

MUVOZANAT VA TURG‘UNLIK MASALALARIGA DOIR MASALALARNI MODELLASHTIRISH

Sharofutdinov I.U., Muhammadvaliyeva M.Z.

FarDU katta o‘qituvchisi, p.f.f.d.(PhD). Iqbol0766@gmail.com

FarDU talabasi. mohichehramuhammadvaliyeva@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada dinamik tizimlarda muvozanat va turg‘unlik masalalarining nazariy asoslari, ularni matematik modellash tirish usullari hamda Lyapunov yondashuvining amaliy qo‘llanilishi tahlil qilinadi. Muvozanat nuqtalarining tizim harakatiga ta’siri, turg‘unlikning turli darajalari va ularni aniqlash mezonlari ilmiy jihatdan asoslab beriladi. Olingan natijalar matematik modellar yordamida fizik, iqtisodiy, ekologik va texnik tizimlarning barqarorligini baholashning dolzarbligini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar: muvozanat, turg‘unlik, dinamik tizim, Lyapunov nazariyasi, nolinear tenglamalar, matematik modellash tirish, barqarorlik mezonlari.

Zamonaviy ilm-fan va texnika taraqqiyotida murakkab jarayonlarni matematik modellash tirish asosiy tadqiqot vositalaridan biriga aylandi. Fizika, biologiya, kimyo, iqtisodiyot, ekologiya, muhandislik hamda texnologik tizimlarda kuzatiladigan ko‘plab jarayonlar vaqt o‘tishi bilan o‘zgaruvchi dinamik tizimlar sifatida qaraladi. Ushbu tizimlarning asosiy xususiyati shundaki, ular turli tashqi va ichki omillar ta’sirida muvozanat holatiga intilishi yoki undan chetlashi mumkin. Tizimning muvozanati va uning turg‘unligini aniqlash esa jarayonlarning barqaror ishlashi, uzoq muddatli rivojlanishning kafolatlanishi va boshqaruv samaradorligi uchun hal qiluvchi ahamiyatga egadir.

Matematik modellash tirishda “muvozanat” tushunchasi odatda tizimning o‘zgarmas yoki barqaror holati sifatida ta’riflanadi. Masalan, fizikada jismning kuchlar ta’siri ostida muvozanatga kelishi, biologiyada populyatsiyalarning tabiiy barqaror soni, iqtisodiyotda esa talab va taklifning tenglashuvi muvozanat holatiga misol bo‘la oladi. Bunday holatlarning matematik tavsifi ko‘pincha differensial tenglamalar, farqli tenglamalar yoki boshqa dinamik modellar orqali ifodalanadi. Tizimning muvozanat nuqtalarini aniqlash uning kelajakdagi holatini bashorat qilish, nazorat qilish va optimallashtirish uchun fundamental ahamiyatga ega.

Tizimning faqat muvozanatga ega bo'lishi yetarli emas; muvozanatning turg'unligi – ya'ni kichik tashqi ta'sirlar ostida tizimning yana o'sha holatga qayta olishi – eng muhim omildir. Turg'unlik nazariyasi klassik Lyapunov g'oyalari asosida shakllangan bo'lib, u nafaqat chiziqli, balki nochiziqli tizimlar barqarorligini ham baholash imkonini beradi. Turg'unlikni o'rganish orqali tizimlarning qanday sharoitda barqaror ishlashi, qaysi parametrlar uning nozikligini oshirishi yoki aksincha, barqarorlashtirishi aniqlanadi.

Bugungi kunda muvozanat va turg'unlik masalalari energetika tizimlarida, ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlarda, ekologik muvozanat modellarida, biomedikal tizimlarda, robototexnika va boshqaruv nazariyasida keng qo'llanilmoqda. Ayniqsa, nochiziqli va ko'p omilli tizimlarning ko'payib borishi ushbu masalalarning yanada dolzarblashtirishiga sabab bo'lmoqda.

Ushbu maqolaning asosiy maqsadi – turli matematik modellar misolida muvozanat holatlarini aniqlash, ularning turg'unligini baholash, Lyapunov va chiziqlashtirish usullari yordamida barqarorlik shartlarini ilmiy asosda tadqiq qilishdan iborat. Shuningdek, modellarning amaliy talqinlari orqali nazariy natijalarning real jarayonlarga tatbiq imkoniyatlari ko'rib chiqiladi.

