

LU– AJRATISH (DEKOMPOZITSIYA) USULI YORDAMIDA CHIZIQLI SISTEMALARNI SAMARALI YECHISH

Xafizova M.R.

FarDU talabasi, muhlisaxafizova97@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada chiziqli tenglamalar sistemalarini LU-ajratish usuli yordamida yechish masalasi yoritilgan. Chiziqli sistemalar nazariy va amaliy masalalarni hal qilishda muhim ahamiyatga ega. Ishda chiziqli sistemalarni yechish usullari, matritsaning xos son va xos vektori, hamda LU-ajratish usulining mohiyati va samaradorligi qisqacha bayon etilgan. Tadqiqot obyekti chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lib, kurs ishida ularni LU-ajratish usuli bilan yechish amaliy tarzda ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar: LU – ajratish usuli, dekompozitsiya, chiziqli sistema, chiziqli sistemalarni samarali yechish, yuqori uchburchak, quyi uchburchak, matritsa, matritsa dioganali.

Kirish. Hozirgi zamon matematika va amaliy fanlarning ko'plab sohalarida chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish muhim ahamiyat kasb etadi. Fizika, mexanika, iqtisodiyot, axborot texnologiyalari, muhandislik hisoblari va boshqa ko'plab yo'nalishlarda real jarayonlarni modellashtirish aynan chiziqli sistemalar orqali amalga oshiriladi. Shu sababli bunday sistemalarni tez, aniq va samarali yechish usullarini ishlab chiqish va o'rganish dolzarb masalalardan biri hisoblanadi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun turli xil klassik va zamonaviy usullar mavjud bo'lib, ularning har biri ma'lum shartlarda samarali natija beradi. Katta o'lchamli sistemalar bilan ishlashda oddiy usullar ko'p vaqt va hisoblash resurslarini talab qiladi. Shunday sharoitda matritsalarini ajratish (dekompozitsiya) usullariga asoslangan algoritmlar muhim ahamiyatga ega bo'ladi. LU – ajratish (dekompozitsiya) usuli chiziqli sistemalarni yechishning eng samarali va qulay usullaridan biri bo'lib, u berilgan matritsani quyi uchburchak va yuqori uchburchak matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalashga asoslanadi. Ushbu usul yordamida hisoblash jarayoni soddalashadi, hisoblash aniqligi oshadi hamda kompyuter yordamida yechish jarayoni ancha tezlashadi. Mazkur maqolada LU – ajratish usulining nazariy asoslari, uning chiziqli tenglamalar sistemasini yechishdagi ahamiyati hamda ushbu usul yordamida masalalarni samarali yechish imkoniyatlari

yoritib beriladi. Shuningdek, usulning afzalliklari va amaliy qo'llanilishi misollar orqali ko'rsatib o'tiladi.

Asosiy qism LU–ajratish (quyi va yuqori uchburchak faktorizatsiya) usuli – bu matematikani va sonli usullarni qo'llashda matritsani pastki uchburchak (L) va yuqori uchburchak (U) matritsalar ko'paytmasiga ajratishni nazarda tutadi. Boshqacha aytganda, kvadrat matritsa singari A matrisa L va U matritsalarining o'zaro ko'paytmasi tarzida ifodalanadi:

