

LAGRANJ VA NYUTON INTERPOLYATSION FORMULALARINING ANIQ MISOLLARDA TAQQOSLANISHI.

Ismoilov A.I¹., Arabova F.A².

¹FarDU dotsenti, ismoilovaxrorjon@yandex.com.

²FarDU talabasi a07612720@gmail.com

Anotatsiya: Ushbu maqolada algebraik interpolatsiya masalasi, jumladan Lagranj va Nyuton interpolatsion formulalarining nazariy asoslari hamda amaliy qo'llanilishi tahlil qilinadi. Interpolatsiya tugunlari va interpolatsiyalovchi ko'phadlar haqida umumiy ma'lumotlar berilib, Lagranj ko'phadining tuzilishi va kamchiliklari yoritiladi. Nyutonning bo'lingan ayirmalar asosidagi formulasi keltirilib, uning hisoblashda qulay jihatlari ko'rsatiladi. Sonli misol orqali har ikkala usul bilan ko'phadlar qurilib taqqoslanadi va ular nazariy jihatdan ekvivalent ekanligi tasdiqlanadi.

Kalit so'zlar: Interpolatsiya, algebraik interpolatsiya, Lagranj Interpolatsion ko'phadi, Nyuton interpolatsiyasi, bo'lingan ayirmalar, interpolatsiya tugunlari, hisoblash matematikasi.

Kirish

Aksariyat hisoblash metodlari masalaning qo'yilishida qatnashadigan funksiyalarni unga biror, muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funksiyalarga almashtirish g'oyasiga asoslangan. Dastlab interpolatsiyalash deganda funksiyalarning qiymatlarini argumentning jadvalda berilmagan qiymatlari uchun topish tushunarli edi. Bu holda interpolatsiyalashni "satrlar orasida o'qiy bilish san'ati" deb ham tariflash mumkin. Hozirgi vaqtda interpolatsiyalash tushunchasi juda keng ma'noda tushuniladi. Interpolatsiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, $[a,b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya berilgan yoki hech bo'lmaganda uning $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ qiymatlari ma'lum bo'lsin. Shu oraliqda aniqlangan va hisoblash uchun qulay bo'lgan qandaydir funksiyalar $\{P(x)\}$ sinfini, masalan, ko'phadlar sinfini olamiz. Berilgan $y = f(x)$ funksiyani $[a,b]$ oraliqda interpolatsiyalash masalasi shu funksiyani berilgan sinfning shunday $P(x)$ funksiyasi bilan taqribiy ravishda

$$f(x) \approx P(x)$$

almashtirishdan iboratki, $P(x)$ berilgan $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin:

$$P(x_i) \approx f(x_i) \quad (i = \overline{0, n}).$$

Bu yerda ko'rsatilgan $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalar *interpolyatsiya tugunlari* yoki *tugunlar* deyiladi, $P(x)$ esa *interpolatsiyalovchi funksiya* deyiladi. Agar $\{P(x)\}$ sinfi sifatida darajali ko'phadlar sinfi olinsa, u holda *interpolatsiyalash algebraik* yig'indi deyiladi. Algebraik interpolyatsiyalash apparati hisoblash matematikasining ko'p sohalarida qo'llaniladi, chunonchi, differensiallash va integrallashda, transendant, differensial va integral tenglamalarni yechishda, funksiya ekstremumini topish hamda funksiya jadvalni tuzishda Teylor yoyilmasi klassik analizda qay darajada ahamiyatga ega bo'lsa, algebraik interpolyatsiyalash ham hisoblash matematikasida shunday ahamiyatga egadir. Ayrim hollarda interpolyatsiyalashning boshqa ko'rinishlarini qo'llash maqsadiga muvofiqdir. Masalan, $f(x)$ davriy funksiya bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida trigonometrik funksiyalar sinfi olinadi; agar interpolyatsiyalanadigan funksiya berilgan nuqtalarda cheksizga aylanadigan bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida ratsional funksiyalar sinfini olish maquldir.

