

TAKOMILLASHTIRILGAN EYLER USULINING KOSHI MASALASINI YECHISHDAGI AFZALLIKLARI

Mo'ydinjonov S.O'

FarDU talabasi, samandar6420@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada oddiy differensial tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasini yechishda takomillashtirilgan Eyler usulining mohiyati va afzalliklari yoritilgan. Usulning nazariy asoslari, hisoblash algoritmi hamda aniqlik va barqarorlik xususiyatlari tahlil qilingan. Shuningdek, takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usuli bilan solishtirilib, uning amaliy masalalarni yechishdagi ustun jihatlari asoslab berilgan.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, takomillashtirilgan Eyler usuli, oddiy differensial tenglama, sonli usullar, aniqlik, barqarorlik.

Kirish

Oddiy differensial tenglamalar nazariyasida muhim o'rin tutuvchi Koshi masalasini analitik usullar bilan yechish har doim ham imkoni bo'lavermaydi. Ayniqsa, tenglama murakkab bo'lsa yoki yopiq ko'rinishdagi aniq yechim mavjud bo'lmasa, sonli usullarga murojaat qilish zarur bo'ladi. Shu sababli sonli tahlilda sodda, tushunarli va yetarlicha aniq usullarni ishlab chiqish dolzarb masala hisoblanadi. Takomillashtirilgan Eyler usuli ana shunday usullardan biri bo'lib, u oddiy Eyler usulining kamchiliklarini bartaraf etish va Koshi masalasini aniqroq yechish maqsadida taklif etilgan. Ushbu maqolada takomillashtirilgan Eyler usulining nazariy asoslari, Koshi masalasini yechishdagi aniqlik va barqarorlik xususiyatlari hamda oddiy Eyler usuli bilan solishtirgandagi afzalliklari yoritiladi.

Takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usulining aniqligini oshirish maqsadida ishlab chiqilgan sonli usullardan biri bo'lib, u birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasini yechishda keng qo'llaniladi. Mazkur usulning nazariy asosi differensial tenglamaning yechimini lokal ravishda yaxshiroq yaqinlashtirish g'oyasiga tayanadi. Oddiy Eyler usulida yechimning keyingi nuqtadagi qiymati faqat joriy nuqtadagi hosila qiymati orqali aniqlansa, takomillashtirilgan Eyler usulida hosilaning o'zgarishi ham inobatga olinadi. Bu esa usulning yaqinlashish tezligini oshiradi va hisoblash xatolarini kamaytiradi.

Koshi masalasi odatda

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

ko‘rinishida beriladi. Takomillashtirilgan Eyler usulida hisoblash jarayoni ikki bosqichda amalga oshiriladi. Avval oddiy Eyler formulasi yordamida oraliq nuqtadagi taxminiy yechim aniqlanadi. Ushbu oraliq yechimdan foydalanib, keyingi nuqtadagi hosila qiymati topiladi va yakuniy yechim joriy nuqtadagi hamda oraliq nuqtadagi hosilalarning o‘rtacha qiymati orqali hisoblanadi. Mazkur yondashuv yechim trayektoriyasining haqiqiy egri chizig‘iga yaqinroq bo‘lishini ta‘minlaydi.

Takomillashtirilgan Eyler usulining muhim afzalliklaridan biri - uning aniqlik tartibi oddiy Eyler usuliga nisbatan yuqoriroq bo‘lishidir. Agar oddiy Eyler usulida global xatolik birinchi tartibli bo‘lsa, takomillashtirilgan Eyler usulida bu xatolik ikkinchi tartibli bo‘ladi. Bu esa bir xil qadam uzunligida hisoblash olib borilganda ancha aniq natijalarga erishish imkonini beradi. Shu sababli amaliy masalalarda, ayniqsa yechimning silliqligi va barqarorligi muhim bo‘lgan holatlarda, aynan takomillashtirilgan Eyler usuli afzal ko‘riladi.

Shuningdek, ushbu usulning algoritmi nisbatan sodda bo‘lib, uni dasturlash va amaliy hisoblashlarda qo‘llash qulaydir. Murakkab yuqori tartibli Runge–Kutta usullariga nisbatan hisoblash xarajati kamroq bo‘lsa-da, oddiy Eyler usuliga qaraganda ancha ishonchli natija beradi. Shu jihatdan u nazariy va amaliy hisoblashlar o‘rtasida muvozanatni ta‘minlovchi samarali sonli usul hisoblanadi. Takomillashtirilgan Eyler usuli tarixan klassik sonli tahlil maktabiga mansub bo‘lib, uning ildizlari Leonhard Euler nomi bilan bog‘liq bo‘lgan Eyler g‘oyalarining rivojlantirilgan shakli sifatida qaraladi.