Muvozanatning matematik talqini: Matematik modellashtirishda muvozanat tushunchasi tizimning vaqt o'tishi bilan o'zgarishsiz yoki barqaror holatga kelishini ifodalaydi. Agar tizimni n -o'zgaruvchili differensial tenglamalar orqali ifodalasak,

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in R^n$$

unda muvozanat nuqtasi x^* shunday nuqta bo'lib, u yerda tizim o'zgarishsiz qoladi, ya'ni $f(x^*) = 0$. Ushbu nuqta tizimning ichki va tashqi omillarga nisbatan barqarorligini aniqlashda markaziy ahamiyatga ega bo'ladi. Chiziqli tizimlarda muvozanat nuqtalari ko'pincha analitik yechim orqali aniqlanadi, lekin nochiziqli tizimlarda yechimning mavjudligi va tabiati ko'pincha Lyapunov funksiyalari, chiziqlashtirish usuli yoki sonli modellashtirish orqali baholanadi.

Muvozanat masalalari turli sohalarda keng qo'llaniladi. Fizik tizimlarda, masalan, elastik jismning muvozanat holati unga ta'sir etuvchi kuchlar va momentlarning natijasida aniqlanadi. Biologiyada populyatsiyalar soni va ekologik tizimlar barqaror holatga intiladi, bunda Lotka–Volterra modeli predator va prey populyatsiyalarining muvozanat nuqtalarini ifodalaydi. Iqtisodiyotda esa talab va taklifning tenglashuvi, bozor muvozanati va resurslar taqsimotining barqarorligi matematik nuqtai nazardan muvozanat nuqtalari bilan tavsiflanadi.

Muvozanat nuqtasining mavjudligi yetarli shart bo'lsa-da, uning turg'unligi tizimning haqiqiy barqaror ishlashini belgilaydi. Turg'unlikni baholash uchun tizim x^* yaqinida chiziqlashtiriladi:

$$x' = A(x - x^*), \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*},$$

bu yerda A – Yakobi matrica (Jacobian). Matrikaning egenqiymatlari tizimning muvozanat nuqtasining barqarorligini belgilaydi. Agar barcha egenqiymatlar manfiy haqiqiy qismga ega bo'lsa, nuqta asimptotik turg'un, agar ba'zilar musbat bo'lsa, nuqta turg'un emas, haqiqiy qismlari nol bo'lsa, nuqta neytral turg'un hisoblanadi. Ushbu yondashuv tizimning dinamik xatti-harakatini aniqlash va turli parametrlar ostida barqarorlikni bashorat qilish imkonini beradi.

Muvozanat nuqtalarini aniqlash va ularning turg'unligini baholash nafaqat nazariy qiziqish, balki amaliy jihatdan ham katta ahamiyatga ega. Masalan, energetika tizimlarida barqaror muvozanat nuqtasini aniqlash elektr stansiyalarining xavfsiz ishlashini ta'minlaydi, ekologik tizimlarda esa populyatsiyalarni barqaror saqlash choralarini ishlab chiqish mumkin. Shuningdek, iqtisodiy modellarni tahlil qilish orqali bozor barqarorligini va moliyaviy risklarni oldindan baholash imkoniyati yaratiladi.

Shu tariqa, matematik modellashtirishda muvozanat tushunchasi tizimning kelajakdagi holatini prognoz qilish, nazorat qilish va boshqaruv strategiyalarini ishlab chiqishda fundamental ahamiyatga ega bo'lib, turg'unlik nazariyasi bilan birgalikda tizimning barqaror ishlashini ilmiy asosda ta'minlashga imkon beradi.

Turg'unlik nazariyasining asosiy tamoyillari: Tizimlarning uzoq muddat davomida barqaror ishlashi, tashqi ta'sirlarga berilgan javobi, muvozanat holatiga qaytish yoki undan uzoqlashish xususiyatlarini o'rganish turg'unlik nazariyasining asosiy vazifasidir. Matematik modellashirishda turg'unlik, avvalo, muvozanat nuqtasining kichik buzilishlar ostida o'z holatini saqlab qolish-qolmasligi bilan belgilanadi. Agar tizimning boshlang'ich holati muvozanat nuqtasiga yaqin bo'lsa va vaqt o'tishi bilan uning traektoriyasi yana shu nuqtaga qaytsa, bunday muvozanat asimptotik turg'un deyiladi. Aksincha, systema kichik buzilishdan so'ng asta-sekin muvozanatdan uzoqlashsa, u turg'un emas deb hisoblanadi.

