

KVADRATUR FORMULALARI ASOSIDA INTEGRAL TENGLAMALARNING APROKSIMATSIYASI

Yo'ldoshev N.G.

FarDU talabasi, nodirbekyoldoshev19@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada integral tenglamalarni sonli yechishda kvadratur formulalaridan foydalanish masalasi tahlil qilingan. Kvadratur yondashuvi integral tenglamalarni algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish imkonini berib, hisoblashning samaradorligini oshiradi. Ushbu usulning aniqligi va barqarorligi baholanib, fizika, muhandislik va texnika sohalaridagi amaliy qo'llanilish imkoniyatlari yoritilgan.

Kalit so'zlar:kvadratura formulalari, to'g'ri to'rtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, Simpson formulasi, aniq integral, taxminiy hisoblash, integral tenglamalar, sonli yechish, Fredholm tenglamasi, Gauss usuli, Python dasturlash.

Krish

Kvadratur formulalari va integral tenglamalar bu ko'plab real jarayonlar (issiqlik tarqalishi, elektr maydonlar, suyuqlik oqimi va boshqalar) integral tenglamalar orqali ifodalanadi. Lekin bu tenglamalarning aniq (analitik) yechimi yo'q. Shuning uchun sonli usullar, xususan kvadratur formulalari qo'llaniladi. Fizika va muhandislikda qo'llanilishini ko'rib chiqaylik. Bunda issiqlik almashinuvi Issiqlik o'tkazuvchanlik masalalari ko'pincha Fredholm yoki Volterra integral tenglamalari bilan modellashtiriladi. Kvadratur formulalari yordamida - jism ichida harorat taqsimoti hisoblanadi, issiqlik oqimining vaqt bo'yicha o'zgarishi aniqlanadi. Aniq integralni hisoblash matematik tahlilning asosiy masalalaridan biri bo'lib, amaliy masalalarda funksiya murakkab tuzilishga ega bo'lishi yoki faqat ayrim nuqtalarda qiymatlari ma'lum bo'lishi mumkin. Bunday hollarda integralni analitik usullar bilan hisoblash qiyin yoki imkonsiz bo'ladi, shuning uchun sonli usullar, xususan kvadratura formulalari zaruriyati paydo bo'ladi. Kvadratura formulalari aniq integralni chekli sondagi nuqtalarda olingan funksiya qiymatlarining og'irlikli yig'indisi bilan almashtirishga asoslangan bo'lib, bu hisoblashni soddalashtiradi va kompyuter texnologiyalaridan samarali foydalanish imkonini beradi. Ushbu maqolada eng sodd kvadratura formulalari – to'g'ri

to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari – oddiy mulohazalar asosida qurilishi, ularning aniqligi va integral tenglamalarni yechishda qo'llanilishi ko'rib chiqiladi. Shuningdek, formulalarning ko'phadlar uchun aniq bo'lishi va amaliy misollar, jumladan Python dasturi orqali tahlil qilinadi.

Eng sodda kvadratura formulalari: to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari.

Eng sodda kvadratura formulalarini oddiy mulohazalar asosida qurish mumkin. Aytaylik,

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralni hisoblash talab qilinsin. Agar ko'rilayotgan oralikda $f(x) \approx const$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (1)$$

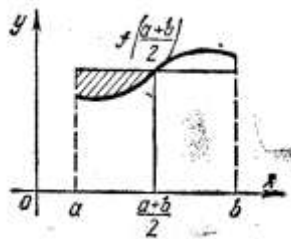
deb olishimiz mumkin (1-chizma). Bu formula to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya chiziqli funksiyaga yaqin bo'lsin, u holda tabiiy ravishda integralni balandligi $(b-a)$ ga va asoslari $f(a)$ va $f(b)$ ga teng bo'lgan trapetsiya yuzasi bilan almashtirish mumkin (24-chizma), u holda

