

ISSIQLIK ALMASHINUVI JARAYONLARINI AYNIGAN YADROLI INTEGRAL TENGLAMALAR ASOSIDA HIBRID ANALITIK–SONLI MODELLASHTIRISH

Muhammadvaliyeva M.Z.

FarDU talabasi, mohichehramuhammadvaliyeva@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada issiqlik almashinuvi jarayonlarini aynigan yadroli integral tenglamalar yordamida gibrid analitik–sonli usulda modellashtirish ko‘rib chiqiladi. Tadqiqotda analitik yechimlarning aniqligi va sonli modellashtirishning moslashuvchanligi birlashtirilib, murakkab issiqlik almashinuvi tizimlarida parametrlarning ta’siri va jarayonlarning dinamikasi tahlil qilinadi. Taklif etilgan yondashuv ilmiy yangilik sifatida murakkab integral tenglamalarni yechishda yuqori aniqlik va hisoblash samaradorligini ta’minlaydi.

Kalit so‘zlar: issiqlik almashinuvi, integral tenglamalar, gibrid analitik–sonli modellashtirish, murakkab tizimlar.

KIRISH

Hozirgi kunda issiqlik almashinuvi jarayonlarini chuqur va aniq modellashtirish masalalari amaliy matematika, fizika hamda muhandislik fanlarining muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Issiqlik uzatilishi bilan bog‘liq jarayonlar energetika, materialshunoslik, texnologik qurilmalar va sanoat tizimlarida keng uchrab, bu jarayonlarning to‘g‘ri matematik tavsifi tizimlarning samaradorligi va barqarorligini ta’minlashda muhim rol o‘ynaydi. Ko‘plab real fizik jarayonlarda issiqlikning ma’lum bir nuqtadagi qiymati nafaqat lokal ta’sirlarga, balki butun muhit bo‘ylab taqsimlangan global holatlarga ham bog‘liq bo‘ladi.

Bunday holatlarni modellashtirishda integral tenglamalar, xususan, Fredholm tipidagi integral tenglamalar muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, yadro ajraluvchi (aynirah) ko‘rinishga ega bo‘lgan integral tenglamalar ko‘plab amaliy masalalarda uchraydi va ular matematik tahlil nuqtai nazaridan qulay xossalarga ega. Aynigan yadroli integral tenglamalar yordamida murakkab jarayonlarni soddalashtirilgan, ammo mazmunan to‘liq modellar orqali ifodalash imkoniyati mavjud.

Shu bilan birga, real issiqlik almashinuvi jarayonlarida model parametrlari tajribaviy ma’lumotlar asosida aniqlanadi va analitik yechimlarni to‘liq ko‘rinishda

olish har doim ham mumkin bo'lavermaydi. Bu holat analitik va sonli usullarni birlashtirgan gibrid yondashuvlarga ehtiyojni yuzaga keltiradi. Gibrid analitik–sonli modellashtirish usullari modelning nazariy asoslanganligini saqlagan holda, hisoblash jarayonini amaliy jihatdan samarali amalga oshirish imkonini beradi.

Mazkur ishda issiqlik almashinuvi jarayonlarini tavsiflovchi aynigan yadroli integral tenglama ko'rib chiqilib, uning analitik yechimi olinadi hamda ushbu yechim gibrid analitik–sonli modellashtirish uchun tayanch model sifatida talqin qilinadi. Taklif etilgan yondashuv issiqlik jarayonlarida lokal va global ta'sirlarni bir vaqtda hisobga olish imkonini berishi bilan ajralib turadi.

Integral tenglamalar deb, odatda, nom'lum funksiya integral ishorasi ostida bo'lgan tenglamalarga aytiladi.

Nazariy qism. Biz bu bo'limda noma'lum funksiya chiziqli ishtirok etgan tenglamalarni, ya'ni ushbu

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (1)$$

Ko'rinishdagi chiziqli integral tenglamalarni tekshiramiz. Bu yerda $\varphi(x)$ – noma'lum funksiya, $K(x, y)$ va $f(x)$ funksiyalar mos ravishda $\{a \leq x \leq b\}$ kvadratda va $a \leq x \leq b$ oraliqda aniqlangan funksiyalar (a, b - o'zgarmas sonlar). Bu kvadrat va oraliqni asosiy kvadrat va asosiy oraliq deb yuritiladi.

$f(x)$ funksiya (1) integral tenglamaning ozod hadi, $K(x, y)$ uning yadrosi, λ sonli ko'paytuvchi tenglamaning parametri deyiladi.