Turg'unlikni tadqiq qilishning eng qudratli va umumlashtiruvchi usullaridan biri Lyapunov nazariyasidir. Lyapunov g'oyasiga ko'ra, tizimning turg'unligini bevosita differensial tenglamalarning yechimini topmasdan ham aniqlash mumkin; buning uchun mos keluvchi maxsus funksiya – Lyapunov funksiyasini topish kifoya. Ushbu funksiya $V(x)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak: u muvozanat nuqtasida nolga teng bo'lib, yaqin nuqtalarda musbat qiymatga ega bo'lsin va vaqt bo'yicha hosilasi $V'(x)$ manfiy bo'lsin. Agar $\frac{dV}{dt} < 0$ sharti bajarilsa, tizimning muvozanat nuqtasi asimptotik turg'unligiga ishora qiladi. Bu usulning afzalligi shundaki, u nochiziqli tizimlar uchun ham qo'llanilishi mumkin va tizimning umumiy xatti-harakatiga ega bo'lgan baho beradi.

Turg'unlikni baholashning yana bir muhim yondashuvi chiziqlashtirish usulidir. Tizim muvozanat nuqtasi atrofida Taylor qatori orqali chiziqli shaklga keltiriladi va Yakobi matritsaning egenqiymatlari tahlil qilinadi. Agar barcha egenqiymatlarning haqiqiy qismlari manfiy bo'lsa, muvozanat asimptotik turg'un; agar hech bo'lmaganda biri musbat bo'lsa, tizim turg'un emas; agar ba'zi egenqiymatlar nol haqiqiy qismga ega bo'lsa, qo'shimcha tahlil talab etiladi. Bu yondashuv chiziqli tizimlar uchun to'liq, nochiziqli tizimlar uchun esa lokal barqarorlik bahosini beradi.

Fazoviy portretlar va trayektoriya tahlili ham turg'unlikni ko'rib chiqishda muhim rol o'ynaydi. Tizimning fazoviy fazosida trayektoriylarning muvozanat nuqtasi atrofidagi xatti-harakati tizimning barqarorligi haqida intuitiv va chuqur tasavvur beradi. Spiral manbalar, spiral cho'kuvchilar, tugunlar va markazlar kabi fazoviy tuzilmalar muvozanatning turli sifatlarini ifodalaydi.

Turg'unlik nazariyasining amaliy ahamiyati nihoyatda keng. Energetika tizimlarida elektr tarmoqlarining barqarorligi, ekologik modellar orqali populyatsiyalar o'sishining nazorati, iqtisodiy tizimlarda bozor barqarorligini ta'minlash, robototexnika va avtomatik boshqaruv tizimlarida izchil harakatni kafolatlash kabi jarayonlar aynan turg'unlik tahliliga asoslanadi. Tizimning barqaror yoki nobarqaror bo'lishi uning real ishlash qobiliyatini belgilab, parametrlarni mos ravishda tanlash yoki boshqaruv mexanizmlarini optimallashtirish zaruratini keltirib chiqaradi.

Shunday qilib, turg'unlik nazariyasi tizim xatti-harakatining sifat tahlilini beruvchi eng qudratli matematik yo'nalishlardan biri bo'lib, nafaqat nazariy, balki amaliy masalalarni hal etishda ham hal qiluvchi o'rin tutadi. Lyapunov usullari, chiziqlashtirish texnikasi va fazoviy portretlar yordamida tizimlarning barqarorligini baholash hozirgi zamonaviy matematik modellashtirishning ajralmas qismiga aylangan.

Muvozanat va turg'unlikning matematik modellar misolida tahlili: Muvozanat va turg'unlik tushunchalarining mazmuni real matematik modellar orqali yanada aniqroq yoritiladi. Dinamik tizimlar turli fanlarda turlicha ko'rinishlarda uchrashi mumkin, ammo ularning barchasida muvozanat nuqtalarini aniqlash va ularning barqarorligini baholash umumiy metodologik asosga ega. Quyida uch asosiy model – bir o'zgaruvchili oddiy differensial tenglama, ikki o'zgaruvchili ekologik model va iqtisodiy dinamik model – misolida ushbu masalalar keng tahlil qilinadi.