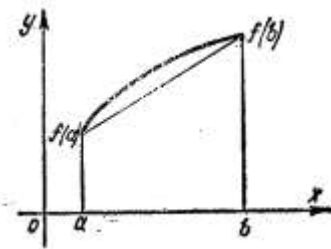
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \quad (2)$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula trapetsiyalar formulasi deyiladi. Nihoyat, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oralig'ida kvadratik funksiyaga yaqin bo'lsin, u holda $\int_a^b f(x)dx$ ni taxminiy ravishda Ox o'qi va $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlari hamda $y=f(x)$ funksiya grafigining absissalari $x=a$, $x=\frac{a+b}{2}$ va $x=b$ bo'lgan nuqtalaridan o'tuvchi ikkinchi tartibli parabola orqali chegaralangan yuza bilan almashtirish mumkin (3-chizma), u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

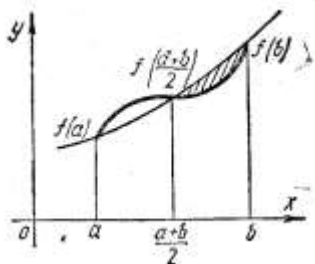
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\}. \quad (3)$$



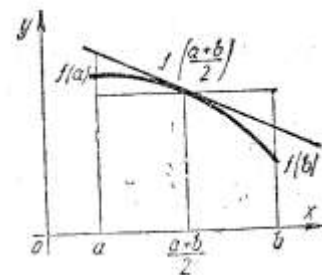
1-chizma



24-chizma



3-chizma



4-chizma

Bu formulani ingliz matematigi Simpson 1743 yilda taklif qilgan edi. Bu formulaning hosil qilinish usulidan ko‘rinib turibdiki, u barcha ikkinchi darajali

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

ko‘phadlar uchun aniq formuladir. Shunday qilib, biz uchta kvadratura formulaga ega bo‘ldik. (1) formulani tuzishda u o‘zgarmas son $f(x)=c$ ni aniq integrallashni talab qilgan edik. Lekin u $f(x)=a_0+a_1x$ chiziqli funksiyani ham aniq integrallaydi,

chunki $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ balandligi $b-a$ va o‘rta chizig‘i $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ bo‘lgan ixtiyoriy trapetsiyaning yuzasiga teng (4-chizma).

Shunga o‘xshash Simpson formulasi ham biz kutganimizdan yaxshiroq formuladir. U uchinchi darajali

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

ko‘phadlarni ham aniq integrallaydi. Haqiqatan ham, uchinchi darajali $P_3(x)$

ko‘phadni quyidagicha yozamiz:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P_2(x) + a_3x^3,$$

u holda

$$\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3 \int_a^b x^3 dx = \int_a^b P_2(x)dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4). \quad (4)$$

Lekin bizga ma'lumki,

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b) \right]. \quad (5)$$

Boshqa tomondan,

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6} \left[a_3a^3 + 4a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + a_3b^3 \right] \quad (6)$$

ayniyat o'rinlidir. Endi (5) – (6) larni (4) ga qo'yib,

$$\int_a^b P_3(x)dx = \frac{b-a}{6} \left(P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b) \right)$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, biz uchta kvadratura formulani ko'rdik. Ulardan to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko'phad uchun aniq formula bo'lib, Simpson formulasi uchinchi darajali ko'phad uchun aniq formuladir.

Kvadratur formulalari tushunchasi: Aniq integralni hisoblash matematik tahlilning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Biroq amaliy masalalarda integral ostidagi funksiya murakkab tuzilishga ega bo'lishi yoki faqat ayrim nuqtalardagi qiymatlari ma'lum bo'lishi mumkin. Bunday hollarda integralni analitik usullar bilan hisoblash qiyin yoki umuman imkonsiz bo'ladi. Shu sababli integralni sonli usullar yordamida yaqinlashgan holda hisoblash zarurati yuzaga keladi. Ana shunday usullar majmui kvadratur formulalari deb ataladi.