Qayd qilib o'tamizki, (1) bitta integral tenglama bo'lmay, balki sonli λ parametrga bog'liq bo'lgan integral tenglamalar oilasidir. Agar $\lambda K(x, y)$ ko'paytmani $K_I(x, y)$ bilan belgilab, $K_I(x, y)$ ni yangi yadro deb qarasak, u holda tenglamaning parametri 1 ga teng bo'lib qoladi. Lekin, λ parametrni kiritish integral tenglamalarni o'rganishda foydali bo'lishiga keyinchalik biz ishonch hosil qilamiz. (1) integral tenglama ikkinchi tur chiziqli integral tenglama yoki bunday

tenglamalarni birinchi bo‘lib o‘rgangan matematik nomi bilan Fredgolm integral tenglamasi deyiladi.

Agar $f(x) \equiv 0$ bo‘lsa, ya'ni

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (2)$$

tenglama (1) ga mos bo‘lgan bir jinsli integral tenglama deyiladi.

Bir jinsli

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \psi(y) dy = 0 \quad (3)$$

tenglama (2) bir jinsli tenglamaga qo‘shma integral tenglama deyiladi. Fredgolmning birinchi tur tenglamasi deb,

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (4)$$

ko‘rinishdagi integral tenglamaga aytiladi.

Fredgolm tenglamalarida yadro va ozod had mos ravishda asosiy kvadrat va asosiy oraliqda uzluksiz, yoki ushbu

$$\int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2 dx dy < +\infty \quad (5)$$

$$\int_a^b [f(x, y)]^2 dx < +\infty \quad (6)$$

shartlarni qanoatlantiradi, deb hisoblanadi. Ravshanki, $K(x, y)$ yadro $\{(x, y) : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ kvadratda uzluksiz bo‘lsa, (5) shart bajariladi. (5) shartni qanoatlantiruvchi yadrolar Fredgolm yadrosi deb ataladi.

Agar ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasining umumiy yechimi $\phi(x)$ mavjud bo‘lsa, u

$$\phi(x) = \varphi^0(x) + \varphi(x)$$

ko‘rinishga ega bo‘lishini tekshirib ko‘rish qiyin emas, bunda $j^0(x)$ (2) tenglamaning umumiy yechimi, $j(x)$ esa (1) tenglamaning xususiy yechimidir.

Haqiqatan ham, agar $\phi(x)$ va $\varphi(x)$ mos ravishda bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari bo'lsa, ularning ayirmasi $\varphi^0(x) = \phi(x) - \varphi(x)$ (2) tenglamaning yechimi bo'ladi. Bundan darhol yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

Endi issiqlik almashinuvi jarayonlarini aynigan yadroli integral tenglamalar asosida gibril analitik–sonli modellashtiramiz.

Asosiy qism. Issiqlik almashinuvi jarayonini modellashtirishda ko'pincha shunday holatlar uchraydiki, tizimning ma'lum bir nuqtadagi holati butun soha bo'yicha issiqlik taqsimotiga bog'liq bo'ladi. Bunday jarayonlarni matematik jihatdan ifodalash uchun integral tenglamalardan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi. Ushbu ishda quyidagi ko'rinishdagi integral tenglama asosiy model sifatida qoraladi:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (1 + xy)\varphi(y)dy = x^2$$

Bu yerda $\varphi(x)$ issiqlik jarayonining izlanayotgan xarakteristik funksiyasi, x^2 tashqi issiqlik manbasini ifodalovchi funksiya, λ esa muhitning issiqlik almashinuvi intensivligini tavsiflovchi parametrdir.

Integral tenglamaning yadrosi $K(x, y) = 1 + xy$ ko'rinishda bo'lib, u ajraluvchi hadlar yig'indisidan iborat.

Yuqoridagi tenglama aynigan yadroli Fredholm integral tenglamasi bo'lib, uni chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin.

$$A = \int_0^1 \varphi(y)dy, B = \int_0^1 y\varphi(y)dy$$

u holda integral quyidagicha yoziladi:

$$\int_0^1 (1 + xy)\varphi(y)dy = A + xB.$$

Berilgan tenglamadan $\varphi(x)$ ni aniqlaymiz:

$$\varphi(x) = x^2 + \lambda(A + xB).$$

Bu ifoda noma'lum funksiya qanday ko'rinishda ekanini aniq ko'rsatadi.

$$A = \int_0^1 (x^2 + \lambda A + \lambda x B) dx = \frac{1}{3} + \lambda A + \frac{\lambda}{2} B,$$

$$B = \int_0^1 x(x^2 + \lambda A + \lambda x B) dx = \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2} A + \frac{\lambda}{3} B.$$

Natijada quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} (1 - \lambda)A - \frac{\lambda}{2}B = \frac{1}{3}, \\ -\frac{\lambda}{2}A + (1 - \frac{\lambda}{3})B = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

bu sistemaning determinanti

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda), -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2}, (1 - \frac{\lambda}{3}) \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \frac{\lambda}{3}) - \frac{1}{4}\lambda^2 = \frac{\lambda^2 - 16\lambda + 12}{12} \neq 0.$$