Koshi masalasini yechishda takomillashtirilgan Eyler usulining asosiy ustunligi uning aniqligi va barqarorligi bilan bevosita bog‘liqdir. Oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan Koshi masalasida yechimning boshlang‘ich shartga sezgirliги va hisoblash jarayonida xatolarning to‘planishi muhim muammo hisoblanadi. Shu nuqtai nazardan, sonli usulning qanchalik aniqligi va barqaror ishlashi amaliy natijaning ishonchliligini belgilaydi.

Takomillashtirilgan Eyler usuli aniqlik jihatidan oddiy Eyler usulidan sezilarli darajada ustun turadi. Buning sababi shundaki, bu usulda yechimni hisoblash

jarayonida faqat bitta nuqtadagi hosila emas, balki hosilaning oraliq nuqtadagi qiymati ham hisobga olinadi. Natijada differensial tenglamaning haqiqiy yechim egri chizig'i lokal ravishda ancha yaxshi yaqinlashtiriladi. Amaliy jihatdan bu shuni anglatadiki, qadam uzunligi bir xil bo'lgan holatda takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usuliga nisbatan kichikroq xatolik beradi. Ayniqsa, yechim tez o'zgaradigan yoki egri chiziqning egriligi katta bo'lgan masalalarda bu farq yaqqol seziladi.

Aniqlik masalasida yana bir muhim jihat - global xatolikning tartibidir. Takomillashtirilgan Eyler usulida lokal xatolik kichikroq bo'lgani sababli, qadamlar soni ortib borganda umumiy xatolik sekinroq o'sadi. Bu esa hisoblash jarayonini haddan tashqari mayda qadamlar bilan olib borishni talab qilmaydi va hisoblash vaqtini tejaydi. Shu sababli ushbu usul amaliy muhandislik, fizika va iqtisodiy modellashtirish masalalarida tez-tez qo'llaniladi.

Barqarorlik nuqtai nazaridan qaralganda ham takomillashtirilgan Eyler usuli muhim afzalliklarga ega. Koshi masalasini yechishda boshlang'ich shartdagi yoki oraliq hisoblashlardagi kichik xatolar keyingi nuqtalarda qanday ta'sir ko'rsatishi muhim hisoblanadi. Agar usul barqaror bo'lmasa, kichik xatoliklar tezda kattalashib, yechimning ishonchliligini yo'qqa chiqaradi. Takomillashtirilgan Eyler usulida esa hosilalarning o'rtacha qiymatidan foydalanish hisoblash jarayonini yumshatadi va xatolarning keskin o'sib ketishining oldini oladi.

Bu usul ayniqsa silliq funksiyalar bilan berilgan differensial tenglamalar uchun yaxshi barqarorlik xususiyatlarini namoyon qiladi. Qadam uzunligi to'g'ri tanlangan taqdirda, yechimning umumiy xulqi haqiqiy analitik yechimga mos keladi va sun'iy tebranishlar yoki keskin og'ishlar yuzaga kelmaydi. Shu jihatdan u oddiy Eyler usuliga qaraganda ancha ishonchli hisoblanadi, biroq hisoblash murakkabligi jihatidan hali ham nisbatan sodda bo'lib qoladi.

Takomillashtirilgan Eyler usulining oddiy Eyler usuli bilan solishtirilgandagi afzalliklari. Avvalo, ularning yechimga yondashish uslubidagi farqlar bilan izohlanadi. Oddiy Eyler usuli differensial tenglama yechimini qurishda eng sodda

sonli yondashuv bo'lib, u yechim egri chizig'ini har bir qadamda to'g'ri chiziq bilan yaqinlashtiradi. Bunda keyingi nuqtadagi yechim faqat joriy nuqtadagi hosila qiymatiga tayanadi. Natijada usul algoritmik jihatdan juda sodda bo'lsa-da, aniqlik past bo'lib, xatoliklar tez to'planadi. Takomillashtirilgan Eyler usuli aynan shu kamchiliklarni kamaytirish maqsadida ishlab chiqilgan.

