

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMALARINI SONLI INTEGRALLASH USULLARI

Ismoilov A.I., Xudoyberdiyev N.Z.

FarDU dotsenti, f.-m.f.b.f.d(PhD), ismoilovaxrorjon@yandex.com.

FarDU talabas, nozimbekxudoyberdiyev55@gmail.com.

Annotatsiya: Maqolada oddiy differensial tenglamalar sistemalarini yechish uchun qo'llaniladigan sonli integrallash usullari tahlil qilingan. Eyler, takomillashtirilgan Eyler, Runge–Kutta va Adams usullarining matematik asoslari, aniqligi hamda yaqinlashuv xossalari yoritilib, amaliy misollar asosida jadval va grafiklar orqali natijalar taqqoslangan.

Kalit so'zlar: Oddiy differensial tenglama, sonli integrallash, Eyler usuli, Runge–Kutta usuli, Adams usuli, matematik modellashtirish.

Kirish

Oddiy differensial tenglamalar sistemalari real jarayonlarni matematik modellashtirishda asosiy vositalardan biri hisoblanadi. Mexanikada jismlarning harakati, fizika va elektrotexnikada jarayonlarning rivojlanishi, biologiyada populyatsiyalar dinamikasi, iqtisodiyotda esa o'sish modellarining barchasi differensial tenglamalar orqali ifodalanadi.

Ko'p hollarda bunday tenglamalar sistemalarining analitik yechimini topish imkonsiz yoki juda murakkab bo'ladi. Shu sababli amaliy masalalarda sonli integrallash usullaridan foydalaniladi. Sonli usullar yordamida tenglamalar sistemasining taxminiy yechimi berilgan aniqlikda hisoblab topiladi. Zamonaviy kompyuter texnologiyalari bu usullarni samarali qo'llash imkonini yaratdi.

Sonli integrallash masalasining umumiy qo'yilishi

Quyidagi ko'rinishdagi oddiy differensial tenglamalar sistemasi qoraladi:

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = f^1(t, x^1, x^2, \dots, x_n), \\ \frac{dx^2}{dt} = f^2(t, x^1, x^2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x^1, x^2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Boshlang'ich shartlar:

$$x^1(t^0) = x_1^0, \quad x^2(t^0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t^0) = x_n^0$$

sonli integrallashda $[t^0, T]$ oraliq h qadam bilan bo'linadi va yechim ketma-ket nuqtalarda aniqlanadi.

Eyler usuli sonli integrallashning eng sodda va tushunarli usuli bo'lib, birinchi tartibli aniqlikka ega. Usul differensial tenglamadagi hosila qiymatini joriy nuqtada o'zgarish deb hisoblash g'oyasiga asoslanadi.

$$x_i^{n+1} = x_i^n + h f_i(t^n, x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n)$$

bu yerda lokal xato $O(h^2)$, global xato esa $O(h)$, tartibda bo'ladi.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= x + t^2 \end{aligned}$$

boshlang'ich shartlar:

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Qadam: $h = 0.1$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(y_n - x_n^2), \\ y_{n+1} = y_n + h(x_n + t_n^2) \end{cases}$$

Takomillashtirilgan Eyler usuli ikki bosqichli bo'lib, oldindan taxmin va aniqlashtirish bosqichlaridan iborat. Usul Eyler usuliga nisbatan ancha yuqori aniqlikka ega.

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n + h f(t_n, x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^*)] \end{cases}$$

Misol:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \cdot y - t, \\ \frac{dy}{dt} &= x - y^2 \end{aligned}$$

boshlang'ich shartlar:

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Runge–Kutta usuli eng ishonchli va keng qo‘llaniladigan sonli usullardan biridir. Usul hosila qiymatlarini bir qadam ichida bir necha marta hisoblashga asoslangan.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k^1 + 2k^2 + 2k^3 + k^4)$$

Misol:

$$\frac{dy}{dt} = t + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1$$

$$k_1 = 0.1(0+1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1 \left(0.05 + 1 + \frac{0.1}{2} \right) = 0.105$$

$$k_3 = 0.1 \left(0.05 + 1 + \frac{0.105}{2} \right) = 0.10525$$

$$k_4 = 0.1(0.1 + 1 + 0.10525) = 0.120525$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2 \cdot 0.105 + 2 \cdot 0.10525 + 0.120525) \approx 1.10517$$

Lotka–Volterra modeli:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - x \cdot y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + x \cdot y$$

bu model yirtqich-o‘lja tizimini ifodalaydi.

Adams usullari ko‘p qadamli usullar bo‘lib, oldingi nuqtalardagi hosila qiymatlaridan foydalanadi. Ular yuqori aniqlikka ega va hisoblash tezligi bilan ajralib turadi.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3})$$

XULOSA: Maqolada oddiy differensial tenglamalar sistemalarini sonli integrallashning asosiy usullari chuqur o‘rganildi. Nazariy tahlil va murakkab amaliy misollar shuni ko‘rsatdiki, Eyler usuli soddaligi bilan ajralib tursa-da, aniqlik

jihatidan Runge–Kutta va Adams usullari ustunlikka ega. Sonli integrallash usullari murakkab matematik modellarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Axmedov M. *Sonli usullar*. Toshkent, 2010.
2. Alimuhamedov Sh.A. *Oddiy differensial tenglamalar*. Toshkent, 2012.
3. Islomov T. *Differensial tenglamalarni sonli yechish usullari*. Toshkent, 2015.
4. Qodirov R. *Matematik modellashtirish va sonli usullar*. Toshkent, 2017.
5. Samarskiy A.A. *Chislennye metody*. Moskva, 2001.
6. Burden R., Faires J. *Numerical Analysis*. Boston, 2011.
7. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Berlin, 2008.
8. Süli E., Mayers D. *Numerical Analysis*. Cambridge, 2003.
9. Gerald C. *Applied Numerical Analysis*. New York, 2004.
10. Butcher J.C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Chichester, 2008.