

VATARLAR USULI VA UNING NYUTON USULIGA NISBATAN AFZALLIKLARI.

Ismoilov A.I¹., Abdullayeva D.D².

¹FarDU dotsenti, f.-m.f.b.f.d.(PhD), ismoilovaxrorjon@yandex.com

²FarDU talabasi, dilfuzaabdullayeva.13@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishning ikkita muhim iteratsion usuli — Nyuton usuli va Vatarlar usuli qiyosiy tahlil qilinadi. Har ikki usulning matematik asoslari, iteratsion formulalari, yaqinlashish shartlari batafsil ko'rib chiqilgan. Usullarning afzalliklari va kamchiliklari amaliy misol orqali namoyishetilgan bo'lib, ularning har biri qanday sharoitlarda qo'llanishi mumkinligi tahlil qilingan. Nyuton usulining kvadratik yaqinlashish tezligi va Vatarlar usulining hosilani talab qilmaslik xususiyatlari solishtirilgan. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, usullarning tanlanishi funksiyaning xususiyatlariga, hisoblash imkoniyatlariga va talab qilinadigan aniqlik darajasiga bog'liq.

Kalit so'zlar: Nyuton usuli, Vatarlar usuli, iteratsion yechim, chiziqli bo'lmagan tenglama, kvadratik yaqinlashish, hosila, sonli usullar, yaqinlashish tezligi.

Kirish

Zamonaviy matematik modellashtirish va hisoblash matematikasida chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechish dolzarb muammolardan biridir. Muhandislik, fizika, iqtisod, meteorologiya va boshqa ko'plab fan sohalarida tabiiy hodisalar ko'pincha chiziqli bo'lmagan matematik modellar orqali ifodalanadi. Bunday tenglamalarning ko'pchiligi analitik yechimga ega bo'lmagani yoki ularni topish juda murakkab bo'lgani sababli, sonli usullarning ahamiyati ortib bormoqda.

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishning iteratsion usullari orasida Nyuton usuli (urinmalar usuli) va Vatarlar usuli alohida o'rin tutadi. Bu usullar ildizga yaqinlashishning samarali mexanizmlarini taqdim etadi va turli amaliy masalalarni yechishda keng qo'llaniladi.

Nyuton usuli o'zining kvadratik yaqinlashish tezligi bilan ajralib turadi. Bu usul har bir iteratsiya qadamida funksiyaning hosilasidan foydalanadi, natijada

judatez yaqinlashishga erishiladi. Biroq, usulning muvaffaqiyati boshlang'ich yaqinlashishning to'g'ri tanlanishiga va funksiyaning hosilasining mavjudligiga bog'liq.

Vatarlar usuli esa Nyuton usulining hosilasiz varianti sifatida rivojlangan. Bu usul funksiyaning hosilasini talab qilmaydi, balki ikki nuqta orasidagi vatardan foydalanadi. Garchi yaqinlashish tezligi Nyuton usuliga nisbatan biroz pastroq bo'lsa-da, u ko'plab amaliy holatlarda qulay va samarali yechim beradi. Ushbu tadqiqotning maqsadi Nyuton va Vatarlar usullarini qiyosiy tahlil qilish, ularning afzalliklari va kamchiliklarini aniqlash, shuningdek turli sharoitlarda qaysi usulni qo'llash maqsadga muvofiq ekanligini ko'rsatishdir. Tadqiqotda usullarning nazariy asoslari, iteratsion formulalari, yaqinlashish shartlari batafsil ko'rib chiqiladivam amaliy misolorqaliularningishlash prinsiplari namoyish etiladi. Tadqiqotning dolzarbligi shundaki, zamonaviy axborot texnologiyalari rivoji bilan birga murakkab matematik modellarni yechish talablari oshib bormoqda. Shuningdek, sun'iy intellekt, ma'lumotlarni qayta ishlash, optimallashtirish masalalari kabi sohalarda chiziqli bo'lmagan tenglamalarni samarali yechish algoritmlarini bilish mutaxassislaruchun muhim ko'nikma hisoblanadi.

Tenglamalarning vatarlar usuli bilan yechilishi:

Amaliyotda, ba'zi masalalarda

$$f(x) = 0$$

ko'rinishdagi bir noma'lumli chiziqsiz tenglamalarni yechishga to'g'ri keladi.