Oddiy Eyler usulida yechim egri chizig'ining faqat boshlang'ich nuqtadagi yo'nalishi hisobga olinadi, holbuki differensial tenglama yechimi ko'pincha egri chizikli xarakterga ega bo'ladi. Takomillashtirilgan Eyler usulida esa bu holat inobatga olinib, dastlab oraliq nuqtadagi taxminiy yechim topiladi va shu nuqtadagi hosila ham hisoblash jarayoniga jalb qilinadi. Shundan so'ng joriy nuqta va oraliq nuqtadagi hosilalarning o'rtacha qiymati olinadi. Bu yondashuv yechim egri chizig'ining haqiqiy shakliga yaqinroq natija beradi.

Aniqlik jihatidan solishtirilganda, takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usulidan ancha ustun hisoblanadi. Oddiy Eyler usulida global xatolik birinchi tartibli bo'lib, qadam uzunligi kamaytirilmaguncha aniq natijaga erishish qiyin. Takomillashtirilgan Eyler usulida esa xatolikning tartibi yuqoriroq bo'lgani sababli, bir xil qadam uzunligida ham sezilarli darajada aniqroq natija olinadi. Bu esa hisoblash jarayonida qadamlar sonini haddan tashqari ko'paytirishga ehtiyoj qoldirmaydi.

Barqarorlik nuqtai nazaridan ham ikki usul o'rtasida muhim farqlar mavjud. Oddiy Eyler usulida kichik xatoliklar keyingi qadamlar davomida tez o'sib ketishi mumkin, ayniqsa qadam uzunligi nisbatan katta tanlangan bo'lsa. Takomillashtirilgan Eyler usulida esa hosilalarning o'rtacha qiymatidan foydalanish hisoblash jarayonini muvozanatlashtiradi va xatolarning keskin ortib ketish ehtimolini kamaytiradi. Shu sababli u barqarorroq natija beradi va yechimning umumiy xulqini yaxshiroq saqlab qoladi.

Hisoblash murakkabligi jihatidan qaralganda, takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usuliga nisbatan biroz ko'proq hisoblashni talab qiladi, chunki har bir qadamda qo'shimcha hosila hisoblanadi. Biroq bu qo'shimcha xarajat yuqori aniqlik

va ishonchlilik evaziga o‘zini to‘liq oqlaydi. Murakkab Runge–Kutta usullari bilan solishtirilganda esa takomillashtirilgan Eyler usuli hali ham sodda va tushunarli bo‘lib qoladi.

Misol.

$$y' = (x^2 + 1)y - 3,4x$$

$$y(0) = 2,5$$

$$h = 0,1; f(x) = (x^2 + 1)y - 3,4x; x_0 = 0 \quad x_3 = 0,3 \quad x_6 = 0,6 \quad x_9 = 0,9$$

$$x_1 = 0,1 \quad x_4 = 0,4 \quad x_7 = 0,7; \quad x_2 = 0,2 \quad x_5 = 0,5 \quad x_8 = 0,8$$

Euler usuli

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2,5 + 0,1 \cdot ((0^2 + 1) \cdot 2,5 - 3,4 \cdot 0) = 2,5 + 0,1 \cdot 2,5 = 2,75$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2,75 + 0,1 \cdot ((0,1^2 + 1) \cdot 2,75 - 3,4 \cdot 0,1) = 2,75 + 0,24375 = 2,99375$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 2,99375 + 0,1 \cdot ((0,2^2 + 1) \cdot 2,99375 - 3,4 \cdot 0,2) = 2,99375 + 0,24335 = 3,2371$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 3,2371 + 0,1 \cdot ((0,3^2 + 1) \cdot 3,2371 - 3,4 \cdot 0,3) = 3,2371 + 0,2508439 = 3,4879439$$

$$y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 3,4879439 + 0,1 \cdot ((0,4^2 + 1) \cdot 3,4879439 - 3,4 \cdot 0,4) = 3,4879439 + 0,2686 \approx 3,75654$$

$$y_6 = y_5 + h \cdot f(x_5, y_5) = 3,75654 + 0,1 \cdot ((0,5^2 + 1) \cdot 3,75654 - 3,4 \cdot 0,5) = 3,75654 + 0,2995675 = 4,0561075$$

$$y_7 = y_6 + h \cdot f(x_6, y_6) = 4,0561075 + 0,1 \cdot ((0,6^2 + 1) \cdot 4,0561075 - 3,4 \cdot 0,6) = 4,0561075 + 0,26603062 \approx 4,32214$$

$$y_8 = y_7 + h \cdot f(x_7, y_7) = 4,32214 + 0,1 \cdot ((0,7^2 + 1) \cdot 4,32214 - 3,4 \cdot 0,7) = 4,32214 + 0,316599 \approx 4,638739$$

$$y_9 = y_8 + h \cdot f(x_8, y_8) = 4,638739 + 0,1 \cdot ((0,8^2 + 1) \cdot 4,638739 - 3,4 \cdot 0,8) = 4,638739 + 0,39035 = 5,029089$$