Birinchi misol sifatida bir o'zgaruvchili logistik o'sish modeli ko'rib chiqiladi:

$$x' = ax - bx^2, \quad a > 0, b > 0$$

Bu tenglama populyatsiyaning cheklangan resurslar ostida o'sishini ifodalaydi. Muvozanat nuqtalari tenglama o'ng tomoni nolga tenglashtirilganda aniqlanadi: $x_1 = 0$ va $x_2 = \frac{a}{b}$. Chiziqlashtirish orqali turg'unlik baholanadi: hosila $f'(x) = a - 2bx$. Natijada $f'(0) = a > 0$, demak $x=0$ nuqta turg'un emas; $f'(\frac{a}{b}) = -a < 0$, ya'ni yuqori muvozanat nuqtasi asimptotik turg'un. Bu populyatsiyaning tabiiy ravishda barqaror son atrofida shakllanishini matematik jihatdan asoslaydi.

Ikkinchi misol – ikki o'zgaruvchili klassik Lotka–Volterra predator–prey modeli:

$$\begin{cases} x' = ax - \beta xy, \\ y' = -\gamma y + \delta xy, \end{cases}$$

bu yerda x – o'lja, y – yirtqich. Muvozanat nuqtalari sifatida $(0,0)$ va $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ aniqlanadi. Yakobi matritsa yordamida barqarorlik o'rganilganda, trivial nuqta $(0,0)$ turg'un emasligi aniqlanadi, chunki minimal buzilish bilan tizim nol holatdan chetga chiqadi va o'sish jarayoni boshlanadi. Ikkilamchi muvozanat nuqtasi esa neytral turg'unlik namunasidir: eigenqiymatlar sof mavhum sonlar bo'lib, tizim trayektoriyalari yopiq orbitaga ega. Bu holat tabiatda o'lja va yirtqichning davriy o'zgarishiga mos keladi. Aynan shu model ekologiyada ko'p kuzatiladigan davriy populyatsiya tebranishlarini matematik jihatdan izohlaydi.

Uchinchi misol sifatida iqtisodiy o'sishning Solow modeli ko'rib chiqiladi:

$$k' = sf(k) - (\delta + n)k,$$

bu yerda k – bitta ishchiga to'g'ri keladigan kapital, s – jamg'arma normasi, δ – kapital amortizatsiyasi, n – aholi o'sish darajasi. Agar $f(k)$ ishlab chiqarish funksiyasi Cobb–Douglas ko'rinishda bo'lsa, ya'ni $f(k) = k^\alpha$, unda muvozanat nuqtasi quyidagicha aniqlanadi:

$$sk^\alpha = (\delta + n)k.$$

Bundan barqaror kapital darajasi $k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-a}}$ hosil bo'ladi. Hosila yordamida turg'unlik tekshirilganda ushbu muvozanat nuqtasi asimptotik turg'un ekani isbotlanadi. Bu iqtisodiyotning uzoq muddatli barqaror o'sishi mavjudligini, resurslar to'g'ri taqsimlanganda iqtisodiy tizim o'z muvozanatiga qaytishini ko'rsatadi.

Ko'rib chiqilgan modellar shuni ko'rsatadiki, muvozanat va turg'unlik tahlili turli fanlar bo'ylab universal matematik tamoyillarga ega. Biologik, iqtisodiy yoki fizik jarayon bo'lishidan qat'i nazar, dinamik tizimlarning barqarorligini baholash uchun muvozanat nuqtalarini aniqlash, chiziqlashtirish, eigenqiymatlarni tahlil qilish yoki Lyapunov yondashuvi qo'llanadi. Bu metodlar real jarayonlarning kelajakdagi xatti-harakatini aniq prognoz qilish, tizimni boshqarish va amaliy qarorlar qabul qilishda muhim o'rin tutadi.

Natijalar va muhokama: Ushbu maqolada muvozanat va turg'unlik masalalarini matematik modellashtirish nuqtai nazaridan o'rganish natijasida bir necha muhim xulosalar shakllantirildi. Avvalo, dinamik tizimlarda muvozanat nuqtalarini aniqlash jarayoni tizimning asosiy tuzilishini baholashda fundamental ahamiyatga ega ekani aniqlandi. Olingan nazariy tahlillar shuni ko'rsatadiki, tizimning muvozanat holati uning ichki parametrlariga bevosita bog'liq bo'lib, kichik o'zgarishlar ham butun tizimning davranishiga sezilarli ta'sir ko'rsatishi mumkin. Bu esa parametrlarning sezgirlik darajasini baholash hamda barqarorlikni mustahkamlovchi optimal boshqaruv strategiyalarini shakllantirishga asos yaratadi.

