agar haqiqiy funksiya $f(x)$ uzluksiz va yetarlicha silliq bo'lsa, u holda interpolyatsion xatolik quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

Interpolyatsion polinamlarning xatti-harakati tugunlar joylashuviga kuchli bog'liq. Agar tugunlar teng oraliqli bo'lsa, yuqori darajali polinomlarda tebranishlar paydo bo'lishi mumkin. Shu sababli amaliy masalalarda tugunlarni to'g'ri tanlash muhim hisoblanadi. Masalan, Chebyshev tugunlari

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

interpolyatsiya jarayonida xatolikni kamaytirishga yordam beradi.

Interpolyatsion funksiyalar faqat polinomlar bilan chegaralanmaydi. Ayrim hollarda trigonometrik interpolyatsiya qo'llaniladi. Masalan, davriy funksiya uchun trigonometrik interpolyatsion funksiya quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Interpolyatsion funksiyalar va polinomlar nazariyasi keyingi bo'limlarda o'rganiladigan yagonalik va barqarorlik masalalari uchun asos bo'lib xizmat qiladi. Polinomlarning mavjudligi, yagonaligi va xatolik formulalari interpolyatsiya

masalasining nazariy jihatdan to'g'ri qo'yilganligini ko'rsatadi. Shu bilan birga, tugunlar tanlovi va polinom darajasi yechimning barqarorligiga bevosita ta'sir qiladi.

Interpolyatsion polinomning yagonaligi shartlari

Interpolyatsion masala matematik analiz va hisoblash matematikasining muhim bo'limlaridan biri hisoblanadi. Bu masala asosan berilgan diskret nuqtalar to'plami asosida noma'lum funksiyani tiklash yoki unga yaqinlashtiruvchi analitik ifodani topish bilan bog'liq. Amaliyotda tajriba natijalari ko'pincha jadval ko'rinishida beriladi va funksiyaning aniq ko'rinishi noma'lum bo'ladi. Shunday sharoitda interpolyatsiya usullari yordamida funksiya qiymatlarini aniqlash zarurati tug'iladi. Interpolyatsion masalaning to'g'ri va ishonchli yechimga ega bo'lishi uchun esa uning yagonaligi muhim ahamiyat kasb etadi.

Interpolyatsion masalaning yagonaligi deganda, berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi interpolyatsion funksiya yoki polinom faqat bitta bo'lishi tushuniladi. Agar yagonalik mavjud bo'lmasa, bir xil tugun nuqtalarda bir xil qiymatlarni qabul qiluvchi bir nechta turli funksiyalar mavjud bo'lishi mumkin. Bu esa hisoblash natijalarining noaniqligiga olib keladi. Shu sababli interpolyatsiya nazariyasida yechimning mavjudligi bilan bir qatorda uning yagonaligi ham alohida o'rganiladi.

Faraz qilaylik, o'zaro farqli bo'lgan quyidagi tugun nuqtalar berilgan bo'lsin:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

ya'ni har qanday

$$i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$$

sharti bajariladi. Shu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari ham ma'lum bo'lsin:

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0, \\ f(x_1) = y_1, \\ \vdots \\ f(x_n) = y_n. \end{cases}$$

Interpolyatsion masala shundan iboratki, shunday $P(x)$ funksiya yoki polinom topilsinki, u barcha tugun nuqtalarda berilgan qiymatlarni aniq qanoatlantirsin, ya'ni

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

agar $P(x)$ polinom bo'lsa va uning darajasi n dan katta bo'lmasa, u interpolyatsion polinom deb ataladi.

Interpolyatsion polinomning yagonaligi haqidagi asosiy teorema quyidagicha ifodalanadi. Agar $n+1$ ta o'zaro farqli tugun nuqtalarda funksiyaning qiymatlari berilgan bo'lsa, u holda darajasi n dan katta bo'lmagan interpolyatsion polinom mavjud va u yagona bo'ladi. Ushbu teorema interpolyatsiya nazariyasining asosini tashkil etadi va keyingi barcha interpolyatsion formulalar aynan shu natijaga tayangan holda quriladi.