Eulerning takomillashtirilgan metodi.

$$n = 0$$

$$x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{1}{2}h \Rightarrow x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{1}{2}0,1 \Rightarrow x_{\frac{1}{2}} = 0,05$$

$$y_{\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0) = 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot ((0^2 + 1) \cdot 2,5 - 3,4 \cdot 0) = 2,5 + 0,05 \cdot 2,5 = 2,625$$

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+\frac{1}{2}} \Rightarrow f_{n+\frac{1}{2}} = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

$$f_{\frac{1}{2}} = f(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}) = 2,625 \cdot (0,05^2 + 1) - 3,4 \cdot 0,05 = 2,4615625$$

$$y_1 = y_0 + hf_{\frac{1}{2}} \Rightarrow y_1 = 2,5 + 0,1 \cdot 2,4615625 = 2,7615625$$

$$n = 1$$

$$x_{\frac{3}{2}} = x_1 + \frac{1}{2}h \Rightarrow x_{\frac{3}{2}} = 0,15, \quad y_{\frac{3}{2}} = y_1 + \frac{1}{2}hf(x_1, y_1) =$$

$$y_{\frac{3}{2}} = 2,7615625 + 0,05 \cdot ((0,1^2 + 1) \cdot 2,7615625 - 3,4 \cdot 0,1) \approx 2,88402$$

$$f_{\frac{3}{2}} = (0,15^2 + 1) \cdot 2,88402 - 3,4 \cdot 0,15 \approx 2,43891$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f_{\frac{3}{2}} = 2,7615625 + 0,1 \cdot 2,43891 \approx 3,0054015$$

$$n = 2$$

$$x_{\frac{5}{2}} = x_2 + \frac{1}{2}h \Rightarrow x_{\frac{5}{2}} = 0,25, \quad y_{\frac{5}{2}} = y_2 + \frac{1}{2}hf(x_2, y_2) =$$

$$y_{\frac{5}{2}} = 3,0054015 + 0,05 \cdot ((0,2^2 + 1) \cdot 3,0054015 - 3,4 \cdot 0,2) \approx 3,12768$$

$$f_{\frac{5}{2}} = (0,25^2 + 1) \cdot 3,12768 - 3,4 \cdot 0,25 \approx 2,47316$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f_{\frac{5}{2}} \Rightarrow y_3 = 3,0054015 + 0,1 \cdot 2,47316 \approx 3,2527175$$

$$n = 3$$

$$x_{\frac{7}{2}} = 0,3 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 0,35$$

$$y_{\frac{7}{2}} = 3,2527175 + 0,05 \cdot ((0,3^2 + 1) \cdot 3,2527175 - 3,4 \cdot 0,3) \approx 3,37899$$

$$f_{\frac{7}{2}} = (0,35^2 + 1) \cdot 3,37899 - 3,4 \cdot 0,35 \approx 2,60292$$

$$y_4 = y_3 + hf_{\frac{7}{2}}$$

$$y_4 = 3,2527175 + 0,1 \cdot 2,60292 \approx 3,5130095$$

$$n = 4$$

$$x_{\frac{9}{2}} = 0,4 + 0,05 = 0,45$$

$$y_{\frac{9}{2}} = 3,5130095 + 0,05 \cdot ((0,4^2 + 1) \cdot 3,5130095 - 3,4 \cdot 0,4) \approx 3,64876$$

$$f_{\frac{9}{2}} = (0,45^2 + 1) \cdot 3,64876 - 3,4 \cdot 0,45 \approx 2,85763 \quad y_5 = 3,5130095 + 0,1 \cdot 2,85763 \approx 3,798773$$

$$n = 5$$

$$x_{\frac{11}{2}} = 0,5 + 0,05 = 0,55$$

$$y_{\frac{11}{2}} = 3,798773 + 0,05 \cdot ((0,5^2 + 1) \cdot 3,798773 - 3,4 \cdot 0,5) \approx 3,951196$$

