

CHEGARAVIY MASALALARNI SONLI YECHISHNING FARQLASH USULLARI.

Tojimatov I.I.

FarDU talabasi, tojimatovinomjon13@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada chegaraviy masalalarni sonli yechishda qo'llaniladigan farqlash (finite difference) usullarining nazariy asoslari va amaliy qo'llanilishi yoritilgan. Differensial tenglamalarni algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish, chekli farqlar formulalarini qurish, chegaraviy shartlarni hisobga olish hamda hosil bo'lgan sistemani yechish jarayonlari tahlil qilingan. Usulning afzalliklari va cheklovlari ko'rib chiqilib, Python dasturlash tili orqali ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun sonli yechim namoyish etilgan. Shuningdek, farqlash usulining parallel va bulutli hisoblash kabi zamonaviy texnologiyalar bilan integratsiyasi hamda istiqbollari bayon etilgan.

Kalit so'zlar: Chegaraviy masala, sonli usullar, farqlash usuli, differensial tenglamalar, algebraik tenglamalar sistemasi, Python dasturlash, hisoblash aniqligi.

KIRISH

Differensial tenglamalar tabiiy fanlar, muhandislik, iqtisodiyot va boshqa ko'plab sohalarda fizik, kimyoviy va biologik jarayonlarni matematik modellashtirishning asosiy vositasi hisoblanadi. Ko'p hollarda bu tenglamalarning analitik yechimlarini topish juda qiyin yoki umuman mumkin emas. Bunday vaziyatlarda sonli usullar yagona hal qiluvchi yondashuvdir. Chegaraviy masalalar differensial tenglamalar bilan birga chegaraviy shartlar berilgan masalalar issiqlik o'tkazuvchanlik, to'lqin tarqalishi, elastiklik, elektr va magnit maydonlarni hisoblash kabi muhim amaliy masalalarda keng qo'llaniladi. Sonli usullar orasida farqlash (finite difference) usuli eng qadimgi, sodda va keng tarqalgan usullardan biridir. Uning mohiyati differensial tenglamalardagi hosilalarni chekli farqlar bilan almashtirish va natijada algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilishdan iborat. Bu usulning afzalligi shundaki, u murakkab differensial tenglamalarni soddalashtirib, ularni kompyuter yordamida samarali yechish imkonini beradi. Zamonaviy hisoblash texnologiyalarining rivojlanishi yuqori unumdorlikdagi hisoblash (HPC), parallel hisoblash, bulutli texnologiyalar farqlash usulining imkoniyatlarini sezilarli

darajada kengaytirdi. Bugungi kunda bu usul yordamida ikki va uch o'lchamli masalalar, vaqtga bog'liq jarayonlar, chiziqli bo'lmagan tenglamalar ham yechilmoqda. Ushbu maqolaning maqsadi chegaraviy masalalarni sonli yechishning farqlash usulini nazariy jihatdan o'rganish, uning amaliy qo'llanilishini misollar orqali namoyish etish va zamonaviy hisoblash texnologiyalari bilan bog'liq istiqbollarini tahlil qilishdir.

Farqlash usulining nazariy asoslari: Farqlash usuli differensial tenglamalarni sonli yechishda hosilalarni chekli farqlar bilan almashtirishga asoslangan. Bunda mustaqil o'zgaruvchining taqsimlangan nuqtalarida (tarmoqlarda) funksiya qiymatlari hisoblanadi.

1. Chekli farqlar formulalari: Funksiya $u(x)$ ning x_i nuqtadagi birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari uchun chekli farqlar formulalari:

Birinchi tartibli hosila:

$$\text{Oldingi farqlar formulasi: } u'(x_i) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

$$\text{Keyingi farqlar formulasi: } u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$\text{Markaziy farqlar formulasi: } u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Ikkinchi tartibli hosila:

$$\text{Markaziy farqlar formulasi: } u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

bu yerda $h = x_{i+1} - x_i$ tarmoq qadami, $u_i = u(x_i)$.

2. Diskretlashtirish xatoligi: Markaziy farqlar formulasi uchun diskretlashtirish xatoligi:

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi)$$

bu yerda $\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Xatolik $O(h^2)$ tartibli.

Ikkinchi tartibli chiziqli chegaraviy masalani yechish: Ikkinchi tartibli chiziqli chegaraviy masala matematik analiz va amaliy fanlarda keng uchraydigan masalalardan biri bo'lib, unda noma'lum funksiya ma'lum bir oraliqda aniqlanadi