$$A = LU$$

L va U dagi nol strukturalari tufayli bu ajratish Gauss eliminatsiyasining umumiy ko'rinishi hisoblanadi. Algoritmik jihatdan LU ajratish – aslida Gauss eliminatsiyasi bosqichlarini matritsa shaklida tartibga solishdir. LU ajratish usuli odatda chiziqli tenglamalar sistemasi $Ax = b$ ni yechish uchun ishlatiladi. Amaliy hisoblashlarda katta o'lchamli tenglamalar sistemalari (muhandislik, fizikada diskretizatsiya qilingan tenglamalar va boshqa ilmiy modellarda) paydo bo'ladi va ularni yechishda LU faktorizatsiyasi samarali usuldir. Bundan tashqari, LU ajratilgan L va U matritsalaridan yordamida matritsaning determinanti va teskari (inver) matritsasi hisoblash ham soddalashtiriladi. Masalan, determinanti $\det(A)$ ni aniqlashda L va U ning diagonal elementlari ko'paytmasi olinadi, chunki triyangular matritsaning determinantlari diagonal ko'paytmasiga teng. LUP transformatsiya (pivotli LU): Matritsaning ba'zi koeffitsientlari nol yoki kichik bo'lganda, to'g'ri ishlashni ta'minlash uchun satr (yoki ustun)larni almashtirish tavsiya qilinadi. Bunda tartib matritsasi P joriy etiladi va A matritsasi shunday satr almashinuvdan o'tadi: $PA = LU$ yoki analogik holda $A = P^{-1}LU$. P matritsasi obyektlari – permutatsiya matritsasi bo'lib, u satrlarni qayta tartibga soladi. Misol uchun, Doolittle algoritmidan (L ning diagonal elementlari birliklardan iborat bo'ladi) $PA = LU$ ko'rinishida ajratish olib boriladi. Pivotlash muammoli bo'luvchi yechimlar yoki noaniq (nolga yaqin) diagonal elementlar paydo bo'lishining oldini oladi, natijada algoritim barqaror ishlaydi. Shu tarzda, LU faktorizatsiyasi chiziqli tizimni yechishda katta samaradorlikka ega usul sanaladi.

LU ajratish algoritmi ikki bosqichga bo'linadi: faktorizatsiya va yechim topish. Faktorizatsiya bosqichida kiruvchi A matritsasi L va U ga ajratiladi; yechim bosqichida esa hosil bo'lgan L va U dan foydalangan holda $Ax=b$ tenglamasi oldinga va orqaga almashtirish yordamida yechiladi.

Boshlang'ich pivotlash (qarash): Agar kerak bo'lsa, birinchi qadamda satrlar orasidan nolga teng yoki kichik ustun elementini topmaslik uchun pivot tanlanadi. Ya'ni, A matritsasining birinchi ustuni bo'yicha eng katta modulda elementning joylashuvi aniqlanib, unga mos satr matritsaning yuqori qatoriga almashtiriladi. P permutatsiya matritsasi shu satr almashtiruvni bildiradi. Pivotlash LUP dekompozitsiyaga ega bo'lib, satrlarni almashtirgan holda $PA = LU$ tenglamasi olinadi. Ushbu bosqich raqamli stabillikni ta'minlab, nolga bo'lish xatoliklarini kamaytiradi.

L va U elementlarini hisoblash: Faktorizatsiyaning asosiy qismi – L va U ning elementlarini rekursiv formulalar orqali hisoblash. Doolittle metodida L ning diagonal elementlari 1 deb olinadi. Matritsaning i -chi qator, j -chi ustunidagi element a_{ij} bo'lsin. Agar $i \leq j$ bo'lsa, yuqori uchburchak matritsa U ning (i,j) elementi quyidagicha olinadi:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

Agar $i > j$ bo'lsa, pastki uchburchak L matritsasining (i,j) elementi quyidagicha:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{ij}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right)$$

Bu munosabatlar bo'yicha ustun ustuniga (yoki qator qatoriga) iterativ holda U ning bir ustun elementlari, keyin L ning bir ustun multiplikatorlari aniqlanadi. Dastur nuqtai nazaridan, L va U ni quyidagicha yasash mumkin:

For k in $1..n$:

$$L[k,k] = 1$$

$$\text{For } j=k..n: U[k,j] = A[k,j] - \text{sum}_{i=1 \text{ to } k-1} (L[k,i] * U[i,j])$$

$$\text{For } i=k+1..n: L[i,k] = (A[i,k] - \text{sum}_{j=1 \text{ to } k-1} (L[i,j] * U[j,k])) / U[k,k]$$

Ushbu qadamda L matritsasining diagonalini 1 lar bilan to'ldiriladi va har bosqichda A matritsasining tegishli satri/yig'indisi yangilanib boradi (Shur qoldiqi), natijada pastga qarab L , chapga qarab U to'ladilar. L va U ga bo'linish yakunida $A = LU$ yoki $PA = LU$ ifodasi bajarilgan bo'ladi. Oldinga va orqaga almashtirish: Faktorizatsiya tugagach, chiziqli $Ax=b$ tizimi yechishga tayyor bo'ladi. Agar P permutatsiya ishlatilgan bo'lsa, ekranning chap tomoniga P kursatilgan b vektori olinadi: Pb . Avval $Ly = Pb$ tenglama sistemasini yechamiz (oldinga almashtirish), so'ng $Ux = y$ tenglamasini yechamiz (orqaga almashtirish). Triangular matritsalar bo'lgani uchun bu yechimlarni yuqoridan pastga va pastdan yuqoriga bo'lgan oddiy almashtirish bilan hisoblash mumkin. Buning natijasida kerakli x yechim vektori topiladi. Xulosa qilib aytganda, faktorizatsiyadan so'ng tenglamani yechish ikki qadamda bajariladi:

1. Oldinga almashtirish: $Ly = Pb$ ni yechib y topish.
2. Orqaga almashtirish: $Ux = y$ ni yechib x topish.

Shu tarzda avval L va U matritsalarini yordamida yechim bosqichlab olinadi.

LU ajratish usulining bir nechta sezilarli afzalliklari mavjud:

Natijaviylik va takrorlanish: Matritsa A ning LU faktoriga bir martalik ajratilishi $O(n^3)$ hisoblash operatsiyalarini talab qiladi (ya'ni kubik murakkablik). Biroq, undan keyin har safar turlicha b vektori uchun yechim topish $O(n^2)$ murakkablikda, ya'ni oldinga va orqaga almashtirish bilan bajariladi. Bu shuni anglatadiki, bir marta LU faktorizatsiyasi olinganidan keyin turli b qiymatlariga ega tenglamalar sistemasini yechish juda tez kechadi. Masalan, bir xil A matritsasiga ega bo'lib, bir nechta o'zgargan b vektorlari bilan yechim izlash lozim bo'lsa, LU usuli takror-takror Gauss eliminatsiyasini qayta bajarishdan ancha tezroq ishlaydi.

Barqarorlik (stabil): Pivotlash mexanizmi tufayli, ya'ni P matritsasi orqali ketma-ket satr almashtirishlar yordamida algoritmi sonli xatoliklarni kamaytirishga harakat qiladi. Bu LUP usulini oddiy LU ga nisbatan barqarorroq qiladi, chunki

nolga yaqin diagonalalar oldindan aniqlab olinib, katta element bilan almashtiriladi. Shuning uchun murakkab yoki katta hisoblarda raqamiy stabillik o'zini ko'rsatadi.

Amaliy qo'llanishdagi qulaylik: Hosil qilingan L va U matritsalaridan foizlik hisoblashda foydalanish oson. Masalan, matritsaning determinanti oddiygina L va U ning diagonal elementlari ko'paytmasiga teng bo'ladi (pivot bosqichlari e'tiborda olingan holda). Shuningdek, agar kerak bo'lsa, L va U dan foydalangan holda A^{-1} ni topish ham mumkin: A^{-1} har bir birlik vektorini yechish orqali ustunma-ustun topiladi A^{-1} ustunlarini hisoblash uchun bir nechta $Ax = e_i$ tenglamalarini yechish kifoya).

Effektivlik: Amaliy hisoblashlarda LU usuli QR yoki boshqa dekompozitsiyalarga nisbatan tezroq hisoblanadi. Masalan, matritsa o'lchami n bo'lsa, LU faktorizatsiyasi taxminan $\frac{2}{3}n^3$ amaliyotni talab qiladi, holbuki QR faktorizatsiyasi (Householder refleksiylari bilan) $\frac{4}{3}n^3$ operatsiyalarni talab qiladi. Demak, asosiy hisoblash bosqichi jihatdan LU algoritmi o'rtacha ikki barobar tezroq ishlaydi. Yuqoridagi omillar tufayli LU ajratish amaliy informatika va sonli usullar sohasida keng qo'llaniladi, chunki u chiziqli tizimlarni yechishda aniq va samarali algoritmik imkoniyat beradi.

LU faktorizatsiyasi eng ko'p chiziqli tenglamalar sistemasini yechish vazifasida qo'llaniladi. Masalan, muhandislik hisoblarida FDM (Finite Difference Method) va FEM (Finite Element Method) kabi usullarda diskretizatsiya natijasida ko'p o'lchamli chiziqli tenglamalar sistemasini olishadi. Bu yerda LU yordamida matritsa A faktor qilib olinib, keyin x yechimi topiladi. Shuningdek, statistik va mashinada o'rganish modellarida ham regressiya va optimalizatsiya masalalari chiziqli sistemaga olib keladi va ularni tezda yechish uchun ko'pincha LU usuli qo'llanadi.