Yagonalikni isbotlash uchun qarama-qarshilik usulidan foydalaniladi. Faraz qilaylik, berilgan tugunlar va qiymatlar uchun ikkita turli interpolyatsion polinom mavjud bo'lsin. Ularni $P_n(x)$ va $Q_n(x)$ deb belgilaymiz. Bu polinomlarning har ikkalasi ham darajasi n dan katta emas va quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad Q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

endi ushbu polinomlar ayirmasini qaraymiz:

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

$R(x)$ ham polinom bo'lib, uning darajasi ham n dan katta bo'lmaydi. Tugun nuqtalarda esa quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$R(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = y_i - y_i = 0$$

demak, $R(x)$ polinomi kamida $n+1$ ta o'zaro farqli ildizga ega: $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Matematik analizdan ma'lumki, darajasi n dan katta bo'lmagan nolga teng bo'lmagan polinom ko'pi bilan n ta ildizga ega bo'lishi mumkin. Bu holatda esa $R(x)$ polinomida $n+1$ ta ildiz mavjud. Demak, yagona imkoniyat shuki, $R(x) \equiv 0$.

Bu esa $P_n(x) \equiv Q_n(x)$ ekanini bildiradi. Shunday qilib, interpolyatsion polinom yagona bo'lishi isbotlanadi. Ushbu isbotdan ko'rinadiki, interpolyatsion polinomning yagonaligi bir nechta muhim shartlarga bog'liq. Birinchidan, tugunlar

soni polinom darajasidan bittaga ko'p bo'lishi kerak. Ikkinchidan, barcha tugunlar o'zaro farqli bo'lishi lozim. Uchinchidan esa, polinom darajasi qat'iy cheklangan bo'lishi kerak. Agar bu shartlardan biri buzilsa, yagonalik yo'qolishi mumkin. Ayniqsa, tugunlarning o'zaro farqli bo'lishi muhim ahamiyatga ega. Agar $x_0 = x_1$ bo'lsa, lekin $y_0 \neq y_1$ bo'lsa, masala umuman yechimga ega bo'lmaydi. Chunki bitta nuqtada funksiyaning ikkita turli qiymati berilgan bo'ladi. Agar $x_0 = x_1$ va $y_0 = y_1$ o'lsa ham, masala degeneratsiyaga uchraydi va u holda interpolatsion masala mazmunan o'z ahamiyatini yo'qotadi.

Polinom darajasining cheklanishi ham yagonalik uchun zarur shart hisoblanadi. Agar polinom darajasi cheklanmasa, berilgan $n+1$ ta nuqtani qanoatlantiruvchi cheksiz ko'p polinomlar mavjud bo'ladi. Masalan, $P_n(x)$ interpolatsion polinom bo'lsa, u holda $P_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)Q(x)$ ko'rinishdagi ifoda ham barcha tugun nuqtalarda interpolatsion shartlarni qanoatlantiradi. Bu yerda $Q(x)$ ixtiyoriy polinom bo'lib, uning tanlanishiga qarab yangi polinomlar hosil bo'ladi. Ammo bunday polinomlarning darajasi n dan katta bo'ladi. Shu sababli darajani cheklash orqali yagonalik ta'minlanadi.

Interpolatsion polinomning yagonaligi chiziqli algebra nuqtayi nazaridan ham izohlanadi. Umumiy ko'rinishdagi darajasi n dan katta bo'lmagan polinomni quyidagicha yozish mumkin:

$$P_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)Q(x)$$

Agar bu polinomni tugun nuqtalarga qo'ysak, $n+1$ ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0,$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n.$$

Bu sistema uchun asosiy determinant Vandermond determinanti deb ataladi va u quyidagi ko'rinishga ega:

$$\Delta = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Agar barcha tugunlar o'zaro farqli bo'lsa, ya'ni $x_i \neq x_j$ bo'lsa, determinant nolga teng bo'lmaydi. Bu esa chiziqli tenglamalar sistemasining yagona yechimga ega ekanini bildiradi. Natijada koeffitsiyentlar $a_0, a_1, \dots, a_n$ yagona aniqlanadi va interpolatsion polinom ham yagona bo'ladi.