Turg'unlik masalalarini Lyapunov yondashuvi orqali tahlil qilish natijasida ushbu metodning amaliy samaradorligi tasdiqlandi. Xususan, tizim yechimining aniq analitik ko'rinishi talab qilinmasdan turg'unlikni baholash imkoniyati nazariyaning eng muhim ustunliklaridan biri ekanligi qayd etildi. Bu xususiyat murakkab nolinear tizimlar ustida ishlashda ayniqsa katta ahamiyatga ega. O'tkazilgan kontseptual tahlillar shuni ko'rsatadiki, Lyapunov funksiyasini to'g'ri tanlash tizimning turg'unligini aniqlashda hal qiluvchi omil bo'lib, turli tizimlar

uchun mos yordamchi funksiyalarni qurish usullari nazariyaning keyingi rivoji uchun istiqbolli yoʻnalishlarni belgilaydi.

Shuningdek, muvozanat va turgʻunlik tushunchalarining amaliy sohalardagi oʻrni boʻyicha olib borilgan muhokamalar iqtisodiyot, ekologiya, texnika va ijtimoiy jarayonlarda barqarorlik konsepsiyasining naqadar muhimligini koʻrsatdi. Masalan, iqtisodiy tizimlarning narx-barqarorligi, populyatsiya modellari barqaror yashash darajasi, yoki texnologik jarayonlarning xavfsizlik mezonlari aynan turgʻunlik shartlariga bogʻliq. Bu esa matematik modellashtirishning real hayotdagi masalalarni hal qilishda qanday kuchli vosita ekanini yana bir bor tasdiqlaydi. Yakuniy natija sifatida aytish mumkinki, turgʻunlik nazariyasi nafaqat abstrakt matematik tushuncha, balki murakkab tizimlarni boshqarish, prognozlash va optimallashtirishda hal qiluvchi ilmiy asos boʻlib xizmat qiladi.

Xulosa: Ushbu maqolada muvozanat va turgʻunlik masalalarining matematik modellashtirishdagi oʻrni, ularni aniqlashning nazariy asoslari hamda amaliy qoʻllanilishiga doir muhim jihatlar tahlil qilindi. Oʻrganishlar shuni koʻrsatdiki, dinamik tizimlarning barqaror yoki noturgʻun holatga ega boʻlishi ularning ichki tuzilishi, parametrlarining sezgirligi va tashqi taʼsirlarga munosabati bilan chambarchas bogʻliq. Muvozanat nuqtalarining mavjudligi tizim harakatining asosiy yoʻnalishini belgilasa, turgʻunlik darajasi ushbu muvozanatning real sharoitda saqlanish-saqalanmasligini aniqlaydi.

Turgʻunlikni baholashda Lyapunov tamoyillarining qoʻllanilishi nazariyaning eng samarali yoʻnalishlaridan biri ekani aniqlandi, chunki ushbu yondashuv tizimning aniq yechimi topilmagan holatlarda ham barqarorlik haqida ishonchli xulosa chiqarish imkonini beradi. Bu esa murakkab nolinear tizimlar, iqtisodiy jarayonlar, ekologik modellar va texnologik tizimlarni tahlil qilishda beqiyos ahamiyatga ega. Natijalar shuni koʻrsatadiki, muvozanat va turgʻunlik nazariyasi real tizimlarni boshqarish, optimallashtirish va ularning kelajakdagi xatti-harakatini prognoz qilishda fundamental matematik asos boʻlib xizmat qiladi.

Yakuniy xulosa sifatida aytish mumkinki, ushbu mavzudagi chuqur matematik tahlillar nafaqat nazariy bilimlarni boyitadi, balki ilmiy-amaliy yechimlar ishlab chiqishda ham katta ahamiyat kasb etadi. Mazkur yoʻnalish boʻyicha izlanishlarni davom ettirish yangi modellarni yaratish, barqarorlik shartlarini takomillashtirish va murakkab tizimlar uchun yanada ishonchli bashoratlar ishlab chiqishga imkon beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Khalil H.K. Nonlinear Systems. — 3rd ed. — Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
2. Sastry S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control. — New York: Springer, 2013.
3. Vidyasagar M. Nonlinear Systems Analysis. — 2nd ed. — Philadelphia: SIAM, 2002.
4. Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. — 3rd ed. — New York: Springer, 2001.
5. Kuznetsov Y.A. Elements of Applied Bifurcation Theory. — 3rd ed. — New York: Springer, 2004.
6. Strogatz S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos. — 2nd ed. — Boulder: Westview Press, 2015.
7. LaSalle J., Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. — Reprint ed. — New York: Academic Press, 2012.
8. Chiang A.C., Wainwright K. Fundamental Methods of Mathematical Economics. — 4th ed. — New York: McGraw-Hill, 2005.