

SHTURM–LIUVILL TIPIDAGI TESKARI VA IZOSPEKTRAL MASALALARNI GELFAND–LEVITAN USULI YORDAMIDA YECHISH

Sirojiddinov H.S.

FarDU magistranti.

Annotatsiya: Mazkur maqolada Shturm–Liuvill operatorining spektral nazariyasi, xususan izospektral masalalar va ularning teskari spektral masalalar bilan bog‘liqligi yoritiladi. Gelfand–Levitan integral tenglamasi asosida potensial funksiyani tiklash algoritmi keltiriladi hamda spektral xarakteristikalar orqali operatorni aniqlash masalalari tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: Shturm–Liuvill masalasi, spektral masala, teskari masala, izospektral masala, xos qiymat, xos funksiya, Gelfand–Levitan tenglamasi, Weyl funksiyasi, potensial, spektral xarakteristika.

Kirish. Matematik fizikaning bir qator masalalari Shturm-Liuvill operatorining xos qiymatlarini va ortonormallangan xos funksiyalarini topishga keltiriladi. Jumladan, klassik matematik fizikaning asosiy tenglamalari hisoblangan tor tebranishi va issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalarini Furye usuli bilan yechishda Shturm-Liuvill chegaraviy masalasining xos qiymatlarini, ortonormallangan xos funksiyalarini aniqlashga va ixtiyoriy funksiyani ular yordamida Furye qatoriga yoyishga to‘g‘ri keladi. Bu yo‘nalishdagi ilk natijalar D.Bernulli, J.Dalamber, L.Eyler, J.Liuvill va C.Shturmilar tomonidan olingan[5]. Shturm-Liuvill operatori spektral nazariyasining asosiy g‘oyalari XX asrda G.D.Birkgof, G.Veyl, D.Gilbert, V.A.Steklov, E.Ch.Titchmarsh, N.Levinson, B.M.Levitan va boshqa olimlar tomonidan rivojlantirilgan.

Izospektral masalalar fizik modellarda spektral xususiyatlarni o‘zgartirmasdan turib muhit yoki tizim parametrlarini o‘zgartirish imkonini beradi. Masalan, ikki xil tor bir xil tovush chiqaradi, lekin ularning zichlik yoki taranglik funksiyalari har xil bo‘lishi mumkin.

Bu yondashuv kvant mexanikasi, akustika, optik muhitlar, to‘lqin tarqalishi, axborot signalini tiklash va boshqa sohalarda beqiyos amaliy natijalar beradi.

Quyidagi masalaga

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0, \pi], \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \\ y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \end{cases} \quad (2)$$

Shturm – Liuvill chegaraviy masalasi deyiladi. Bu yerda $q(x) \in C[0, \pi]$ haqiqiy uzluksiz funksiya bo‘lib, α va β berilgan haqiqiy sonlardir, λ esa kompleks parametr.

Agar (1) tenglamani $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ chegaraviy shartlar bilan qarasak, hosil bo‘ladigan chegaraviy masalaga Dirixle masalasi deyiladi, agar $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$, chegaraviy shartlar bilan qarasak, hosil bo‘ladigan chegaraviy masalaga Neyman masalasi deyiladi.

(1) tenglamaning $q(x)$ ko‘effitsiyentga (1)-(2) Shturm–Liuvill masalaning potensali deyiladi.

1-ta’rif. Agar λ parametrning biror $\lambda = \lambda_0$ qiymatida (1) - (2) chegaraviy masala noldan farqli $y(x, \lambda_0) \neq 0$ yechimga ega bo‘lsa, λ_0 songa (1) - (2) chegaraviy masalaning xos qiymati deyiladi, $y(x, \lambda_0)$ yechimga ega λ_0 xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya deyiladi[1].

2-ta’rif. Ushbu $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ sonli ketma-ketliklar juftligiga Shturm-Liuvill chegaraviy masalasining spektral berilganlari (spektral xarakteristikalar) deyiladi. bu erda $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ masalanining xos sonlari, $\varphi(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ masalaning xos funksiyalari,

$\alpha_n = \sqrt{\int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx}$, $n \geq 0$ - normallovchi o‘zgarmaslar ketma-ketligi. Spektral xarakteristikalarini topish va ularning xossalari o‘rganish masalasiga spektral analizning to‘g‘ri masalasi deyiladi.

Spektral xarakteristikalar yordamida Shturm-Liuvill tenglamasi ko‘effitsiyentlarini va chegaraviy shartlarini aniqlash masalasiga spektral analizning teskari masalasi deyiladi.