Bunda $f(x) = 0$ $[a, b]$ oraliqda aniqlangan funksiya bo'lib, $f(t) = 0$ bo'lsa, $x = t$ ni $f(x) = 0$ tenglamaning yechimi - ildizideyiladi. Tenglamaning aniq yechiminitopishqiyin bo'lgan hollarda uningtaqribiy yechimini topish to'g'rikeladi, bu ikki bosqichga bo'linadi:

1. Yechimni ajratish (yakka lash), ya'ni yagona yechim yotgan intervalni aniqlash;
2. Taqribiy yechimni topilgan intervalda berilgan aniqlikda topish.

Tenglamaning yagona yechimi yotgan oraligni aniqlash uchun quyidagi teoremadan foydalaniladi.

1-teorema. Aytaylik,

1. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va (a, b) intervalda hosilaga ega bo'lsin;

2. $f(a) \cdot f(b) < 0$ ya'ni $f(x)$ funksiya kesmaning chetlaridaxil ishoraga ega bo'lsin;

3. $f'(x)$ hosila (a, b) intervalda o'zishorasini saqlasin;
u holda, $f(x) = 0$ tenglama $[a, b]$ oraliqda yagona yechimga ega bo'ladi.

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni ikki xilga bo'lish mumkin: algebraik va transsendent. Algebraik tenglamalar deb algebraik (butun, rasional, irrasional) funksiyalardan tashkil topgan tenglamalarga aytiladi. Agar tenglamada boshqa funksiyalar (trigonometrik, ko'rsatkichli, logarifmlik va h.k.) qatnashsa, bunday tenglamaga transsendent tenglamadeyiladi.

Tenglamaning yechimi deb x noma'lumning shunday qiymatlariga aytiladiki, ularni $f(x) = 0$ tenglamaga qo'yganda, tenglama qanoatlantiriladi. Lekin, amalda bunday tenglamalarning aniq yechimlarini topish juda qiyin yoki umuman mumkin emas. Bunday hollarda, yechimni taqribiy qiymatini topishga imkon beruvchi taqribiy hisoblash usullari qo'llaniladi. Chiziqsiz tenglamalarni yechish usullari ikkita guruhga bo'linadi: aniq (to'g'ri) va iteratsion (taqribiy) usullar.

Aytaylik, berilgan $f(x) = 0$ tenglamadagi $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda 1-teoremaning hammasi shartlarini qanoatlantirsin. Bundan tashqari $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda ikkinchi tartibli $f''(x) = 0$ uzluksiz hosilaga ega bo'lib, bu hosila shu oraliqda o'zishorasini saqlasin, ya'ni quyidagi teorema o'rinli bo'lsin.

2-teorema. Agar $[a, b]$ kesmada

1. $f(x), f'(x)$ funksiyalar uzluksiz, $f''(x)$ mavjud bo'lsa;

2. $f(a) \cdot f(b) < 0$, ya'ni $f(x)$ funksiya kesmaning chetlarida har xil ishoraga ega bo'lsa;

3. $f''(x), f''(x)$ hosilalar $[a, b]$ kesmada o'z ishorasini saqlasa, $f(x) = 0$ tenglama ildizini aniqlash uchun vatarlar usuli yordamida qurilgan ketma-ketlik ildizga yaqinlashuvchi bo'ladi.

Avval $A(a, f(a))$ va $B(b, f(b))$ nuqtalardan vatar o'tkazaylik (1-rasm). U Ox o'qini c_0 nuqtada kesib o'tadi. Ma'lumki, vatarni OX o'qi bilan kesishishidan hasil bo'lgan nuqtaning abssissasi:

$$c_0 = a - \frac{b - a}{f(a) - f(b)} f(b)$$

dan iborat bo'ladi. Bu nuqtani dastlabki yaqinlashish sifatida olishimiz mumkin.

Lekin, keyingi vatarlarni qayerdan o'tkazamiz degan savol tug'iladi. Buning uchun, oraligni qo'zg'almas nuqtasini $f(a) \cdot f(c_0) < 0$ sharti yordamida aniqlab olishimiz kerak. Chizmadan ko'rinib turibdiki, $f(a) \cdot f(c_0) < 0$ agar sharti bajarilsa, $b = c$ bo'lib, anuqta qo'zg'almas bo'ladi, aks holda $a = c$ bo'lib, b nuqta qo'zg'almas bo'ladi. Ildizga $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ ketma-ketlik $f(x)$ funksiyaning vatarlarini OX o'qi bilan kesishish nuqtalarini tashkil qiladi.

$$c = a - \frac{b - a}{f(a) - f(b)} f(b)$$

formuladan esa ishchi formula sifatida foydalanamiz. Urinmalar usulidagi singari bu usulda ham $f(a) \cdot f''(a) > 0$ sharti bajarilsa ishchi formula yordamida topilgan qiymatlar yechimga yaqinlashuvchan bo'ladi. Jarayon kerakli aniqlikdagi yechim olinmaguncha ya'ni $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ shart bajarilmaguncha davom etaveradi.

