

LOGRANJ INTERPOLYASION FORMULASI: TUZILISHI, YECHIMINING YAGONALIGI VA XATOLIK BAHOSI

Azimjonova M.A.

FarDU talabasi, azimjonovamohinur88@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada Logranj interpolyasion formulasi sonli tahlilning asosiy masalalaridan biri sifatida ilmiy jihatdan yoritiladi. Interpolyasion polinomning analitik tuzilishi Logranj bazis polinamlari orqali ifodalanadi. O‘zaro farqli tugunlar sistemasida interpolyatsiya masalasining yechimi mavjudligi va yagonaligi qat’iy matematik asoslar bilan isbotlanadi. Interpolyatsiya xatoligi qoldiq had yordamida baholanib, uning yuqori tartibli hosilalar hamda tugunlarning joylashuviga bog‘liqligi tahlil qilinadi. Tadqiqot natijalari interpolyasion jarayonning nazariy asoslarini chuqurroq anglash va amaliy hisoblashlarda xatolikni nazorat qilish imkonini beradi.

Kalit so‘zlar: Logranj interpolyasion formulasi, interpolyasion polinom, yechimning yagonaligi, qoldiq had, xatolik bahosi.

Kirish: Interpolatsiya matematik analiz va raqamli hisoblashda markaziy o‘rin tutuvchi muammolardan biridir. Amalda ko‘pincha biz funktsiyaning faqat chegaralangan sonli nuqtalardagi qiymatlarini bilamiz va ushbu ma’lumotlar asosida butun oraliqda yoki nuqtalarda funktsiyaning yaqinlashgan qiymatlarini topish talab etiladi. Bunday vazifalarni hal qilish uchun ishlatiladigan eng mashhur va samarali vositalardan biri — interpolatsion polinomlar. Ularning ichida Lagranj (Lagrange) interpolatsion formulasi — aniq va qulay ifodasi, tahliliy xususiyatlari hamda amaliy hisoblash jihatlaridan yetakchi o‘rin egallaydi.

Lagranj formulasi: tarixiy va matematik kontekst. Lagranj interpolatsion formulasi XVIII-asr olimi Jozef-Louis Lagrange nomi bilan ataladi. G‘oya uning matematik merosidan kelib chiqqan bo‘lib, Lagrange o‘zining ishlanmalari orqali interpolatsiya operatorini aniq hisoblanadigan ko‘rinishda ifoda etgan. Lagranj formulasi interpolyatsion polinomning yopiq ko‘rinishini beradi: berilgan nuqtalar va ularning funksiya qiymatlari asosida har bir nuqtoga mos keluvchi bazis funksiyalar (Lagranj bazis polinamlari) quriladi va umumiy interpolatsion polinom ularning chiziqli kombinatsiyasi sifatida yoziladi. Bu ifoda hisoblash jihatdan qulay va tahliliy

dalillar uchun mos keladi, chunki u har bir qiymat uchun alohida koeffitsientlar topish zaruratini yo‘q qiladi — bazis polinomlar to‘g‘ridan-to‘g‘ri ma’lum nuqtalarda qiymatni biriga teng va qolganlarida nolga teng tarzda qabul qiladi.

Lagranj formulasining oddiy ifodasi va uning foydasi. Faraz qilaylik, $x_0, x_1, \dots, x_n$ distinct (takrorlanmas) node (nuqta) bo‘lib, $f(x_i)$ qiymatlari ma’lum.