Tizimga bir nechta o'zgartirilgan o'ng tomon vektorlarini qo'llash zarur bo'lsa (masalan, parametrlar bo'yicha analiz yoki bir nechta yuk holatini tekshirish),

LU ajratish ayniqsa foydalidir. Chunki A ga bo'lgan LU faktorizatsiyasi bir marta hisoblab olinganidan so'ng, har bir o'zgargan b uchun yangi faktorizatsiya qilinmay, faqat oldinga-orqaga almashtirish qilinadi. Shuning uchun katta ma'lumotlar to'plami bilan ishlaydigan ilovalar uchun (masalan, elektr tarmog'i tahlili, termo modellashtirish va hokazo) hisob-kitob samaradorligi oshadi.

LU usuli matritsani teskari o'g'irish va determinant hisoblashda ham foydalidir. Masalan, $\det(A) = L$ ning diagonalidagi birliklardan iborat bo'lganligi sababli faqat U ning diagonal ko'paytmasiga teng (pivot soni eksponentni hisobga olib). Matritsaning inversi esa $Ax = I$ tenglamani A ni oddiygina LU ga ajratib, bir nechta x larni hisoblash orqali olinadi. Shu kabi, amaliy informatika va ilmiy hisoblashda LU ajratish model tahlilida va skriptlarda asosiy usullardan biri sifatida keng qo'llaniladi.

Misol:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 31 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 6x_1 + 18x_2 + 3x_3 + 19x_4 = 33 \end{cases}$$

matritsa ko'rinishiga keltiramiz:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 7 & 17 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 18 & 3 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ 1 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsani 2 ga ajratib olamiz, ya'ni:

L - pastki uchburchak (diagonali 1)

U - yuqori uchburchak

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 7 & 17 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 18 & 3 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 18 & 3 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 18 & 3 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - 3R_1} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 7R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -29 & -42 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - 9R_2} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -29 & -42 \\ 0 & 0 & -45 & -59 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - \frac{45}{29}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -29 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{179}{29} \end{pmatrix} \\
 U &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -29 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{179}{29} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Shu tartibda matritsaning diogonalini 1, yuqori uchburchakni esa 0 ga keltiramiz.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 7 & 17 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 18 & 3 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 18 & 3 & 19 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & \frac{45}{29} & 1 \end{pmatrix}.$$

Endi tenglamalar sistemasini L va U matritsalar yordamida yechib olamiz:

$$Ly = b,$$

$$Ux = y,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & \frac{45}{29} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ 1 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 10 \\ 2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 31 \\ -1 \cdot y_1 + 7 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 1 \\ 3 \cdot y_1 + 9 \cdot y_2 + \frac{45}{29} y_3 + 1 \cdot y_4 = 33 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini yechib y_1, y_2, y_3, y_4 larni qiymatlarini topib olamiz.

$$y_1 = 10,$$

$$2 \cdot 10 + y_2 = 31 \Rightarrow y_2 = 11,$$

$$-1 \cdot 10 + 7 \cdot 11 + 1 \cdot y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = -66,$$

$$3 \cdot 10 + 9 \cdot 11 + \frac{45}{29} \cdot (-66) + y_4 = 33,$$

$$y_4 = \frac{186}{29} \quad y = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -66 \\ \frac{186}{29} \end{pmatrix}.$$

Endi $Ux = y$ formuladan x ni qiymatlarini topamiz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -29 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{179}{29} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -66 \\ \frac{186}{29} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -29 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{179}{29} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -66 \\ \frac{186}{29} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 11 \\ -29x_3 - 42x_4 = -66 \\ \frac{179}{29}x_4 = \frac{186}{29} \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini yechib quyidagi x_1, x_2, x_3, x_4 larning qiymatlarini topib olamiz.

