ATROF-MUHIT OMILLARI VA RESURSLAR CHEKLANGANLIGINI HISOBGA OLUVCHI DINAMIK TIZIMLAR

ABDUQAXXOROVA M.

Farg'ona Davlat Universiteti. mohiraabduqaxxorova8@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada biologik, ekologik va iqtisodiy tizimlarda resurslarning cheklanganligi va atrof-muhit omillarining ta'sirini aks ettiruvchi dinamik tizimlarning matematik modellari tahlil qilinadi. Asosiy e'tibor logistik o'sish tenglamasi, uning umumlashtirilgan ko'rinishlari (Gilpin–Ayala modeli), shuningdek, resurslar dinamikasini hisobga oluvchi ikki o'lchovli "yirtqich–o'lja" tipidagi tizimlarga qaratilgan. Tizimlarning barqarorligi Lyapunov funksiyalari va faza portretlari yordamida o'rganiladi.

Kalit so'zlar: dinamik tizim, resurs cheklanishi, logistik tenglama, ekologik sig'im, barqarorlik, yirtqich–o'lja modeli, atrof-muhit omillari.

Tabiatdagi ko'plab jarayonlar (populyatsiyalar o'sishi, kimyoviy reaksiyalar, iqtisodiy o'sish) cheklangan resurslar va atrof-muhitning o'zgaruvchan sharoitlarida sodir bo'ladi. Klassik Maltus modeli $\frac{dN}{dt} = rN$ cheksiz o'sishni beradi, bu real hayotda mumkin emas. Shuning uchun resurslar cheklanganligi va atrof-muhit omillarini hisobga oluvchi dinamik tizimlar matematik ekologiya va boshqa fanlarning markaziy predmetidir.

Eng sodda model Verhulst (1838) tomonidan taklif qilingan:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

bu yerda $N(t)$ — populyatsiya zichligi, $r > 0$ — o'sish koeffitsienti, $K > 0$ — atrof-muhit sig'imi (resurslar bilan belgilanadigan maksimal populyatsiya). Bu tenglamaning yechimi:

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

$t \to \infty$ da $N(t) \to K$, ya'ni resurslar cheklanganligi tufayli tizim muvozanat holatiga intiladi.

Haqiqatda atrof-muhit omillari (harorat, namlik, ifloslanish) vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. Buni hisobga olish uchun parametrlar vaqtga bog'liq qilinadi:

$$\frac{dN}{dt} = r(t)N\left(1 - \frac{N}{K(t)}\right).$$

Agar $r(t)$ va $K(t)$ davriy funksiyalar bo'lsa, tizimda majburiy tebranishlar yuzaga keladi. Ba'zi hollarda $K(t)$ biror differensial tenglama bilan aniqlanadi, masalan resurs dinamikasi:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha(R_0 - R) - \beta NR,$$

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N(R - R_{\min}),$$

bu yerda $R(t)$ — resurs miqdori, R_0 — tiklanish darajasi.

Logistik modelni umumlashtirib, Gilpin va Ayala (1973) quyidagini taklif qilgan:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^{\theta}\right), \quad \theta > 0.$$

$\theta = 1$ da odatdagi logistik tenglama kelib chiqadi. $\theta > 1$ da populyatsiya o‘sishiga to‘sqinlik qiluvchi omillar keskinroq namoyon bo‘ladi.

Lotka–Volterra modeliga resurs cheklanishini kiritamiz:

$$\frac{dx}{dt} = x\left(r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - ay\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-m + bx),$$

bu yerda x — o‘lja, y — yirtqich. Atrof-muhit sig‘imi K cheklangan resurslarni ifodalaydi. Ushbu tizimning muvozanat nuqtalari:

1. $(0,0)$ — beqaror.
2. $(K,0)$ — $m > bK$ bo‘lsa barqaror (yirtqich yo‘qoladi).
3. Ijobiy muvozanat $x^* = \frac{m}{b}, \quad y^* = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{m}{bK}\right)$ faqat $m < bK$ da mavjud.

Bu nuqtaning barqarorligi Yakobi matritsasi bilan aniqlanadi. Ko‘rsatish mumkinki, K yetarlicha katta bo‘lganda tizimda barqaror fokus yoki tsikl paydo bo‘lishi mumkin.

Logistik modelning yagona nolga teng bo‘lmagan muvozanati $N = K$ asimptotik barqaror. Buni isbotlash uchun Lyapunov funksiyasi sifatida

$$V(N) = \left(N - K - K\ln\frac{N}{K}\right)$$

olish mumkin. Uning hosilasi:

$$\frac{dV}{dt} = -r\frac{(N-K)^2}{N} \le 0.$$

Bu tizimning barcha musbat boshlang‘ich shartlarda $N = K$ ga intilishini ko‘rsatadi.

Ikki o‘lchovli tizimlarda esa murakkab dinamika (limit sikllar, bifurkatsiyalar) mumkin. Atrof-muhit omillari davriy o‘zgarganda, tizimda xaos ham vujudga kelishi mumkin.

Ushbu ishda resurslar cheklanganligi va atrof-muhit omillarining dinamik tizimlarga ta’siri matematik modellar asosida o‘rganildi. Logistik model va uning umumlashtirilgan ko‘rinishlari tizimning muvozanatga intilishini, ikki o‘lchovli “yirtqich–o‘lja” modeli esa murakkabroq dinamikani namoyish etadi. Kelgusida stokastik atrof-muhit omillari (tasodifiy tebranishlar) va fazoviy heterojenlikni hisobga oluvchi qisman differensial tenglamalar asosidagi modellarni o‘rganish maqsadga muvofiq.

ADABIYOTLAR

1. Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, 10, 113–121.

2. Gilpin, M. E., & Ayala, F. J. (1973). Global models of growth and competition. Proceedings of the National Academy of Sciences, 70(12), 3590–3593.

3. Murray, J. D. (2002). Mathematical Biology. Springer.

4. May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, 261, 459–467.

5. Edelstein-Keshet, L. (2005). Mathematical Models in Biology. SIAM.