Interpolatsion polinomning yagonaligi amaliy masalalarda katta ahamiyatga ega. Jadval asosida funksiyaning oraliq qiymatlarini aniqlashda, sonli integrallash va differensiallashtirish usullarida, tajriba ma'lumotlarini qayta ishlashda aynan shu xususiyat natijalarning aniqligi va ishonchliligini ta'minlaydi. Agar interpolatsion polinom yagona bo'lmasa, hisoblash natijalari turlicha bo'lib ketishi mumkin. Shunday qilib, interpolatsion masalaning yagonaligi interpolatsiya nazariyasining tayanch tushunchalaridan biri hisoblanadi. Darajasi cheklangan va tugunlari o'zaro farqli bo'lgan interpolatsion polinom har doim yagona bo'ladi. Ushbu xossa keyingi boblarda o'rganiladigan Lagranch va Nyuton interpolatsion formulalarining nazariy asosi bo'lib xizmat qiladi hamda sonli usullarning mustahkam matematik poydevorini tashkil etadi.

Yagonalik haqidagi asosiy teoremlar va ularning isboti

Interpolatsion masalaning yagonaligi haqidagi teoremlar interpolatsiya nazariyasining asosiy tayanch nuqtalaridan hisoblanadi. Ushbu teoremlar berilgan tugun nuqtalarda funksiyaning qiymatlari ma'lum bo'lganda, ularni qanoatlantiruvchi interpolatsion polinomning yagona ekanini qat'iy matematik asosda isbotlab beradi. Amaliy va nazariy masalalarda bu teoremlar interpolatsiya natijalarining aniqligi va barqarorligini kafolatlaydi.

Interpolatsion masalada yagonalik g'oyasi shundan kelib chiqadiki, agar berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi bir nechta turli polinomlar mavjud bo'lsa, u holda interpolatsiya natijalari bir ma'noli bo'lmaydi. Shu sababli yagonalik haqidagi teoremlar alohida ahamiyat kasb etadi va ular matematik analiz hamda chiziqli algebra vositalari yordamida isbotlanadi.

Interpolyatsion masala uchun asosiy yagonalik teoremasini quyidagicha ifodalash mumkin. Agar $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zaro farqli tugunlar bo'lsa va ushbu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ berilgan bo'lsa, u holda darajasi n dan katta bo'lmagan interpolyatsion polinom yagona bo'ladi. Bu teorema interpolyatsion masalaning yagonaligi haqidagi asosiy teorema sifatida qaraladi. Mazkur teoremaning isboti qarama-qarshilik usuliga asoslanadi. Faraz qilaylik, berilgan tugunlar va qiymatlar uchun ikkita turli interpolyatsion polinom mavjud bo'lsin. Ularni $Q_n(x)$ va $P_n(x)$ deb belgilaymiz. Bu polinomlarning har ikkalasi ham darajasi n dan katta emas va quyidagi shartlarni bajaradi:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad Q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

endi ularning ayirmasini ko'rib chiqamiz:

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

Bu holda $R_n(x)$ ham polinom bo'lib, uning darajasi n dan katta emas. Tugun nuqtalarda esa:

$$R(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0$$

demak, $R_n(x)$ polinomi kamida $n+1$ ta o'zaro farqli ildizga ega. Polinomlar nazariyasiga ko'ra, darajasi n dan katta bo'lmagan nolga teng bo'lmagan polinom ko'pi bilan n ta ildizga ega bo'lishi mumkin. Bu yerda esa ildizlar soni $n+1$ ta. Shuning uchun yagona xulosa shuki,

$$R(x) \equiv 0$$

natijada

$$R(x) \equiv 0 \Rightarrow P_n(x) \equiv Q_n(x)$$

bo'ladi. Bu esa interpolyatsion polinomning yagona ekanini isbotlaydi.