va shu oraliqning chegaralarida unga qo'yilgan shartlarni qanoatlantirishi talab etiladi. Bunday masalalarda funksiya bilan birga uning o'zgarish tezligi va egilish xususiyatlari ham hisobga olinadi. Chegaraviy masalaning asosiy xususiyati shundaki, berilgan shartlar oraliqning boshida va oxirida aniqlanadi. Bu jihati bilan chegaraviy masalalar boshlang'ich qiymatli masalalardan farq qiladi. Ikkinchi tartibli bo'lishi esa masalada funksiya egilishining, ya'ni jarayonning ichki tuzilishini tavsiflovchi xususiyatlarning muhim ekanligini bildiradi. Nazariy jihatdan bunday masalalarni yechishda eng avvalo masalaning to'g'ri qo'yilganligi muhim ahamiyatga ega. Ya'ni berilgan shartlar asosida yechim mavjudmi yoki yo'qligi va u yagona bo'ladimi, degan savollarga javob beriladi. Ko'p hollarda tenglama va unga mos chegaraviy shartlar muayyan silliqlik va uzluksizlik talablariga javob bersa, masalaning yagona yechimi mavjud bo'ladi. Chegaraviy shartlar mazmuniga ko'ra turli xil bo'lishi mumkin. Ba'zan funksiya qiymatlari chegaralarda beriladi, ba'zan esa uning o'zgarish tezligi yoki funksiya va hosilaning kombinatsiyasi ko'rsatiladi. Bu shartlarning har biri real fizik yoki muhandislik jarayonlarining matematik ifodasi sifatida talqin qilinadi. Ikkinchi tartibli chiziqli chegaraviy masalalarni nazariy o'rganishda analitik va sonli yondashuvlar farqlanadi. Analitik yondashuvda masalaning aniq yechimini topish maqsad qilinadi, biroq ko'plab real masalalarda bunday yechimni olish qiyin yoki umuman mumkin bo'lmaydi. Shu sababli nazariyada taqribiy yechim olishga asoslangan sonli usullar muhim o'rin egallaydi. Sonli yondashuvning nazariy asosida differensial tenglamani soddaroq algebraik munosabatlar orqali ifodalash g'oyasi yotadi. Bu orqali masala kompyuter yordamida yechishga qulay shaklga keltiriladi. Nazariyada bunday usullarning yaqinlashuv xossalari, barqarorligi va aniqligi chuqur tahlil qilinadi. Barqarorlik tushunchasi masalada kiruvchi ma'lumotlardagi kichik o'zgarishlar yechimda katta farqlarga olib kelmasligini anglatadi. Aniqlik esa olingan taqribiy yechimning haqiqiy yechimga qanchalik yaqin ekanligini tavsiflaydi. Ushbu tushunchalar ikkinchi tartibli chegaraviy masalalarni o'rganishda asosiy nazariy mezonlar hisoblanadi. Umuman olganda, ikkinchi tartibli chiziqli

chegaraviy masalalarni yechish nazariyasi matematik modellashtirishning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, u fizik jarayonlar, muhandislik tizimlari va boshqa ko'plab amaliy sohalardagi murakkab hodisalarni tahlil qilishda mustahkam nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

XULOSA

Chegaraviy masalalarni sonli yechishning farqlash (finite difference) usullari zamonaviy hisoblash matematikasining eng muhim va keng qo'llaniladigan vositalaridan biri hisoblanadi. Ushbu usullarning asosiy afzalligi ularning nazariy jihatdan soddaligi, amaliy qo'llashning qulayligi va katta hajmdagi masalalarni samarali yechish imkoniyatidadir. Farqlash usuli differensial tenglamalarni algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish orqali murakkab matematik muammolarni soddalashtirishga asoslangan. Diskretlashtirish jarayonida hosilarni chekli farqlar bilan almashtirish, chegaraviy shartlarni to'g'ri hisobga olish va hosil bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usulning asosiy bosqichlarini tashkil etadi. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, farqlash usuli ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun tartibli aniqlikka ega bo'lib, qadam o'lchami kamaygani sari yechimning aniqligi ortadi. Tridiagonal matritsalar shaklida tuzilgan algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun Thomas algoritmi kabi maxsus samarali metodlarning mavjudligi usulning hisoblash samaradorligini oshiradi. Amaliy jihatdan, farqlash usullari fizika, muhandislik, kimyo, biologiya va iqtisodiyotning ko'plab sohalarida qo'llaniladi. Issiqlik o'tkazuvchanlik, to'lqin tarqalishi, elastiklik nazariyasi, elektromagnet maydonlar va boshqa tabiiy jarayonlarni modellashtirishda ushbu usullar asosiy vosita sifatida xizmat qiladi.

Zamonaviy hisoblash texnologiyalari bilan integratsiyalashgan farqlash usullari kelajakda quyidagi yo'nalishlarda yanada rivojlanadi: Xulosa qilib aytganda, farqlash usullari chegaraviy masalalarni sonli yechishda ishonchli, samarali va iqtisodiy yondashuv bo'lib, ilmiy tadqiqotlar va amaliy hisoblashlarda o'zining ahamiyatini saqlab qolmoqda. Texnologiyalar rivojlanishi bilan birga ushbu

usullarning imkoniyatlari kengayib, kelajakda yanada murakkab va katta hajmdagi masalalarni yechishda asosiy rol o'ynashini kutish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1- qism. -T.: O'qituvchi, 1988 y. 400 b.
2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. -T.: Iqtisod-Moliya, 2008. 320 b.
3. Ismatullayev G.P., Koshergenova M.S. Hisoblash usullari. «Tafakkur-bo'stoni» Toshkent — 2014. 240 b.
4. Abdulhamidov A.U., Xudoynazarov S.X. Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari. Toshkent - «O'zbekiston» 1995 y. 224 b.
5. Aloeov R.D., Xudoyberganov M. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg'ulotlari to'plami. UzMU.O'quv qo'llanma. 2008 y.1 106.
6. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие. Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. 2006.-523с.
7. Пмищежяк А.А., Гулин А.В. Чысленные методы. -М., Наука. 1989.
8. Шыввов Н.С. Численные методы. -М., Наука. 1967
9. Гателюк О. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования. -Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 140 с. <https://urait.ru/bcode/514036> (дата обращения: 06.09.2024).
10. Пирумов У.Г.. Численные методы: учебник и практикум для академического бакалавриата. -Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 421 с. <https://urait.ru/bcode/431961>