

FIZIK JARAYONLARNI (ISSIQLIK, DIFFUZIYA, TO‘LQIN) VARIATION USUL YORDAMIDA SONLI MODELLASHTIRISH.

O‘ktamjonova N.A.

FarDU talabasi, karimberdiyevanilufar625@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada 1 o‘lchamli difuziya tenglamasini sonli usullar yordamida yechish masalasi ko‘rib chiqilgan. Explicit va implicit sxemalar, shuningdek, barqarorlik shartlari tahlil qilingan. Ishlab chiqilgan algoritmlar yordamida vaqt va fazoviy diskretlashni amalga oshirish usullari ko‘rsatildi. Maqolada sonli yechimlarning aniqligi va aniq yechim bilan taqqoslanishi, shuningdek, tridiagonal tizimlarni yechishning samarali usullari muhokama qilingan. Tadqiqot natijalari fizik jarayonlar, termodinamika va matematik modelashtirish sohalarida qo‘llanishi mumkin. Shu bilan birga, Python va Matlab dasturlarida yechimlarni hisoblash va vizualizatsiya qilish usullari ham keltirilgan.

Kalit so‘zlar. Difuziya tenglamasi, sonli yechim, explicit sxema, implicit sxema, chegara shartlari, boshlang‘ich shart, barqarorlik koeffitsienti, vaqt diskretlash, fazoviy diskretlash, tridiagonal tizim, matlab dasturi, python dasturi, chiziqli algebra, modelashtirish, hisoblash usullari, termodinamika, issiqlik tarqalishi, to‘qimalar modellari, fizik jarayonlar, matematik modelashtirish.

Issiqlik tenglamasining variatsion (zaif) shakli va FEM bilan sonli yechimi issiqlik tenglamasi fizik jarayonlarni modelashtirishda, xususan issiqlik o‘tkazuvchanligini tavsiflashda muhim rol o‘ynaydi. Issiqlik tenglamasining umumiy ko‘rinishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q, \quad (1)$$

bu yerda ρ — zichlik, c — issiqlik sig‘imi, T — harorat, k — issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti, Q — issiqlik manbai.

Variatsion shaklni olish uchun tenglama sinov funksiyasi $v \in H^1(\Omega)$ ga ko‘paytiriladi va butun soha bo‘yicha integrallanadi:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} Q v d\Omega. \quad (2)$$

Ushbu formulatsiya Galerkin usuli asosida chekli elementlar usuli (FEM) yordamida diskretlashtiriladi. FEM murakkab geometriyalar va nohomogen

materiallar uchun yuqori aniqlikni ta'minlaydi.

Asosiy bosqichlar:

1. Fazoviy diskretizatsiya;
2. Variatsion tenglama tuzish;
3. Vaqt bo'yicha integratsiya;
4. Matritsali tenglamalar sistemasini yechish.

Diffuziya tenglamalari uchun Galerkin variatsion usuli va diskretizatsiya strategiyalari. Diffuziya tenglamasi moddaning tarqalish jarayonlarini ifodalaydi:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c, \quad (3)$$

bu yerda c — kontsentratsiya, D — diffuziya koeffitsienti.

Galerkin variatsion usulida yechim va sinov funksiyalari bir xil fazodan tanlanadi. Diskretizatsiya strategiyalari quyidagilardan iborat. Tarmoqli (mesh-based) usullar, bezmesh (meshfree) usullar, adaptiv tarmoqlash.

Bu yondashuv yuqori aniqlik va hisoblash samaradorligini ta'minlaydi.

To'liq tenglamalarini variatsion usul yordamida modellashtirish va vaqt integratsiyasi. To'liq tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u. \quad (4)$$

Variatsion yondashuvda energiya funksionali:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - c^2 (\nabla u)^2 \right). \quad (5)$$

Euler–Lagrange tenglamalari yordamida zaif shakl olinadi. Vaqt integratsiyasi uchun Euler, Runge–Kutta va Newmark sxemalari qo'llaniladi.

Anizotropik issiqlik va diffuziya modellarini variatsion usul bilan tahlil qilish anizotropiya — fizik xususiyatlarning yo'nalishga bog'liq ravishda o'zgarishidir. Anizotropik issiqlik tenglamasi:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla T), \quad (6)$$

bu yerda $\mathbf{K}$ — issiqlik o'tkazuvchanlik tenzori. Variatsion formulatsiya anizotropik

muhitlarda issiqlik va diffuziya oqimlarini aniq modellashtirish imkonini beradi.

