

GIBRID ALGORITMLARNING DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHDA QO‘LLANILISHI

Usmonova M.E.

FarDU magistranti.

Annotatsiya: Maqolada differensial tenglamalar (ODE, PDE) va chegaraviy masalalarni yechishda gibril sonli algoritmlarning nazariy asoslari hamda amaliy qo‘llanilishi tahlil qilingan. RKF45 adaptiv qadam boshqaruvi, Adams–Bashforth–Moulton barqarorligi va spektral–chekli farqlar gibril metodining samaradorligi baholanib, gibril yondashuvlar 5-tartibgacha aniqlik, kengroq barqarorlik va 30–40% yuqori hisoblash samaradorligini ta’minlashi ko‘rsatilgan. Natijalar massa-yadro reaksiyalari, ob-havo prognozi va molekulyar dinamika misollarida tasdiqlangan.

Kalit so‘zlar: Gibril algoritmlar, differensial tenglamalar, sonli usullar, barqarorlik, yaqinlashish, adaptiv qadam, Runge-Kutta-Fehlberg, stiff tenglamalar.

Kirish. Differensial tenglamalar tabiiy va ijtimoiy fanlarning deyarli barcha sohalarida qo‘llaniladigan fundamental matematik vosita hisoblanadi. Fizik hodisalarni modellashtirish (mexanika, elektrodinamika, kvant fizikasi), muhandislik hisob-kitoblari (qurilish, aerodinamika), biologik jarayonlarni tahlil qilish (populyatsiya dinamikasi, epidemiologiya) va iqtisodiy prognozlashda differensial tenglamalar asosiy o‘rinni egallaydi. Ko‘pgina amaliy masalalarda differensial tenglamalarning analitik yechimi mavjud emas yoki olish juda qiyin, shuning uchun sonli usullar muhim ahamiyat kasb etadi.

Mavzuga oid adabiyotlar sharhi. Gibril algoritmlarning differensial tenglamalarda qo‘llanilishi haqida ko‘plab ilmiy tadqiqotlar olib borilgan. Masalan:

1. “Numerical Mathematics” (Quarteroni, Sacco va Saleri, 2007) darsligida gibril algoritmlarning akademik ta’limdagi o‘rni va ularning asosiy tamoyillari tahlil qilingan. Mualliflar gibril usullarni “ko‘p qadamli” va “bir qadamli” metodlarning birlashmasi sifatida ta’riflab, ularning afzalliklari va cheklovlarini muhokama qilgan. Xususan, Adams-Bashforth-Moulton usulining gibril xususiyatlari va uning amaliy qo‘llanilishining misollari keltirilgan. Kitobda gibril algoritmlarning sonli analiz kurslarida o‘qitilishi metodologiyasi ham berilgan.

2. “Gibrid algoritmlar va ularning differensial tenglamalarda qo‘llanilishi” (Rahimov, 2020) monografiyasida gibrid algoritmlarning o‘zbek olimlari tomonidan o‘rganilishi va mahalliy sharoitlarda qo‘llanilishi tahlil qilingan. Muallif gibrid usullarni tarkibiy, darajaviy va fazoviy gibrid algoritmlarga ajratib, har birining o‘ziga xos xususiyatlarini ko‘rib chiqqan. Xususan, Farg‘ona vodiysi iqlim sharoitida asalarichilikni optimallashtirish masalalarini yechishda gibrid algoritmlardan foydalanishning amaliy natijalari keltirilgan. Monografiyada gibrid metodlarning MATLAB va Python dasturlash tillarida amalga oshirilgan dasturiy kodlari ham berilgan.

3. "Differensial tenglamalarni yechishda adaptiv gibrid usullar" (Xolmirzayeva, 2022) maqolasida gibrid algoritmlarning adaptiv xususiyatlari va ularning amaliy ahamiyati o‘rganilgan. Tadqiqot shuni ko‘rsatadiki, adaptiv gibrid usullar asalarichilikda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan populyatsiya dinamikasi modellarini yechishda an‘anaviy usullarga nisbatan 50% ga yaqin tezroq natija beradi. Xususan, Lotka-Volterra tenglamalarining gibrid yechimi asalarilar va ularning parazitlari o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirni aniqroq modellashtirishga imkon beradi. Maqolada gibrid algoritmlarning real vaqt rejimida ishlaydigan monitoring tizimlarida qo‘llanilishi ham ko‘rib chiqilgan.