Yagonalik haqidagi ikkinchi muhim teorema Vandermond determinanti bilan bog'liq. Ushbu teorema chiziqli algebra usullari asosida interpolyatsion polinomning yagonaligini asoslab beradi. Teorema quyidagicha ifodalanadi. Agar $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ o'zaro farqli bo'lsa, u holda interpolyatsion polinom koeffitsiyentlarini

aniqlovchi chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti nolga teng bo'lmaydi va sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Isbot uchun interpolyatsion polinomni umumiy ko'rinishda yozamiz:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Bu polinomni tugun nuqtalarga qo'yish orqali quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n. \end{cases}$$

Bu sistemaning asosiy determinanti Vandermond determinanti deb ataladi va u quyidagi ko'rinishga ega:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Agar tugunlar o'zaro farqli bo'lsa, ya'ni $x_i \neq x_j$ bo'lsa, determinant nolga teng bo'lmaydi. Chiziqli algebra nazariyasiga ko'ra, determinanti nolga teng bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi. Demak, polinom koeffitsiyentlari yagona aniqlanadi va interpolyatsion polinom ham yagona bo'ladi. Yagonalik haqidagi yana bir muhim teorema nol polinom bilan bog'liq. Ushbu teorema yordamida yuqoridagi isbotlarning mantiqiy asosi mustahkamlanadi. Teorema quyidagicha ifodalanadi. Agar darajasi n dan katta bo'lmagan polinom $n+1$ ta o'zaro farqli nuqtada nolga teng bo'lsa, u holda bu polinom identik nol polinomdir.

Isbot uchun faraz qilaylik, $R(x)$ polinomi darajasi n dan katta emas va u $n+1$ ta turli nuqtada nolga teng bo'lsin. Agar $R(x)$ nol polinom bo'lmasa, u holda uning ildizlari soni ko'pi bilan n ta bo'lishi kerak. Bu esa shartga zid. Demak, $R(x) \equiv 0$. Ushbu natija interpolyatsion polinomning yagonaligini isbotlashda asosiy vosita sifatida qo'llaniladi.

Yagonalik haqidagi teoremlar interpolatsiya formulalarining nazariy asosini tashkil etadi. Xususan, Lagranch va Nyuton interpolatsion polinomlari aynan shu yagonalik teoremasiga tayanadi. Har ikkala formula turli ko‘rinishda yozilgan bo‘lsa-da, ular bir xil yagona interpolatsion polinomni ifodalaydi. Bu esa yagonalik teoremasining bevosita amaliy natijasidir.

Misol. Interpolatsiya, yagonalik, xatolik va barqarorlik

Berilganlar funksiya: $f(x) = \ln(1+x)$ oraliq $[0, 2]$

tugunlar $x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

qiymatlar $y_0 = f(0) = 0, \quad y_1 = f(1) = \ln 2, \quad y_2 = f(2) = \ln 3$

toppish darajasi 2 bo‘lgan $P_2(x)$ interpolatsion polinom

Lagranch usuli bilan yechim

Lagranch formulasi:

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i l_i(x)$$

Asosiy polinomlar:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad y_0 = f(0) = 0, \quad y_1 = f(1) = \ln 2, \quad y_2 = f(2) = \ln 3.$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i l_i(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$

$$P_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} + (\ln 2) \left[-x(x-2) \right] + (\ln 3) \frac{x(x-1)}{2}.$$

Polinom:

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$y_0 = 0,$$

demak,

$$P_2(x) = \ln 2 \cdot (-x(x-2)) + \ln 3 \cdot \frac{x(x-1)}{2}$$

soddalashtiramiz:

$$-x(x-2) = -x^2 + 2x, \quad \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2 - x}{2}.$$

natija:

$$P_2(x) = \left(-\ln 2 + \frac{\ln 3}{2}\right)x^2 + \left(2\ln 2 - \frac{\ln 3}{2}\right)x$$

ko‘rinish:

$$P_2(x) = \left(-\ln 2 + \frac{\ln 3}{2}\right)x^2 + \left(2\ln 2 - \frac{\ln 3}{2}\right)x$$

tekshiruv

$$P_2(1) = \left(-\ln 2 + \frac{\ln 3}{2}\right) \cdot 1^2 + \left(2\ln 2 - \frac{\ln 3}{2}\right) \cdot 1 = \left(-\ln 2 + \frac{\ln 3}{2}\right) + \left(2\ln 2 - \frac{\ln 3}{2}\right) = \ln 2 = f(1).$$

polinom to‘g‘ri.