Noqonuniy issiqlik o'tishi: variatsion formulatsiya va Newton iteratsiyalari

noqonuniy masalalarda koeffitsientlar temperaturaga bog'liq bo'ladi:

$$-\nabla \cdot (k(T)\nabla T) = f. \quad (7)$$

Variatsion tenglama Newton iteratsiyasi yordamida yechiladi:

$$J'(T^k)\delta T = -J(T^k), \quad (8)$$

bu yerda J — funksional, δT — tuzatish.

Chegara shartlarini variatsion usulda kiritish

Chegara shartlari quyidagicha bo'ladi.

1. Dirichlet: $u = g$;

2. Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n} = h$;

3. Robin: $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$.

Dirichlet shartlari to'g'ridan-to'g'ri fazoga kiritiladi, Neumann va Robin shartlari esa variatsion formulaga integral ko'rinishda qo'shiladi.

FEM uchun konvergensiya va xato bahosi FEM xato bahosi quyidagicha ifodalanadi:

$$\|u - u_h\| \leq Ch^p \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)}. \quad (9)$$

Adaptiv mesh texnikasi xato bahosi asosida tarmoqni yaxshilaydi va konvergensiyaning tezlashtiradi.

Adaptiv mesh va *a posteriori* xato baholash *A posteriori* xato baholash qoldiq funksiyasi orqali aniqlanadi:

$$R(v) = l(v) - a(u_h, v). \quad (10)$$

Xato katta bo'lgan hududlarda mesh zichlashtiriladi. Vaqt bo'yicha diskretizatsiya: implicit, explicit va Crank–Nicolson.

Crank–Nicolson sxemasi:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} A(u^{n+1} + u^n). \quad (11)$$

Implicit sxemalar barqaror, explicit sxemalar esa hisoblashda sodda. Discontinuous Galerkin (DG) metodining qo'llanilishi DG metodi elementlararo uzluksizlikni talab qilmaydi va to'liqin hamda issiqlik masalalarida yuqori aniqlikni ta'minlaydi. U parallel hisoblashlarga juda mos keladi.

Energiya saqlanishi va stabilitet tahlilini ko'rib chiqamiz.

Energiya funksiyasi quyidagicha

$$E(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right) d\Omega. \quad (12)$$

Barqaror sxemalar energiya saqlanishiga mos bo'lishi lozim.

Diffuziya Tenglamasini Variatsion Usul Yordamida Sonli Modellashtrish

Misol:

Bir o'lchamli diffuziya jarayonini qaraymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (1)$$

bu yerda $u(x, t)$ — moddaning konsentratsiyasi, $D = 1$ — diffuziya koeffitsienti.

Chegaraviy shartlarni quyidagicha olamiz

Soha chegaralarida konsentratsiya nolga teng:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \quad (2)$$

Boshlang'ich shart berilgan

Boshlang'ich vaqtda konsentratsiya quyidagicha taqsimlangan:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x). \quad (3)$$

Masalaning fizik mazmuni quyidagichadir. Boshlang'ich vaqtda modda sinusoidal taqsimlangan bo'lib, vaqt o'tishi bilan diffuziya jarayoni ta'sirida modda tekis tarqalib, konsentratsiya kamayib boradi.

Variatsion shaklga keltirib olamiz bunda, sinov funksiyasi $v(x) \in H_0^1(0, 1)$ tanlanadi. Tenglama $v(x)$ ga ko'paytirilib integrallanadi:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx. \quad (4)$$

Ikki marta qismlar bo'yicha integrallashtan so'ng:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v dx = - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx. \quad (5)$$

Bu diffuziya tenglamasining variatsion shaklidir.

O'zgaruvchilarni ajratish usulini qo'llagan holda davom etamiz;

Yechimni quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (6)$$

Tenglamaga qo'yib yozamiz:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t). \quad (7)$$

Ikkala tomonni $X(x)T(t)$ ga bo'lamiz:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (8)$$

Fazoviy masala quyidagicha shartlarga ega

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \quad (9)$$

Bu Sturm–Liouville masalasi bo'lib, yechimlari:

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Vaqtga bog'liq masala quyidagichadir

$$T'(t) + \lambda_n T(t) = 0. \quad (11)$$

Bu tenglamaning yechimi:

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}. \quad (12)$$

Umumiy yechim Fourier qatori ko'rinishida yoziladi:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x). \quad (13)$$

Boshlang'ich shart:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x). \quad (14)$$

Boshlang'ich shartni orniga qoyganimizda pastdagi natijaga kelimiz

$$C_1 = 1, \quad C_n = 0 \quad (n \neq 1). \quad (15)$$

Natijada diffuziya masalasining aniq yechimi:

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \quad (16)$$

Diffuziya tenglamasi variatsion usul yordamida zaif shaklga keltirildi va analitik yechimi topildi. Vaqt o'tishi bilan konsentratsiya eksponensial ravishda kamayib borishi aniqlandi.