Shturm–Liuvill masalalarining odatiy shakli “to‘g‘ri masalalar” deb yuritiladi, ya’ni berilgan differensial operator, chegaraviy shartlar va spektral parametr λ uchun

yechimni topish nazarda tutiladi. Biroq, matematik fizika va boshqa amaliy sohalarda aksincha — tizimning spektral xossalari (masalan, λ_n xos qiymatlar yoki ularning funksional bog‘lanishlari) eksperimental yoki hisobiy yo‘l bilan berilishi, va shu asosda operatorning o‘zini yoki uning ba’zi elementlarini (potensial, chegaraviy shartlar) aniqlash zarurati tug‘iladi. Bunday yondashuvlar teskari spektral masalalar deb ataladi.

Teskari masalaning mohiyati shundaki, differensial tenglama yoki operator haqidagi ma’lumot to‘liq emas, balki uning spektral xarakteristikasi ma’lum. Ya’ni, λ_n xos qiymatlar to‘plami, ba’zan α_n normallashtirilgan konstantalar (Furye koeffitsiyentlari) yoki Weyl funksiyasi $m(\lambda)$ ma’lum bo‘ladi. Shu asosda, bizga noma’lum bo‘lgan $q(x)$ potensial funksiyani yoki chegaraviy shartlardagi koeffitsiyentlarni aniqlash kerak bo‘ladi.

Klassik Shturm–Liuvill masalasining umumiy ko‘rinishi quyidagicha:

$$L[y] := -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0, \pi],$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0.$$

Bu yerda $q(x)$ — uzluksiz haqiqiy funksiya. To‘g‘ri masalada $q(x)$ va chegaraviy shartlar berilgan bo‘ladi. Teskari masalada esa, aksincha, $q(x)$ noma’lum, spektral axborot esa berilgan.

Teskari masalalarni o‘rganishda eng muhim savollardan biri bu: berilgan spektral axborot asosida $q(x)$ funksiyani tiklash mumkinmi?, ya’ni masala yagona yechimga egami?

Ushbu savolga javob bo‘ladigan yirik natijalar XX asrning 40–60-yillarida Borg, Levitan, Marchenko, Gelfand, Titchmarsh va Weyl tomonidan berilgan.

1-teorema (Borg teoremasi). Agar $q(x)$ — $[0, \pi]$ da haqiqiy funksiya bo‘lib, ikki xil chegaraviy shartga ega bo‘lgan ikkita Shturm–Liuvill masalaning xos qiymatlar to‘plami mos kelsa, u holda $q(x)$ funksiyasi yagona aniqlanadi[5].

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & x \in [0, \pi], \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0, \Rightarrow q_1(x) = q_2(x). \\ \text{va ikkinchi holda: } y'(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

2-teorema (Marchenko yagonalik teoremasi). Agar λ_n xos qiymatlar va α_n normallashtirilgan koeffitsiyentlar berilgan bo'lsa, u holda $q(x)$ potensial funksiyani tiklash mumkin va bu yechim yagona bo'ladi [6,7].

$$\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow q(x) \in L^2[0, \pi]. \quad (4)$$

Agar spektral ma'lumotlar Gelfand–Levitan tenglamasiga mos ravishda $F(x)$ funksiyasi ko'rinishida aniqlangan bo'lsa, u holda potensial $q(x)$ quyidagi formula orqali tiklanadi:

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x), \quad (5)$$

bu yerda $K(x, t)$ funksiya (yadrosi) — Gelfand-Levitan integral tenglamasining yechimi.

Bu teoremlar shuni bildiradiki, spektral xarakteristikalar to'liq bo'lsa, potensial aniq tiklanadi. Bu metodlar 1950-yillarda Gelfand–Levitan va Marchenko tomonidan ishlab chiqilgan.

Ayrim holatlarda potensialni tiklash uchun Weyl funksiyasi deb ataladigan $m(\lambda)$ kompleks funksiya foydalaniladi. Bu funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$m(\lambda) = \frac{y'(0, \lambda)}{y(0, \lambda)} \quad (6)$$

bu yerda $y(x, \lambda)$ — $q(x)$ uchun hosil bo'lgan yechim. Weyl funksiyasi orqali $q(x)$ ni integral operator yadrosining yordami bilan tiklash mumkin.

Shturm–Liuvill tipidagi teskari masalalarni yechishda Gelfand–Levitan integral tenglamasi asosiy analitik vositalardan biridir. Bu usul yordamida berilgan spektral ma'lumotlarga tayangan holda boshlang'ich potensial funksiyani yoki unga izospektral bo'lgan yangi potensialni aniqlash mumkin. Ayniqsa, bu yondashuv almashtirish operatorlari bilan bog'lanib, izospektral masalalarni qurishda algoritmik yondashuv sifatida ishlatiladi.

Gelfand–Levitan usuli 1951-yilda Gelfand va Levitan tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, u teskari spektral masalani integral tenglama shaklida yechishga imkon beradi. U asosan spektral ma’lumot (xos qiymatlar va normallashtirilgan koeffitsiyentlar) asosida aniqlanadigan integral yadroni topish orqali boshlang‘ich operator yoki yangi potensialni aniqlashga asoslanadi.