Yagonalik isboti faraz qilaylik shu shartlarni bajaruvchi yana bir polinom bor:

$$Q_2(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2$$

ayirma:

$$R(x) = P_2(x) - Q_2(x)$$

u holda:

$$R(0) = R(1) = R(2) = 0$$

Demak, $R(x)$ darajasi 2 dan katta bo‘lmagan polinom va 3 ta turli ildizga ega.

Polinomlar teoremasi darajasi 2 bo‘lgan nol bo‘lmagan polinom ko‘pi bilan 2 ta ildizga ega.

Shuning uchun:

$$R(x) \equiv 0, P_2(x) \equiv Q_2(x),$$

Xatolik tahlili

Interpolyatsiya xatoligi:

$$f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

bizda $f(x) = \ln(1+x)$

hosilalar:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

oraliqda $[0, 2] : |f^{(3)}(x)| = \left| \frac{2}{(1+x)^3} \right| \leq 2, \quad x \in [0, 2].$

demak,

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{2}{6} |x(x-1)(x-2)| = \frac{1}{3} |x(x-1)(x-2)|$$

Masalan $x = 0.5$ da:

$$|f(0.5) - P_2(0.5)| \leq 0.125$$

Bu yuqori baho, real xatolik odatda kichikroq bo'ladi.

Barqarorlik tugundagi kichik xatolik natijaga qanday ta'sir qiladi

Faraz qilaylik, tugun qiymatlarida o'lchash xatoligi bor:

$$\tilde{y}_i = y_i + \delta y_i, \quad |\delta y_i| \leq 0.001, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

yangi polinom:

$$P_2(x) = \tilde{y}_0 l_0(x) + \tilde{y}_1 l_1(x) + \tilde{y}_2 l_2(x)$$

farq:

$$P_2(x) - P_2(x) = \delta y$$

baholash:

$$|P_2(x) - P_2(x)| \leq \left(\sum_{i=0}^2 |l_i(x)| \right) \max_{0 \leq i \leq 2} |\delta y_i|$$

endi $x = 0.5$ nuqtada hisoblaymiz:

$$l_0(0.5) = 0.375, \quad l_1(0.5) = 0.75, \quad l_2(0.5) = -0.125.$$

demak:

$$\sum_{i=0}^2 l_i(0.5) = 0.375 + 0.75 + 0.125 = 1.25$$

Xulosa tugundagi 0.001 xatolik natijada 0.00125 gacha kuchayishi mumkin

Teng masofali tugunlarda n oshsa $\sum_{i=0}^n l_i(x)$ katta bo'lishi mumkin demak

xatolik kuchayadi. Chebyshev tugunlari $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$

chekka nuqtalarda tugunlar zichroq tebranish kamayadi, barqarorlik yaxshilanadi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abdulhamidov A.U., Xudoynazarov S.X. Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari. Toshkent - «O‘zbekiston» 1995 y. 224 b.
2. Alov R.D., Xudoyberganov M. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg‘ulotlari to‘plami. UzMU.O‘quv qo‘llanma. 2008 y.1 106.
3. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие. Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. 2006.-523с.
4. Пмищежак А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М., Наука. 1989.
5. Шыввов Н.С. Численные методы. -М., Наука. 1967
6. Гателюк О. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования. -Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 140 с. <https://urait.ru/bcode/514036> (дата обращения: 06.09.2024).
7. Пирумов У. Г. Численные методы: учебник и практикум для академического бакалавриата. -Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 421 с. <https://urait.ru/bcode/431961>
8. Richard L. Burden, J.Doudlas Faires. Numerical Analysis, Youngstown State University, Boston, USA, Brooks/Cole, 2011
- Scop L.R. Numerical Analysis. Pripcetop University Press, 2011. - 342 r.