$$f_{\frac{11}{2}} = (0,55^2 + 1) \cdot 3,951196 - 3,4 \cdot 0,55 \approx 3,27643$$

$$y_6 = 3,798773 + 0,1 \cdot 3,27643 \approx 4,126416$$

$$n = 6$$

$$x_{\frac{13}{2}} = 0,6 + 0,05 = 0,65$$

$$y_{\frac{13}{2}} = 4,126416 + 0,05 \cdot ((0,6^2 + 1) \cdot 4,126416 - 3,4 \cdot 0,6) \approx 4,305012$$

$$f_{\frac{13}{2}} = (0,65^2 + 1) \cdot 4,305012 - 3,4 \cdot 0,65 \approx 3,91388$$

$$y_7 = 4,126416 + 0,1 \cdot 3,91388 = 4,517804$$

$$n = 7$$

$$x_{\frac{15}{2}} = 0,7 + 0,05 = 0,75$$

$$y_{\frac{15}{2}} = 4,517804 + 0,05 \cdot ((0,7^2 + 1) \cdot 4,517804 - 3,4 \cdot 0,7) \approx 4,73538$$

$$f_{\frac{15}{2}} = (0,75^2 + 1) \cdot 4,73538 - 3,4 \cdot 0,75 \approx 4,849$$

$$y_8 = 4,517804 + 0,1 \cdot 4,849 = 5,002704$$

$$n = 8$$

$$x_{\frac{17}{2}} = 0,8 + 0,05 = 0,85$$

$$y_{\frac{17}{2}} = 5,002704 + 0,05 \cdot ((0,8^2 + 1) \cdot 5,002704 - 3,4 \cdot 0,8) \approx 5,27693$$

$$f_{\frac{17}{2}} = (0,85^2 + 1) \cdot 5,27693 - 3,4 \cdot 0,85 \approx 6,19951$$

$$y_9 = 5,002704 + 0,1 \cdot 6,19951 = 5,622655$$

eyler					Takomillashtirilgan eyler				
xn	yn	y(n+1)	h	f	xn	yn	yn+1	h	f
0	2.5	2.75	0.1	2.5	0.05	2.625	2.871156	0.1	2.461563
0.1	2.75	2.75		2.4375	0.15	2.871875	3.114524		2.426492
0.2	2.99375	2.99375		2.4335	0.25	3.115425	3.361439		2.460139
0.3	3.2371	3.2371		2.508439	0.35	3.362522	3.620965		2.584431
0.4	3.487944	3.487944		2.686015	0.45	3.622245	3.90482		2.825749
0.5	3.756545	3.756545		2.995682	0.55	3.906329	4.228129		3.217994
0.6	4.056114	4.056114		3.476314	0.65	4.229929	4.610637		3.807074
0.7	4.403745	4.403745		4.18158	0.75	4.612824	5.078578		4.657538
0.8	4.821903	4.821903		5.187921	0.85	5.081299	5.667553		5.862538

Xulosa

Tahlillar shuni ko'rsatadiki, takomillashtirilgan Eyler usuli Koshi masalasini yechishda oddiy Eyler usuliga nisbatan ancha samarali va ishonchli hisoblanadi. Ushbu usulda hosilalarning o'rtacha qiymatidan foydalanish yechim egri chizig'ining haqiqiy ko'rinishini yaxshiroq yaqinlashtirish imkonini beradi. Natijada hisoblash xatoliklari kamayadi va usulning umumiy aniqligi oshadi. Barqarorlik nuqtai nazaridan ham takomillashtirilgan Eyler usuli ustunlikka ega bo'lib, kichik xatolarning keyingi qadamlar davomida keskin ortib ketish ehtimolini pasaytiradi. Hisoblash murakkabligi biroz ortishiga qaramay, olingan natijaning sifati bu qo'shimcha xarajatni to'liq oqlaydi. Shu bois takomillashtirilgan Eyler usuli nazariy va amaliy masalalarda, xususan, Koshi masalasini yechishda keng qo'llash uchun maqsadga muvofiq bo'lgan samarali sonli usul sifatida qaraladi. Bu usulning paydo bo'lishi va rivojlanishi sonli tahlil asoschilaridan biri bo'lgan Leonhard Euler g'oyalarining mantiqiy davomi sifatida baholanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. II qism. - Toshkent: O'qituvchi.
 2. Atkinson K.E. An Introduction to Numerical Analysis. - Wiley.
 3. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. - Cengage Learning.
- Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. - Springer.