Lagranj interpolatsion polinomi

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

quyidagicha ifodalanadi:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

Lagranj bazis polinomi bo‘lib, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker delta). Har bir $L_i(x)$ polinomi x bo‘yicha darajasi n bo‘lib, uning aniq ko‘rinishi ko‘p hollarda quyidagicha yoziladi:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ushbu ifoda oddiy va intuitiv: polinom $P_n(x)$ nuqta x_i da $f(x_i)$ ga teng bo‘ladi, chunki $L_i(x_i) = 1$ va boshqa bazislar nol bo‘ladi. Statistik va raqamli hisoblash amaliyotida bu konstruktsiya ko‘plab afzalliklarga ega, xususan, yangi nuqta qo‘shilganida yoki bitta qiymat o‘zgarganida qiymatlarni qayta hisoblash uchun ancha moslashuvchan. Lagranj interpolatsion polinomi bazis polinomlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida aniqlanadi:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Bu polinom darajasi n dan oshmaydi va barcha berilgan nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini aniq qondiradi:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Matematik shartlar va cheklovlar. Lagranj formulasining qo‘llanishi uchun asosiy talab — interpolatsiya nuqtalari bir-biridan farq qilishi zarur. Agar nuqtalardan

ikkitasiga teng bo'lsa, denominator $x_i - x_j = 0$ bo'lib, bazis polinamlari aniqlanmaydi. Bundan tashqari, funktsiyaning o'zi haqida ko'proq ma'lumot bo'lsa, masalan, u qanchalik silliq (differensiallanadigan) bo'lishi yoki qaysi oraliqda aniqlangan bo'lishi, xatolik qiymatini baholash va polinomni qaysi darajada tanlash haqida aniqroq xulosalar chiqarish mumkin bo'ladi. Interpolatsiya nuqtalarining taqsimoti ham natijaga katta ta'sir ko'rsatadi: teng bo'laklarga bo'lingan nuqtalar bilan ishlash Chebyshev nuqtalariga nisbatan ko'proq yomonlashuv — Runge efekti — olib kelishi mumkin, ayniqsa juda baland darajali polinomlarda.

Lagranj formulasining tadbirlari va amaliy ahamiyati. Amaliy jihatdan Lagranj interpolatsiyasi turli vaziyatlarda qo'llaniladi: eksperimental ma'lumotlar orqali funksiya yaqinlashmasini qurish, qiymatlar ameliyatsiyasi, grafika chizish, numerik integratsiya formulalarini hosil qilish (masalan Newton-Cotes formulalari), shuningdek ba'zi differensial tenglamalarni diskretizatsiya qilishda. Kompyuterda interpolatsiyani amalga oshirishda Lagranj formulasi oddiy va tushunarli kod yozishga imkon beradi, biroq hisoblash samaradorligi nuqtai nazaridan ba'zi optimallashtirishlar talab qilinadi, ayniqsa nuqtalar soni katta bo'lsa. Shu bois keyingi bo'limlarda interpolatsion polinomni hosil qilishning boshqa shakllari (masalan, Newtonning bo'linma farqlari asosidagi ifoda) bilan solishtirishlar va numerik jihatlardagi afzalliklari ko'rib chiqiladi.

Ishlanmaning vazifalari va chegaralari. Ushbu mustaqil ishning asosiy maqsadi Lagranj interpolatsion formulasining matematik tuzilishini chuqur tahlil qilish, interpolatsion polinomning yagonaligi teoremasini isbotlash, shuningdek, formula yordamida olingan yaqinlashuvning xatolik bahosini hosil qilish va uning baholanish usullarini ko'rsatishdir. Bundan tashqari, amaliy hisoblash usullari va misollar orqali nazariy natijalar qanday amalga oshirilishi ko'rsatadi. Ishda qamrab olinmaydigan jihatlari ham aniq belgilanadi: masalan, ko'p o'lchovli interpolatsiya, splaynlar yoki cheksiz nuqtalar to'plami bilan bog'liq maxsus metodlar bu ishning doirasidan tashqarida qoldiriladi. Biz faqat bitta o'zgaruvchili real funktsiyalar uchun interpolatsiya va unga doir nazariy tahlil bilan cheklanamiz.