$$x_4 = \frac{186}{29} : \frac{179}{29} = \frac{186}{29} \cdot \frac{29}{179} = \frac{186}{179},$$

$$x_3 = \frac{-66 + 42 \cdot \frac{186}{179}}{-29} = \frac{138}{179},$$

$$x_2 = 11 - 7 \cdot \frac{186}{179} - 5 \cdot \frac{138}{179} = -\frac{23}{179},$$

$$x_1 = \frac{10 - 5 \cdot \frac{186}{179} - \frac{138}{179} - 3 \cdot \left(-\frac{23}{179}\right)}{2} = \frac{791}{358}.$$

$$x = \left(\frac{791}{358}; -\frac{23}{179}; \frac{138}{179}; \frac{186}{179} \right).$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		2	3	1	5			10			
3	A=	4	7	7	17		b=	31			
4		-2	4	5	2			1			
5		6	18	3	19			33			
6											
7		2	3	1	5		2	3	1	5	
8	U=	4	7	7	17		0	1	5	7	
9		-2	4	5	2		-2	4	5	2	
10		6	18	3	19		6	18	3	19	
11											
12		2	3	1	5		2	3	1	5	
13		0	1	5	7		0	1	5	7	
14		0	7	6	7		0	7	6	7	
15		6	18	3	19		0	9	0	4	
16											
17		2	3	1	5		2	3	1	5	
18		0	1	5	7		0	1	5	7	
19		0	0	-29	-42		0	0	-29	-42	
20		0	9	0	4		0	0	-45	-59	
21											

22		2	3	1	5						
23	U=	0	1	5	7						
24		0	0	-29	-42						
25		0	0	0	6.17						
26											
27		2	3	1	5		1	0	0	0	
28	L=	4	7	7	17		2	1	0	0	
29		-2	4	5	2		-1	7	1	0	
30		6	18	3	19		3	9	1.55	1	
31											
32											
33	y1=	10				x1=	2.37				
34	y2=	11				x2=	-0.1				
35	y3=	-66				x3=	0.88				
36	y4=	6.41				x4=	0.96				
37											
38											

Xulosa

Mazkur maqolada chiziqli algebra masalalarini yechishda muhim hisoblangan LU-ajratish (dekompozitsiya) usulining nazariy asoslari va amaliy qo'llanilishi batafsil ko'rib chiqildi. Tadqiqot davomida chiziqli tenglamalar sistemasini to'g'ridan-to'g'ri Gauss usuli bilan yechishga nisbatan LU-ajratishning hisoblash jihatidan samaraliroq ekani asoslab berildi. Xususan, bitta matritsa uchun bir nechta o'ng tomonli vektorlar mavjud bo'lganda, ushbu usul vaqt va resurs tejamkorligini ta'minlaydi. Keltirilgan misolda berilgan kvadrat matritsa $A = LU$ ko'rinishda pastki uchburchak (L) va yuqori uchburchak (U) matritsalariga ajratildi hamda masala $Ly = b$ va $Ux = y$ ketma-ket tizimlari orqali yechildi. Natijada yechimni oldinga va orqaga qo'yish yordamida aniq topish mumkinligi ko'rsatildi. Bundan tashqari, hisoblashlar Excel dasturida ham amalga oshirilib, analitik yechimlarning sonli usullar yordamida tasdiqlanishi amalda namoyon etildi. Shu bilan birga, LU-ajratish usulining determinantni hisoblash, teskari matritsani topish va katta o'lchamli sistemalarni modellashtirishdagi ahamiyati ham yoritildi. Ushbu usul elektr tarmoqlari tahlili, issiqlik almashinuvi (termo modellashtirish), mexanik tizimlar va

boshqa muhandislik hamda amaliy informatika masalalarida keng qoʻllanilishi bilan ajralib turadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari, I. Toshkent, Oʻqituvchi, 2000.
2. Boyzoqov A., Qayumov Sh. “Hisoblash matematikasi asoslari”. Toshkent 2000 yil.
3. Ismatullaev Gʻ.P., Joʻraev Gʻ.U. Hisoblash usullaridan metodik qoʻllanma. Toshkent, Universitet. 2005.
4. Nazirov Sh.A., Musayev M.M., Nematov A.N., Qobulov R.V. “Delphi tilida dasturlash asoslari”, Toshkent. “Gʻ.Gʻulom nashriyoti”. 2008 yil.
5. Qori-Niyoziy T.N. Tanlangan asarlar, Differinsial tenglamalar, Fan, Toshkent, 1968 y.
6. Salahiddinov M.S., Nasriddinov G.N. Oddiy differinsial tenglamalar, Toshkent, “Oʻzbekiston”, 1994 y.