Yuqorida $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklari ushbu

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (7)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad h, H \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

Shturm–Liuvill chegaraviy masalasining spektral xarakteristikalarini bo‘lishi uchun quyidagi

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{c}{n\pi} + \frac{\gamma_n}{n}, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_n}{n}, \quad \{\gamma_n\}, \{\beta_n\} \in l_2; \\ c &= h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t)dt, \quad \lambda_n \neq \lambda_m, \quad n \neq m, \quad \alpha_n > 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

shartlarning bajarilishi zarur ekanligi ko‘rsatilgan edi.

Endi teskari masalani yechish bilan shug‘ullanamiz, ya’ni (9) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklari yordamida (7), (8) chegaraviy masalaning $q(x)$ koeffitsiyenti va chegaraviy shartlardagi h, H sonlarni topish algoritmini keltiramiz. Buning uchun ushbu

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt, \\ K(x, x) &= h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t)dt \end{aligned} \quad (10)$$

tasvirdan va

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x, \lambda_n) \cos \sqrt{\lambda_n}t = 0, \quad 0 < t < x \quad (11)$$

Gelfand–Levitan ayniyatidan foydalanamiz.

3-teorema (Gelfand–Levitan). Har bir tayinlangan $x \in (0, \pi]$ uchun (10) ta’rifining $K(x, t)$ yadrosi ushbu

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^x K(x, s)F(s, t)ds = 0, \quad (0 < t < x) \quad (12)$$

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \sqrt{\lambda_n} t - \frac{1}{\alpha_n^0} \cos nx \cos nt \right), \quad (13)$$

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \geq 1, \\ \pi, & n = 0. \end{cases}$$

chiziqli integral tenglamani qanoatlantiradi. Odatda (12) integral tenglama Gelfand–Levitan integral tenglamasi yoki teskari masalaning asosiy integral tenglamasi deb yuritiladi [1].

(9) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi yordamida Shturm-Liuvill chegaraviy masalasi quyidagi algoritm bo'yicha quriladi:

1. Berilgan $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ sonlar ketma-ketliklari yordamida $F(x, t)$ funksiya (13) formula bilan aniqlanadi;
2. Gelfand-Levitan integral tenglamasini yechib, $K(x, t)$ funksiya topiladi;
3. Potensial $q(x)$ va h, H sonlar quyidagi

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x), \quad h = K(0, 0), \quad H = c - h - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(t) dt$$

formulalar yordamida topiladi.

Mazkur ishda Shturm - Liuvill tipidagi teskari va izospektral chegaraviy masalalar Gelfand - Levitan integral tenglamasi asosida konstruktiv va algoritmik yondashuvda o'rganildi. Klassik spektral nazariyadan farqli ravishda, normallovchi o'zgarmlarning chekli modifikatsiyasi orqali izospektral operatorlar oilasini qurish mexanizmi aniq formulalar bilan asoslandi. Berilgan spektral xarakteristikalar asosida potensial va chegaraviy parametrlarni tiklashning izchil algoritmi ishlab chiqildi. Olingan natijalar spektrni saqlagan holda differensial operatorlarni modellashtirish imkonini beradi.

Mazkur ishda Gelfand - Levitan integral tenglamasi asosida Shturm - Liuvill tipidagi teskari va izospektral masalalar konstruktiv yondashuvda o'rganildi.

Normallovchi o‘zgarmaslarning chekli modifikatsiyasi orqali izospektral operatorlar oilasini qurish imkoniyati ko‘rsatildi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI.

1. Hasanov A.B. *Shturm–Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasi*. Toshkent: O‘qituvchi, 2016.
2. Hasanov A.B. *Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish*. Toshkent: Turon-Iqbol, 2019.
3. Shakhobiddin T. Karimov, Elina L. Shishkina. Some methods of solution to the Cauchy problem for a inhomogeneous equation of hyperbolic type with a Bessel operator. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203 (2019). doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012096
4. Karimov Sh.T. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи–Кобера и их приложения. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2017, №2(18), 20–40.
5. Karimov Sh.T. Новые свойства обобщенного оператора Эрдейи–Кобера и их приложения. *Доклады АН Республики Узбекистан*, 2014, №5, 11–13.
6. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. *Acta Mathematica*, 78 (1946), 1–96.
7. Levitan B.M. *Inverse Sturm–Liouville Problems*. Utrecht: VNU Science Press, 1987.
8. Marchenko V.A. *Sturm–Liouville Operators and Applications*. Basel: Birkhäuser, 1986.
9. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера - Пуассона – Дарбу. *Узбекский математический журнал*. № 3, 57-69 с.
10. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Операторы Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных: монография; научное издание; - Фергана: изд.“Фарғона, 2021. 202 б.