Demak, avvalgi sistema yagona yechimga ega bo'ladi

Sistemani yechib, quyidagi qiymatlar olinadi:

$$A = \frac{3 - \lambda}{\lambda^2 - 16\lambda + 12}, B = \frac{24 + \lambda}{6(\lambda^2 - 16\lambda + 12)}.$$

bularni izlanayotgan noma'lum funksiyaning ifodasiga qo'yib, berilgan tenglamaning yechimini

$$\varphi(x) = x^2 + \frac{\lambda(3 - \lambda)}{\lambda^2 - 16\lambda + 12} + \frac{\lambda(24 + \lambda)}{6(\lambda^2 - 16\lambda + 12)}x$$

ko'rinishda topamiz, bu yerda $\lambda^2 - 16\lambda + 12 \neq 0$ sharti bajarilganda yechim yagona bo'ladi.

Olingan analitik yechim issiqlik almashinuvi jarayonining asosiy xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Jumladan, temperatura taqsimoti tashqi issiqlik manbasi bilan bir qatorda muhitning global issiqlik holatiga chiziqli

bog‘langanligi ko‘rinadi. Ushbu analitik ifoda gibrid analitik–sonli modellashtirish uchun tayanch model vazifasini bajaradi.

Amaliy masalalarda integral hadlarni aniq hisoblash har doim ham mumkin bo‘lavermaydi, chunki real sharoitda temperatura qiymatlari diskret nuqtalarda o‘lchanadi. Shu sababli analitik yechim sonli usullar bilan uyg‘unlashtiriladi. Xususan, integral hadlar kvadratura formulalari yordamida taxminan hisoblanadi, parametr λ esa tajribaviy ma’lumotlar asosida aniqlanadi. Bu jarayonda analitik yechim modelning barqarorligini va strukturaviy to‘g‘riligini ta’minlasa, sonli yondashuv real issiqlik jarayonlarini hisoblash va prognozlash imkonini beradi.

Taklif etilgan gibrid analitik–sonli modellashtirish yondashuvi issiqlik almashinuvi jarayonlarini soddalashtirilgan integral model asosida yuqori aniqlik bilan o‘rganish imkonini beradi. Ushbu yondashuvning muhim afzalligi shundaki, u lokal va global issiqlik ta’sirlarini bir vaqtning o‘zida hisobga olib, murakkab fizik jarayonlarni matematik jihatdan barqaror va hisoblashga qulay ko‘rinishda ifodalash imkonini beradi.

Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, aynigan yadroli integral tenglamalar issiqlik almashinuvi jarayonlarini modellashtirishda samarali matematik apparat hisoblanadi. Analitik yechimning mavjudligi va yagonalik shartining aniqlanishi modelning nazariy asoslanganligini ta’minlaydi, gibrid analitik–sonli yondashuv esa real fizik jarayonlarga moslashish imkonini beradi. Taklif etilgan model va yondashuv issiqlik almashinuvi bilan bog‘liq amaliy masalalarni yechishda qo‘llanishi mumkin bo‘lgan universal metod sifatida qaraladi.

XULOSA

Ushbu ishda issiqlik almashinuvi jarayonlarini modellashtirish masalasi aynigan yadroli integral tenglama yordamida ko‘rib chiqildi. Integral tenglama yadrosining ajraluvchi xossaga ega ekanligi aniqlanib, masala analitik jihatdan yechildi hamda yechimning mavjudligi va yagonaligi uchun yetarli shartlar keltirildi. Olingan analitik yechim issiqlik jarayonining asosiy xususiyatlarini,

xususan, temperatura taqsimotining tashqi manba va muhitning global holatiga bog‘liqligini aniq ifodalab berdi.

Ishda taklif etilgan gibrid analitik–sonli modellashtirish yondashuvi analitik yechimning nazariy asoslanganligini saqlagan holda, real jarayonlarda uchraydigan diskret ma’lumotlar bilan ishlash imkonini beradi. Bu yondashuv issiqlik almashinuvi jarayonlarini hisoblashda aniqlik va barqarorlikni ta’minlab, murakkab fizik tizimlarni soddalashtirilgan, ammo ishonchli matematik model orqali tahlil qilishga imkon yaratadi. Olingan natijalar issiqlik almashinuvi bilan bog‘liq amaliy masalalarni yechishda, shuningdek, integral tenglamalar asosidagi gibrid modellashtirish usullarini rivojlantirishda samarali qo‘llanilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov, M.I. Hisoblash metodlari. Toshkent, O‘qituvchi, 2003.
2. Salohiddinov M. Integral tenglamalar. Toshkent, 2007.
3. Krylov V. I. Sonli usullar. Moskva, 1986.
4. Incropera, F. P., & DeWitt, D. P. (2007). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* (6th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
5. Özisik, M. N. (1993). *Heat Conduction* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.
6. Carslaw, H. S., & Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids* (2nd ed.). Oxford: Clarendon Press.