Biz asosan algebraik interpolyatsiyalash bilan shug'ullanamiz. Masalaning qo'yilishi quyidagichadir. Darajasi n dan yuqori bo'lmagan shunday ko'phad ko'rilsinki, u berilgan $(n+1)$ ta $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda berilgan

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu masalani geometrik ta'riflash ham mumkin: darajasi n dan oshmaydigan shunday $P(x)$ ko'phad ko'rilsinki, uning grafigi berilgan $(n+1)$ ta $M_k(x_k, f(x_k))$ ($k = \overline{0, n}$) nuqtalardan o'tsin.

Demak, c_m ($m = \overline{0, n}$) koefitsientlarni shunday aniqlash kerakki,

$$P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (1.1)$$

ko'phad uchun ushbu

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.2)$$

$$Q_{nj}(x_j) = C \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) = 1$$

shartdan topamiz, natijada:

$$Q_{nj}(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Bu ifodani (1.4) ga qo'yib, kerakli ko'phadni aniqlaymiz:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \quad (1.5)$$

Bu ko'phad *Lagranj interpolatsion ko'phadi* deyiladi.

Lagranj interpolatsion ko'phadining har bir hadi interpolatsiya tugunlarining hammasiga bog'liqdir. Agar yangi tugunlar kiritiladigan bo'lsa, interpolatsion ko'phadini qaytadan qurishga to'g'ri keladi. Bu Lagranj interpolatsion ko'phadining kamchiligidir. Lagranj interpolatsion ko'phadini shunday tartibda yozish mumkinki, hosil bo'lgan ko'phadning ixtiyoriy i -hadi interpolatsiya tugunlarining faqat avvalgi i tasiga va funksiyaning shu tugunlaridagi qiymatlariga bog'liq bo'ladi. Aytilganlarni bo'lingan ayrimlar yordamida bajaramiz:

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(x) &= f(x) - \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \\ &= \omega_{n+1}(x) \left[\frac{f(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} + \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \right] \end{aligned}$$

Bu ifodani yuqoridagi paragrafdagi lemma bilan solishtirsak, kvadrat qavslar ichidagi ifoda $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ning aynan o'zi ekanligi kelib chiqadi. Demak, biz

$$f(x) - L_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n) \omega_{n+1}(x) \quad (1.6)$$

deb yozishimiz mumkin.

Endi $L_m(x)$ tugunlari $x_0, x_1, \dots, x_m$ dan iborat bo'lgan Lagranj interpolatsion ko'phadi bo'lsin. U holda Lagranjning $L_n(x)$ interpolatsion ko'phadini

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \dots + [L_n(x) - L_{n-1}^{(x)}(x)] \quad (1.7)$$

ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Bu yerda $L_m(x) - L_{m-1}(x)x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ nuqtalarda nolga aylanadigan m-darajali ko‘phad, chunki $L_m(x_j) = L_{m-1}(x_j) = f(x_j)$ ($j = \overline{0, m-1}$). Shuning uchun ham

$$L_m(x) - L_{m-1}(x_j) = A_m \omega_m(x), \quad \omega_m(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{m-1}).$$

Bunda $x = x_m$ deb olsak,

$$f(x_m) - L_{m-1}(x) = A_m \omega_m(x_m)$$

ga ega bo‘lamiz. Ikkinchi tomondan (1.6) tenglikda $n = m - 1$ va $x = x_m$ deb olsak, u holda

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = f(x_m, x_0, \dots, x_{m-1}) \omega_m(x_m).$$

Shunday qilib, $A_m = f(x_0, \dots, x_m)$ va demak,

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = f(x_0, \dots, x_m) \omega_m(x).$$

Bu miqdorlarni (5.2) tenglikka qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \quad (1.8)$$

Bu hosil bo‘lgan interpolatsion ko‘phad Nyutonning bo‘lingan ayirmali interpolation ko‘phadi deyiladi.