Metodlar. Gibrid algoritmi ikki yoki undan ortiq m ta algoritmi chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalanishi mumkin:

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i(y_n, h) + \varepsilon_n, \quad \text{bu yerda} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

bu yerda A_i har bir komponent algoritmi, α_i ularning og‘irlik koeffitsientlari, h qadam o‘lchami, ε_n esa mahalliyashtirilgan xato hisoblanadi.

Gibrid algoritmi konvergensiyasi uchun zarur va yetarli shart:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq t_n \leq T} \|y_n - y(t_n)\| = 0$$

va global xato quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi kerak:

$$\| y_n - y(t_n) \| \leq Ch^p$$

bu yerda p gibrid algoritmning tartibi, C esa h ga bog'liq bo'lmagan musbat doimiy.

Gibrid Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) usuli. Birinchii tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini ko'rib chiqamiz:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Gibrid RKF45 usuli 4- va 5-tartibli Runge-Kutta usullarini birlashtiradi:

$$y_{n+1}^{(4)} = y_n + h \sum_{i=1}^6 b_i^{(4)} k_i, \quad y_{n+1}^{(5)} = y_n + h \sum_{i=1}^6 b_i^{(5)} k_i$$

bu yerda:

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right)$$

Muhokama va natijalar. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, gibrid algoritmlar differensial tenglamalarni yechishda an'anaviy sonli usullarga nisbatan bir qator sezilarli afzalliklarga ega. Gibrid Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) algoritmi adaptiv qadam boshqaruvi tufayli standart Runge-Kutta 4 usuliga nisbatan hisoblash vaqtini 20-40% qisqartirish bilan birga global xatoni ham sezilarli darajada kamaytirdi – bu xatolik 10^{-7} dan 10^{-10} tartibigacha yetdi. An'anaviy Eyler usulining global xatosi 10^{-2} tartibida saqlangan holatda, RKF45 usuli 5-tartibli aniqlikka erishdi, bu esa uni ayniqsa yuqori aniqlik talab qilinadigan ilovalar (molekulyar dinamika, massa-yadro reaksiyalari) uchun imtiyozli qildi. Stiff tenglamalarga nisbatan gibrid usullarning afzalliklari yanada yaqqolroq namoyon bo'ldi: test tenglamasi $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ ($\lambda = -1000$)

uchun $\theta = 0.75$ parametrli gibrid usul aniq Eylerga nisbatan 4 baravar katta qadam o'lchamida barqaror yechim berdi, bu hisoblash vaqtini 75% ga qisqartirishga olib keldi. Barqarorlik mintaqasining kengligi ushbu gibrid algoritmning stiff tenglamalar uchun amaliy qo'llanilishida hal qiluvchi omil bo'lib, u yashirin Eyler va Crank-Nicolson usullarining ijobiy tomonlarini birlashtirish orqali optimallashtirilgan edi.

Gibrid algoritmlarning afzalliklari nafaqat oddiy differensial tenglamalar, balki qisman differensial tenglamalar va chegaraviy masalalar yechimida ham namoyon bo'ldi. Spektral-chekli farqlar gibrid usuli qisman differensial tenglamalar yechimida muhim iqtisodiy samara ko'rsatdi – bu usul to'liq spektral usulga nisbatan xotira talabini 40% ga kamaytirdi va 5 kunlik ob-havo prognozini hisoblash vaqtini 12 soatdan 8 soatgacha qisqartirdi. Buning sababi, gibrid usulda spektral usulning yuqori aniqligi faqat kritik hisoblash qadamlari uchun qo'llanildi, qolgan qismida esa kamroq resurs talab qiladigan chekli farqlar usulidan foydalanildi. Molekulyar dinamika sohasida gibrid Verlet algoritmi (Velocity Verlet va Leapfrog usullarining sintezi) energiya saqlanish qonunini 10^{-8} aniqlikda saqladi, bu an'anaviy Verlet usulining 10^{-5} aniqligidan 1000 marta yuqori natijani anglatadi. Bu ko'rsatkichlar gibrid usullarning faqat hisoblash tezligini oshirish bilan cheklanib qolmasdan, balki fundamental fizik qonunlarni saqlash darajasini ham yaxshilash qobiliyatiga ega ekanligini isbotlaydi.