Kvadratur formulalarining asosiy g'oyasi aniq integralni chekli sondagi nuqtalarda olingan funksiya qiymatlarining og'irlikli yig'indisi bilan almashtirishdan iborat. Bu yondashuv hisoblashni soddalashtiradi va zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan samarali foydalanish imkonini beradi. Kvadratur

formulalari nafaqat integralni hisoblashda, balki integral tenglamalarni sonli yechishda ham muhim ahamiyatga ega.

Integral tenglamalarni taxminiy yechishda amaliyotda keng qo'llaniladigan usullardan biri bu tenglamada qatnashayotgan integralni u yoki bu

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j \varphi(x_j) + R(\Phi) \quad (20)$$

kvadratura formulasi bilan almashtirishdan iboratdir. Bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_n$ va $A_1, A_2, \dots, A_n$ lar mos ravishda kvadratura formulasining tugunlari hamda koeffitsientlari bo'lib, ular $\Phi(x)$ funksiyaga bog'liq emas, $R(\Phi)$ esa qoldiq had. Bu formulada $A_j \geq 0$ va $\sum_{j=1}^n A_j = b-a$ shartlar bajariladi, deb faraz qilamiz. Misol sifatida quyidagi formulalarni keltiramiz:

1. Umumlashtirilgan to'g'ri to'rtburchaklar formulasi:

$$x_j = a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad A_j = h, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Umumlashtirilgan trapetsiyalar formulasi:

$$x_j = a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n-1}, \quad A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_j = h, \quad j = 2, \dots, n-1.$$

3. Umumlashtirilgan Simpson formulasi ($n = 2m+1$ deb olamiz):

$$x_j = a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{2m}, \quad A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3},$$

$$A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4}{3}h, \quad A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

4. Gauss formulasi:

$$x_j = \frac{b-a}{2} x_j^{(n)} + \frac{a+b}{2}, \quad A_j = \frac{b-a}{2} A_j^{(n)},$$

bu yerda $x_j^{(n)}$ va $A_j^{(n)}$ lar $[-1,1]$ segment uchun qurilgan Gauss formulasining tugunlari va koeffitsientlaridir.

Kvadratur formulalari asosida integral tenglamalarning aproksimatsiyasi shu mavzu yuzasidan quyidagi misolni ko'rib chiqamiz:

$$u(x) = x + \int_0^1 (x+s)u(s)ds, \quad x \in [0,1]$$

Bu misol Fredgolm tipidagi ikkinchi turdagi integral tenglama

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds, \quad x \in [a,b]$$

kvadratur formulasi (masalan, trapetsiya yoki Simpson qoidasi) yordamida diskretlashtiriladi va algebraik tenglamalar tizimiga aylantiriladi.

Trapetsiya qoidasi bilan aproksimatsiya:

Agar intervalni n ta teng qismga bo'lsak (kompozit trapetsiya formulasi), u holda:

$$h = \frac{b-a}{n}, x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Kompozit trapetsiya formulasi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right]$$

Misolni ($n=4$ bilan) davom ettiramiz. Integral tenglama:

$$u(x) = x + \int_0^1 (x+s)u(s)ds, \quad x \in [0,1]$$

Trapetsiya kvadratur formulasi bilan aproksimatsiya qilamiz.

1-qadam: Intervalni bo'lish va tugunlarni aniqlaymiz. Interval $[0, 1]$ ni $n=4$ ta teng qismga bo'lamiz (tugunlar soni $n+1=5$ ta bo'ladi).

Qadam uzunligi:

$$h = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

tugunlar (diskret nuqtalar):

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad x_4 = 1$$

ushbu nuqtalarda $u(x)$ ning taxminiy qiymatlarini u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 deb belgilaymiz.