Usulning qulayliklari:

- Iteratsion jarayonning yaqinlashishi aniq shartlarasosidakafolatlangan;
- Oraliqniteng ikkiga bo'lish usuliga nisbatan kamida 2-3 marta tezroq yaqinlashish tezligiga ega;
- Sodda algoritmik tuzilishga ega bo'lib, dasturlashda osonamalga oshiriladi.

Usulning kamchiliklari:

- Agar $[a,b]$ intervalda hech qanday ildiz mavjud bo'lmasa yoki bir nechta ildizlar bo'lsa, iteratsion jarayon cheksizdavometishim mumkin;
- $f(x)$ funksiya grafigi $[a,b]$ kesmada juda yotiq (horizontal) bo'lsa, ya'ni bo'lsa, $f(a) - f(b)$ farqi katta bo'ladi va bu hisoblashlarda raqamli xatolikni oshirishi mumkin;
- Bunday holatlarda dixotomiya (intervalni ikkiga bo'lish) usuliga o'tish tavsiya etiladi.

Nyuton usuli (Urinmalar usuli)

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishning eng samarali usuli bu Nyuton usulidir. Bu usulning g'oyasi asosida tadqiq qilinayotgan $f(x)$ funksiyani undan soddaroq bo'lgan funksiyaga, ya'ni uning urinmaga almashtirishdan iborat.

Geometrik nuqtai nazardan, dastlab x_0 nuqta orqali $f(x)$ funksiyaning egri chiziqli grafigiga urinma o'tkaziladiv uning absissa o'qi bilan kesishish nuqtasining absissasi topiladi (1-rasm).

$f(x)$ funksiyaning egri chiziqli grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasi orqali o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

keyingi x_1 yaqinlashish urinmaning absissa o'qi bilan kesishish nuqtasi bo'lib, bu nuqta ushbu

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

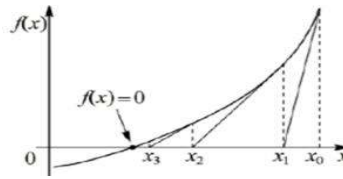
1. Iteratsiyalarning maksimal soni. Bu kriteriyadan usul yaqinlashmagan holda foydalanish lozim. Shunga qaramasdan talab qilingan aniqlikni qanoatlantiruvchi iteratsiyalar sonini oldindan aniqlash juda qiyin.

2. Ildizga yaqinlashishning kuchsiz variatsiyasi

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \text{ yoki } |x_{n+1} - x_n| < |x_{n+1}|$$

Funksiyaning yetarlicha kichik qiymati $|f(x_n)| < \varepsilon$

4.



1-rasm: Nyuton usulining geometrik talqini.

formuladan topiladi. Bu jarayonni $M_1, \dots, M_{n-1}$ nuqtalaruchun xuddishunday davom ettirib va

$$f'(x) \neq 0$$

ekanligini e'tiborga olib, ushbu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

formulaga kelamiz, bunda $[a; b]$ kesmada $x_0 = a$, agar $f(a) \cdot f(x) > 0$ bo'lsa va $x_0 = b$ agar $f(b) \cdot f(x) > 0$ bo'lsa.

Shakli o'zgartirilgan formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Bu formuladan foydalanilganda yaqinlashish tezligi bir oz sustlashadi.

Urinmalar (Nyuton) usuli shartli yaqinlashuvchi usul bo'lib, uning yaqinlashishi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

($\bar{x}$ - ildizning haqiqiy qiymati) uchun ildiz izlanayotgan sohada quyidagi shart bajarilishi zarur:

$$f(x_n) \cdot f'(x_n) < [f(x_n)].$$

Ixtiyoriy boshlang'ich (nolchi) yaqinlashish x_0 da iteratsiya yaqinlashuvchi bo'ladi, agar yuqoridagi shart bajarilsa.

Aks holda, yaqinlashish faqat ildizning ma'lum bir atrofida bajariladi.

Nyuton usuli ikkinchi tartibli yaqinlashish tezligiga ega. Bu shuni bildiradiki, ildiz yaqinida xatolik quyidagi qonun bo'yicha kamayib boradi:

$$\varepsilon_i = C \cdot \varepsilon_{i-1}^2$$

bu yerda ε_i - i-chi iteratsiyadagixatolik, C - doimiy koeffitsient.