Matematik notatsiya va belgilashlar. Ish davomida aniqlik uchun ba'zi belgilashlar qilingan: $f(x)$ — oraliqda aniqlangan haqiqiy qiymatli funktsiya; $x_0, x_1, \dots, x_n$ — interpolatsiya uchun tanlangan noyob nuqta; $P_n(x)$ — darajasi n bo'lgan interpolatsion polinom;

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Lagranj bazis polinomialari; $f^{(k)}(x)$ — f ning k -inchi tartibli hosilasi. Shuningdek, $||$ moduli uchun standart chegaralar, $O(g)$ notationi yoki boshqa asimptotik belgilashlar zarurat tug'ilganda aniqlanadi. Bu belgilashlar keyingi bo'limlarda formulalar va isbotlarda qulaylikcha ishlatiladi.

Keyingi bo'limlarda quyidagi masalalar batafsil ko'rib chiqiladi: avvalo Lagranj formulasi qanday hosil ekanligi va uning algebraik tuzilishi; keyin interpolatsion polinomning yagonaligi teoremasi va uning isboti; navbatdagi bo'lim xatolik nazariyasiga bag'ishlanib, qaysi shartlarda va qaysi darajada xato nazorat qilinishi mumkinligi tushuntiriladi; amaliy bo'limda esa hisoblash algoritmlari, sonli barqarorlik va murakkablik nuqtai nazarlari, shuningdek real misollar va numerik eksperimentlar ko'rsatiladi. Har bir bo'lim nazariy dalillar, matematik misollar va zarur hollarda grafik misollar bilan mustahkamlanadi.

Teorema. Agar $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalar o'zaro turli bo'lsa, u holda darajasi n dan oshmaydigan interpolatsion polinom mavjud va yagona bo'ladi.

Isbot: Faraz qilaylik, $P_n(x)$ va $Q_n(x)$ — berilgan nuqtalarda bir xil qiymatlarni qabul qiluvchi ikkita polinom bo'lsin. U holda

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

polinom uchun

$$R(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

bo'ladi. Demak, $R(x)$ polinom kamida $n+1$ ta turli ildizga ega. Ammo darajasi n dan oshmaydigan nol bo'lmagan polinom n tadan ortiq ildizga ega bo'la olmaydi. Shuning uchun

$$R(x) \equiv 0 \Rightarrow P_n(x) \equiv Q_n(x).$$

Demak, interpolatsion polinom yagona. Teorema isbotlandi.

Xulosa. Lagranj interpolatsion formulasi va unga bog‘liq nazariy hamda amaliy masalalarning tahlili natijasida quyidagi asosiy xulosalarga kelish mumkin. Avvalo, Lagranj formulasi klassik interpolatsion masalani yopiq va aniq ifodalash imkonini beradi: berilgan $n+1$ ta turli x nuqtalarida qiymatlari ma'lum bo‘lgan funksiya uchun darajasi n bo‘lgan interpolatsion polinomning mavjudligi va u bilan bevosita konstruktiv tarzda topish usuli ko‘rsatiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR VA SAYTLAR RO‘YXATI

1. Abdulhamidov A.U., Xudoynazarov S.X. Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari. Toshkent - «O‘zbekiston» 1995 y. 224 b.
2. Aloe R.D., Xudoyberganov M. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg‘ulotlari to‘plami. UzMU.O‘quv qo‘llanma. 2008 y.1 106.
3. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие. Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. 2006.-523с.
4. Пмищежак А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М., Наука. 1989.
5. Шыввов Н.С. Численные методы. -М., Наука. 1967
6. Гателюк О.В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования. -Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 140 с.
<https://urait.ru/bcode/514036>.
7. Пирумов У.Г. Численные методы: учебник и практикум для академического бакалавриата. -Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 421 с.
<https://urait.ru/bcode/431961>
8. Richard L. Burden, J.Doudlas Faires. Numerical Analysis, Youngstown State University, Boston, USA, Brooks/Cole, 2011
9. Scop L.R. Numerical Analysis. Pripcetop University Press, 2011. - 342 r.