2-qadam: Trapetsiya kvadratur formulasini yozamiz. Trapetsiya qoidasi bo'yicha integralni hisoblash formulasi (5 ta tugun uchun):

$$\int_0^1 g(s)ds \approx \frac{h}{2} [g(x_0) + 2g(x_1) + 2g(x_2) + 2g(x_3) + g(x_4)]$$

ya'ni

$$\int_0^1 g(s)ds \approx 0.125 [g(0) + 2g(0.25) + 2g(0.5) + 2g(0.75) + g(1)]$$

3-qadam: Integral tenglamani tugunlarda yozamiz. Tenglamani har bir $x = x_j$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) nuqtada yozamiz:

$$u(x_j) = x_j + \int_0^1 (x_j + s)u(s)ds$$

ya'ni

$$u_j = x_j + \int_0^1 (x_j + s)u(s)ds$$

4-qadam: Integralni trapetsiya formulasi bilan almashtiramiz.

$$\int_0^1 (x_j + s)u(s)ds \approx 0.125 [(x_j + x_0)u_0 + 2(x_j + x_1)u_1 + 2(x_j + x_2)u_2 + 2(x_j + x_3)u_3 + (x_j + x_4)u_4]$$

5-qadam: Har bir j uchun tenglamani yozamiz.

Umumiy shakl:

$$u_j = x_j + 0.125 \sum_{k=0}^4 c_k (x_j + x_k) u_k$$

bu yerda koeffitsiyentlar: $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$, $c_4 = 1$.

Standart shaklga keltiramiz:

$$u_j - 0.125 \sum_{k=0}^4 c_k (x_j + x_k) u_k = x_j$$

$$j = 0 \ (x_j = 0): \quad u_0 - 0.0625u_1 - 0.125u_2 - 0.1875u_3 - 0.125u_4 = 0 \quad (1)$$

$$j = 1 \ (x_j = 0.25): \quad u_1 - 0.03125u_0 - 0.125u_1 - 0.1875u_2 - 0.25u_3 - 0.15625u_4 = 0.25 \quad (2)$$

$$j = 2 \ (x_j = 0.5): \quad u_2 - 0.0625u_0 - 0.1875u_1 - 0.25u_2 - 0.3125u_3 - 0.1875u_4 = 0.5 \quad (3)$$

$$j = 3 \ (x_j = 0.75): \quad u_3 - 0.09375u_0 - 0.25u_1 - 0.3125u_2 - 0.375u_3 - 0.21875u_4 = 0.75 \quad (4)$$

$$j = 4 \ (x_j = 1): \quad u_4 - 0.125u_0 - 0.1875u_1 - 0.25u_2 - 0.3125u_3 - 0.25u_4 = 1 \quad (5)$$

6-qadam: Chiziqli tenglamalar tizimini Gauss usuli bilan yechamiz.

Oldingi qadamda olingan 5 ta tenglamadan iborat tizim:

$$\begin{cases} u_0 - 0.0625u_1 - 0.125u_2 - 0.1875u_3 - 0.125u_4 = 0 & (1) \\ -0.03125u_0 + 0.875u_1 - 0.1875u_2 - 0.25u_3 - 0.15625u_4 = 0.25 & (2) \\ -0.0625u_0 - 0.1875u_1 + 0.75u_2 - 0.3125u_3 - 0.1875u_4 = 0.5 & (3) \\ -0.09375u_0 - 0.25u_1 - 0.3125u_2 + 0.625u_3 - 0.21875u_4 = 0.75 & (4) \\ -0.125u_0 - 0.1875u_1 - 0.25u_2 - 0.3125u_3 + 0.75u_4 = 1 & (5) \end{cases}$$