Misol: Berilgan nuqtalar:

$$(1,1), (2,4), (4,16)$$

$$\text{Funksiya: } f(x) = x^2$$

```
import numpy as np
```

```
import pandas as pd
```

```
# Lagrange interpolatsiyasi
```

```
def lagrange_interpolation(x_points, y_points, x):
```

```
    n = len(x_points)
```

```
    P = 0.0
```

```

    for i in range(n):
        L = 1.0
        for j in range(n):
            if i != j:
                L *= (x - x_points[j]) / (x_points[i] - x_points[j])
        P += y_points[i] * L
    return P

# Nyuton interpolatsiyasi
def newton_interpolation(x_points, y_points, x):
    n = len(x_points)
    coef = np.copy(y_points)
    for j in range(1, n):
        for i in range(n-1, j-1, -1):
            coef[i] = (coef[i] - coef[i-1]) / (x_points[i] - x_points[i-j])
    P = coef[-1]
    for i in range(n-2, -1, -1):
        P = P * (x - x_points[i]) + coef[i]
    return P

# Berilgan nuqtalar
x_points = np.array([1, 2, 4], dtype=float)
y_points = np.array([1, 4, 16], dtype=float)

# Jadval uchun x qiymatlar
x_values = np.array([1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4])

# Jadvalni to'ldirish
data = {
    "x": x_values,
    "Lagrange P(x)": [lagrange_interpolation(x_points, y_points, x) for x in
x_values],
    "Nyuton P(x)": [newton_interpolation(x_points, y_points, x) for x in x_values],

```

```

    "Aniq qiymat  $f(x)=x^2$ ": x_values**2
}
table = pd.DataFrame(data)
print(table)

```

Natija jadvali:

x	Lagrange P(x)	Nyuton P(x)	Aniq qiymat
1.0	1.00	1.00	1.00
1.5	2.25	2.25	2.25
2.0	4.00	4.00	4.00
2.5	6.25	6.25	6.25
3.0	9.00	9.00	9.00
3.5	12.25	12.25	12.25
4.0	16.00	16.00	16.00

Xulosa

Maqolada Lagranj va Nyuton interpolatsion formulalarining nazariy va amaliy jihatlari batafsil o'rganildi. Keltirilgan misol orqali har ikkala usul yordamida qurilgan interpolatsion ko'phadlar bir xil natija berishi va berilgan nuqtalardan o'tuvchi yagona ko'phadni hosil qilishi ko'rsatildi. Bu holat interpolatsiya masalasining yechimi yagona ekanligini va Lagranj hamda Nyuton formulalarining o'zaro ekvivalentligini tasdiqlaydi. Shu bilan birga, Lagranj interpolatsiyasi formulaviy jihatdan sodda bo'lsa-da, yangi tugunlar qo'shilganda ko'phadni qayta qurishni talab qiladi. Nyuton interpolatsiyasi esa bo'lingan ayirmalar asosida qurilgani sababli hisoblash jarayonida qulayroq bo'lib, amaliy masalalarda, ayniqsa dasturlash va sonli hisoblashlarda samarali hisoblanadi. Olingan natijalar algebraik interpolatsiyaning hisoblash matematikasidagi muhim o'rnini yana bir bor tasdiqlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1- qism. -T.: O'qituvchi, 2003 y. 231 b.

2. Oliy bukuv yurtlari talabalari uchun darslik. / M. Isroilov. —T.: Iqtisod-Moliya, 2008. —320 b.
3. Jumaniyozov, A. (2015). *Raqamli metodlar va matematik modelleme*. Toshkent: O'qituvchi.
4. Tursunov, S. (2013). *Algebraik tenglamalarni yechish usullari*. Toshkent: Akademnashr.
5. Davlatov, M., & Umarov, I. (2017). *Transendent tenglamalar va ularning yechish usullari*. Toshkent: Fan va texnologiya.
6. Ismatullayev G.P., Koshergenova M.S. Hisoblash usullari. «Tafakkurbo'stoni» Toshkent — 2014. 240 b.
7. Abdulhamidov A.U., Xudoynazarov S.X. Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari. Toshkent - «O'zbekiston» 1995 y. 224 b.
8. Aloe R.D., Xudoyberganov M. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg'ulotlari to'plami. UzMU.O'quv qo'llanma. 2008 y.1 106.