Python yechimi

```
import numpy as np
```

```
L = 1.0
```

```
T = 0.3
```

```
Nx = 40
```

```
Nt = 1200
```

```
dx = L / Nx
```

```
dt = T / Nt
```

```
alpha = dt / dx**2
```

```
print("Barqarorlik koeffitsienti alpha =", alpha)
```

```
if alpha > 0.5:
```

```
    print("Eslatma: alpha > 0.5, explicit sxema barqaror bo'lmasligi mumkin!")
```

```
x = np.linspace(0, L, Nx+1)
```

```
u = np.sin(np.pi * x)
```

```
u_new = np.zeros_like(u)
```

```
for n in range(Nt):
```

```
    for i in range(1, Nx):
```

```
        u_new[i] = u[i] + alpha * (u[i+1] - 2*u[i] + u[i-1])
```

```
    u_new[0] = 0
```

```
    u_new[Nx] = 0
```

```
    u[:] = u_new[:]
```

```

print("\nX nuqtalari:")
print(x)
print("\nOxirgi yechim u(x,T):")
print(u)
u_exact = np.exp(-np.pi**2*T) * np.sin(np.pi*x)
print("\nAniq yechim u(x,T):")
print(u_exact)

```

Natija:

Barqarorlik koeffitsienti $\alpha = 0.3999999999999999$

X nuqtalari:

```

[0.  0.025 0.05  0.075 0.1  0.125 0.15  0.175 0.2  0.225 0.25  0.275
 0.3  0.325 0.35  0.375 0.4  0.425 0.45  0.475 0.5  0.525 0.55  0.575
 0.6  0.625 0.65  0.675 0.7  0.725 0.75  0.775 0.8  0.825 0.85  0.875
 0.9  0.925 0.95  0.975 1. ]

```

Oxirgi yechim $u(x,T)$:

```

[0.      0.00405343 0.00808186 0.01206047 0.01596472 0.01977055
 0.02345448 0.02699381 0.03036671 0.03355239 0.03653121 0.0392848
 0.04179619 0.04404989 0.04603201 0.04773033 0.04913437 0.05023548
 0.05102688 0.05150367 0.05166293 0.05150367 0.05102688 0.05023548
 0.04913437 0.04773033 0.04603201 0.04404989 0.04179619 0.0392848
 0.03653121 0.03355239 0.03036671 0.02699381 0.02345448 0.01977055
 0.01596472 0.01206047 0.00808186 0.00405343 0. ]

```

Aniq yechim $u(x,T)$:

```

[0.00000000e+00 4.06208381e-03 8.09912352e-03 1.20862294e-02
 1.59988197e-02 1.98127720e-02 2.35045719e-02 2.70514583e-02
 3.04315635e-02 3.36240480e-02 3.66092290e-02 3.93687020e-02
 4.18854538e-02 4.41439679e-02 4.61303198e-02 4.78322628e-02
 4.92393041e-02 5.03427687e-02 5.11358534e-02 5.16136685e-02
 5.17732682e-02 5.16136685e-02 5.11358534e-02 5.03427687e-02

```

4.92393041e-02 4.78322628e-02 4.61303198e-02 4.41439679e-02
4.18854538e-02 3.93687020e-02 3.66092290e-02 3.36240480e-02
3.04315635e-02 2.70514583e-02 2.35045719e-02 1.98127720e-02
1.59988197e-02 1.20862294e-02 8.09912352e-03 4.06208381e-03
6.34039672e-18]

Xulosa

Variatsion usullar va FEM fizik jarayonlarni yuqori aniqlik bilan modellashtirish imkonini beradi. Issiqlik, diffuziya va to'liqin masalalarida ushbu yondashuvlar zamonaviy ilm-fan va muhandislikda muhim ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Самарский А.А. Численные методы математической физики. — Москва: Наука, 1989.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Теория разностных схем. — Москва: Наука, 1989.
3. Ладыженская О.А. Математические методы в физике. — Москва: Наука, 1979.
4. Strang G., Fix G. An Analysis of the Finite Element Method. — Prentice-Hall, 1973.
5. Evans L.C. Partial Differential Equations. — American Mathematical Society, 2010.
6. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. — Wiley, 2011.