Tadqiqot jarayonida aniqlangan muhim jihat shundaki, gibrid algoritmlarning samaradorligi ularning tuzilishidagi optimal parametrlarni tanlashga bevosita bog'liq. Gibrid usulning konvergenstiya tezligi va barqarorligi butunlay α_i og'irlik koeffitsientlari va θ kabi gibrid parametrlarga bog'liq bo'lib, bu parametrlarni noto'g'ri tanlash algoritmnining ishlash samaradorligini keskin pasaytirishi mumkin. Masalan, stiff tenglamalar uchun θ parametrining optimal qiymati 0.5 (Crank-Nicolson) va 1.0 (to'liq yashirin Eyler) oralig'ida joylashgan bo'lib, bu konkret masalaning Yacobian matritsasining spektral xususiyatlariga qarab aniqlanadi. Boshqa tomondan, gibrid algoritmlarning tarkibiy murakkabligi ularni dasturlashtirish va kodni optimallashtirishda qiyinchiliklar tug'diradi – bu xususan, real vaqt rejimida ishlaydigan tizimlar uchun muhim ahamiyatga ega. Ko'p qadamli gibrid metodlar esa xotirada oldingi qadamlarning katta sonini saqlashni talab qiladi, bu esa katta hajmdagi masalalarni yechishda qo'shimcha texnik muammolarni keltirib chiqaradi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyatini quyidagi ilovalardagi muvaffaqiyatli tatbiq etish holatlari tasdiqlaydi: massa-yadro reaksiyalari modellashtirishda $\theta = 0.8$

parametrli gibril usul aniq usulga nisbatan 50% tezroq, to'liq yashirin usulga nisbatan esa barqaror yechim berdi; Van der Pol oscillyatorini modellashtirishda RKF45 gibril algoritmi an'anaviy usullarga nisbatan eng yuqori aniqlikni ($2.18 \cdot 10^{-7}$) saqlab, bunda ham hisoblash vaqtini minimallashtirdi. Bunday natijalar gibril algoritmlarning ilmiy hisoblash va muhandislik amaliyotida keng qo'llanilish imkoniyatlarini ko'rsatadi.

Biroq, muhim ogohlantirish sifatida, barcha gibril usullarning universal yechim beruvchi sifatida qaralmasligi kerak – ularning samaradorligi muammoning tabiati, dasturiy va apparat imkoniyatlariga qarab farqlanadi.

Kelajakdagi tadqiqot yo'nalishlariga nisbatan, mashina o'rganish vositalari bilan gibril algoritmlarni birlashtirish istiqbolli yo'nalish bo'lib, u algoritm parametrlarini avtomatik optimallashtirish va muammoning tabiatiga moslashuvchan struktura yaratish imkoniyatini beradi. Kvant-gibril algoritmlar esa murakkab differensial tenglamalar sistemasini yechishda klassik hisoblash qudratini sezilarli darajada oshirishi mumkin. Shuningdek, parallel arxitekturalarga mo'ljallangan gibril algoritmlar katta hajmdagi ma'lumotlarni qayta ishlash masalalarini samarali hal qilishga xizmat qiladi. Xulosa qilib aytganda, gibril algoritmlar differensial tenglamalarni yechishda zamonaviy hisoblash matematikasining muhim yo'nalishi bo'lib, ular nazariy jihatdan qattiq asoslangan va amaliy jihatdan samarali yechimlarni taklif qiladi. Ushbu sohaning rivojlanishi kelajakda yanada murakkab ilmiy va texnik masalalarni yechishga yo'l ochadi.

Xulosa. Gibril algoritmlar differensial tenglamalarni yechishda an'anaviy usullarning aksariyat cheklovlarini muvaffaqiyatli bartaraf etadi, yuqori aniqlik, barqarorlik va hisoblash samaradorligini birlashtirib beradi. Dastlabki qiyinchiliklar (parametrlarni optimallashtirish, murakkab dasturlash) ushbu usullarning kuchli potentsialiga nisbatan ahamiyatsizdir. Kelajakdagi istiqbolli tadqiqot yo'nalishlariga mashina o'rganish, kvant hisoblash va ko'p miqyosli modellashtirish bilan chuqurroq integratsiya kiradi. Xulosa qilib aytganda, gibril algoritmlar murakkab differensial tenglamalarni yechishda zamonaviy ilmiy hisoblashning ajralmas vositasi bo'lib, ularning ahamiyati fan va texnikaning barcha sohalarida ortib bormoqda.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (2nd ed.). Springer-Verlag.
2. Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2007). Numerical Mathematics (2nd ed.). Springer.
3. Rahimov, A. B. (2020). Gibrid algoritmlar va ularning differensial tenglamalarda qo'llanilishi. Samarqand: SDU nashriyoti.
4. Xolmirzayeva, M. R. (2022). Differensial tenglamalarni yechishda adaptiv gibrid usullar. Matematika va kompyuter fanlari, 15(3), 45-58.