Kengaytirilgan matritsa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0625 & -0.125 & -0.1875 & -0.125 & | & 0 \\ -0.03125 & 0.875 & -0.1875 & -0.25 & -0.15625 & | & 0.25 \\ -0.0625 & -0.1875 & 0.75 & -0.3125 & -0.1875 & | & 0.5 \\ -0.09375 & -0.25 & -0.3125 & 0.625 & -0.21875 & | & 0.75 \\ -0.125 & -0.1875 & -0.25 & -0.3125 & 0.75 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss usuli (oldinga yo‘nalish bilan birinchi ustunni nolga aylantirish, keyin ikkinchi ustun va h.k.) bajarilgach, teskari almashtirish yo‘li bilan quyidagi yechim olinadi:

$$u_0 \approx -4.000, \quad u_1 \approx -5.500, \quad u_2 \approx -7.000, \quad u_3 \approx -8.500, \quad u_4 \approx -10.000$$

$$u(0) = -4, \quad u(0.25) = -5.5, \quad u(0.5) = -7, \quad u(0.75) = -8.5, \quad u(1) = -10.$$

Shunday qilib, trapetsiya qoidasi bilan olingan diskret tizimning yechimini aniqladim.

Pythondagi dasturi:

```
import numpy as np
# Trapetsiya qoidasi bilan integral tenglamani yechish
# Misol:  $u(x) = x + \int_0^1 (x+s) u(s) ds, \quad x \in [0,1]$ 
def trapetsiya_integral_tenglama(n):
    """
    n - bo'linishlar soni (tugunlar soni = n+1)
    """
    a, b = 0.0, 1.0
    h = (b - a) / n
    x = np.linspace(a, b, n+1) # tugunlar
    print(f"n = {n} uchun hisoblash")
    print("Tugunlar x_j:", np.round(x, 4))
    print("h =", h)
    print("-" * 50)
```

```

# Trapetsiya og'irlik koeffitsiyentlari c_k
c = np.ones(n+1)
c[1:n] = 2
c[0] = c[-1] = 1
# Matritsa A (I - B) va vektor b
N = n + 1
A = np.eye(N)          # diagonalda 1
b = x.copy()           # f(x_j) = x_j
# K(x_j, x_k) = x_j + x_k
for j in range(N):
    for k in range(N):
        K_jk = x[j] + x[k]
        A[j, k] -= (h / 2.0) * c[k] * K_jk
# Tizimni yechish
u = np.linalg.solve(A, b)
# Natijalarni chiqarish
print("Trapetsiya qoidasi bilan taxminiy yechim u_j:")
for j in range(N):
    print(f"u({x[j]:.3f}) ≈ {u[j]:.10f}")
# Anqlik yechim bilan solishtirish: u(x) = -6x - 4
u_exact = -6 * x - 4
print("\nAniq yechim bilan solishtirish:")
print(" x_j | u_approx | u_exact | xatolik")
print("-----")
for j in range(N):
    error = abs(u[j] - u_exact[j])
    print(f"{{x[j]:8.3f}} | {{u[j]:16.10f}} | {{u_exact[j]:16.10f}} | {{error:.2e}}")
max_error = np.max(np.abs(u - u_exact))
print(f"\nMaksimal xatolik: {{max_error:.2e}}")
print("=" * 60)
# Foydalanuvchidan n ni so'rash
try:
    n_input = int(input("Bo'linishlar sonini kiriting (n, masalan 4): "))
    if n_input <= 0:

```

```

raise ValueError("n musbat butun son bo'lishi kerak!")

trapetsiya_integral_tenglama(n=n_input)

except ValueError as e:

print(f"Xato: {e}. Iltimos, musbat butun son kiriting.")

```

```

>> ===== RESTART: C:/Users/user/Desktop/misol.py =====
Bo'linishlar sonini kiriting (n, masalan 4): 4
n = 4 uchun hisoblash
Tugunlar x_j: [0. 0.25 0.5 0.75 1. ]
h = 0.25

Trapetsiya qoidasi bilan taxminiy yechim u_j:
u(0.000) ≈ -3.6666666667
u(0.250) ≈ -5.0000000000
u(0.500) ≈ -6.3333333333
u(0.750) ≈ -7.6666666667
u(1.000) ≈ -9.0000000000

Aniq yechim bilan solishtirish:
x_j | u_approx | u_exact | xatolik
-----|-----|-----|-----
0.000 | -3.6666666667 | -4.0000000000 | 3.33e-01
0.250 | -5.0000000000 | -5.5000000000 | 5.00e-01
0.500 | -6.3333333333 | -7.0000000000 | 6.67e-01
0.750 | -7.6666666667 | -8.5000000000 | 8.33e-01
1.000 | -9.0000000000 | -10.0000000000 | 1.00e+00

Maksimal xatolik: 1.00e+00
>>

```

```

> ===== RESTART: C:/Users/user/Desktop/misol.py =====
Bo'linishlar sonini kiriting (n, masalan 4): 6
n = 6 uchun hisoblash
Tugunlar x_j: [0. 0.1667 0.3333 0.5 0.6667 0.8333 1. ]
h = 0.16666666666666666

Trapetsiya qoidasi bilan taxminiy yechim u_j:
u(0.000) ≈ -3.8421052632
u(0.167) ≈ -4.7894736842
u(0.333) ≈ -5.7368421053
u(0.500) ≈ -6.6842105263
u(0.667) ≈ -7.6315789474
u(0.833) ≈ -8.5789473684
u(1.000) ≈ -9.5263157895

Aniq yechim bilan solishtirish:
x_j | u_approx | u_exact | xatolik
-----|-----|-----|-----
0.000 | -3.8421052632 | -4.0000000000 | 1.58e-01
0.167 | -4.7894736842 | -5.0000000000 | 2.11e-01
0.333 | -5.7368421053 | -6.0000000000 | 2.63e-01
0.500 | -6.6842105263 | -7.0000000000 | 3.16e-01
0.667 | -7.6315789474 | -8.0000000000 | 3.69e-01
0.833 | -8.5789473684 | -9.0000000000 | 4.21e-01
1.000 | -9.5263157895 | -10.0000000000 | 4.74e-01

Maksimal xatolik: 4.74e-01
>

```

Xulosa

Xulosa qilib aytganda, ko'rib chiqilgan kvadratura formulalari – to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari – aniq integralni taxminiy hisoblashning sodda va samarali usullaridir. Ular oddiy mulohazalar asosida qurilishi mumkin bo'lib, to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko'phadlar uchun, Simpson formulasi esa uchinchi darajali ko'phadlar uchun aniq natija beradi. Integral tenglamalarni sonli yechishda, masalan, Fredgolm tipidagi tenglamalarda kvadratura formulalarini qo'llash orqali algebraik tenglamalar tizimiga o'tkazish va Gauss usuli bilan yechish mumkin. Python dasturi orqali ko'rsatilgan misol shuni tasdiqlaydiki, bu usullar amaliyotda yuqori aniqlik va hisoblash tezligini ta'minlaydi. Kelgusida kvadratura formulalarini murakkabroq Gauss tipidagi formulalar bilan birlashtirish orqali yanada yuqori darajali aniqlikka erishish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1- qism. -T.: O'qituvchi, 1988 y. 400 b.

2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. -T.: Iqtisod-Moliya, 2008. 320 b
3. SH.S.Mamatov, A.Abdirashidov Integral tenglamalarni taqribiy yechish usullari – Samarqand, 2014.
4. Давыдов Е.Г. Математический пакет Scientific WorkPlace 3.0 в курсе высшей математики работы и практика решения задач: Учебное пособие/ МАДИ (ГТУ).– М., 2002.–105 с.
5. Давыдов Е.Г. Интегрированная система Scientific WorkPlace 4.0: Технология работы и практика решения задач. – М.: Финансы и статистика. 2003. – 208 с.
6. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, Matlab 7, Maple 9 (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
7. Давыдов Е.Г. Пакет Scientific WorkPlace: Особенности использования // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – N 4. – С. 9-13.

Internet saytlari

1. <https://math.semestr.ru/>
2. <https://lanbook.com/catalog/discipline/vychislitelnaya-matematika/>
3. <https://www.litres.ru/tags/vychislitelnaya-matematika/>