Shuninguchun Nyuton usulining iteratsiyalari judatez yaqinlashadi, chunki yuqoridagi 2-shartning bajarilishi uchun bir nechta iteratsiyaning o'zi yetarli. Agar dasturda $i > 10$ da ham 2-yakunlanish sharti bajarilishi kuzatilmasa, demak yoki formulada yoki dasturda xatolik bor degan xulosaga kelish kerak.

Usulning ustunliklari:

- Ya'ni, yaqinlashish tezligi boshqa iteratsion usullarga (vatarlar, intervalni ikkiga bo'lish) qaraganda ancha tez;
- Bu xususiyat boshlang'ich yaqinlashishni ildizga yaqinroq tanlaganda yanada yaqqol seziladi;
- Kvadratik yaqinlashishga ega bo'lib, xatolik har bir iteratsiyada kvadrat bo'yicha kamayadi: $\varepsilon_{n+1} = C \cdot \varepsilon_n^2$
- Ko'phollarda 5-10 iteratsiyada yetarlicha aniqlikkaerishish mumkin.

Usulning kamchiliklari:

- Boshlang'ich yaqinlashishni to'g'ritanlash murakkab va muhim. Agar x_0 noto'g'ri tanlansa usul sekin yaqinlashi cheksiz siklga tushishi yoki umuman divergensiya qilishi mumkin.
- Har bir iteratsiya qadamida hisoblashlar boshqa usullardagiga qaraganda ko'p.

Misol: Ildizni ikkala usulda ham topish. Biz $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ tenglamaning ildizini topishni ko'rib chiqamiz.

Birinchi qadamda, ildiz qayerda joylashganini bilish uchun ba'zi qiymatlarni sinab ko'ramiz:

$$f(2) = 2^3 - 2(2) - 5 = 8 - 4 - 5 = -1;$$

$$f(3) = 3^3 - 2(3) - 5 = 27 - 6 - 5 = 16.$$

Ildiz 2 va 3 orasida joylashgan. Boshlang'ich taxmin sifatida $x_0 = 2$ va $x_1 = 3$ ni olamiz.

Nyuton usulida yechish

1-qadam : Hosilani topish $f(x) = x^3 - 2x - 5$ $f'(x) = 3x^2 - 2$

2-qadam: Birinchi iteratsiya ($n = 1$)

Boshlang'ich qiymatsifatida $x_0 = 2$ ni olamiz.

$$f(2) = -1$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$x_1 = 2 - \frac{-1}{10} = 2 + 0.1 = 2.1$$

3-qadam : Ikkinchi iteratsiya ($n = 2$); $x_1 = 2.1$

$$f(2.1) = (2.1)^3 - 2(2.1) - 5 = 9.261 - 4.2 - 5 = 0.061 \quad f'(2.1)$$

$$= 3(2.1)^2 - 2 = 3(4.41) - 2 = 13.23 - 2 = 11.23$$

$$x_2 = 2.1 - \frac{0.061}{11.23} \approx 2.1 - 0.00543188 \approx 2.094568$$

Vatarlar usulida yechish

Vatarlar usuli uchun ikkita boshlang'ich qiymat kerak: $x_{-1} = 2$; $x_0 = 3$

1-qadam: Kerakli qiymatlarni hisoblash $x_{-1} = 2 \Rightarrow f(x_{-1}) = -1$

$$x_0 = 3 \Rightarrow f(x_0) = 16$$

2- qadam: Birinchi iteratsiya ($n = 0$)

$$x_1 = x_0 - f(x_0) \frac{x_0 - x_{-1}}{f(x_0) - f(x_{-1})}$$

$$x_1 = 3 - 16 \frac{3 - 2}{16 - (-1)} = 3 - 16 \cdot \frac{1}{17} = 3 - \frac{16}{17}$$

$$x_1 = 3 - 0.941176 = 2.058824$$

3-qadam: Ikkinchi iteratsiya ($n = 1$)

Endi $x_0 = 2.058824$ va $x_{-1} = 3$:

$$f(x_0) = f(2.058824) = (2.058824)^3 - 2(2.058824) - 5$$

$$\approx 8.727 - 4.117648 - 5 = -0.390648$$

$$f(x_{-1}) = 16$$

$$x_2 = 2.058824 - (-0.390648) \cdot \frac{2.058824 - 3}{-0.390648 - 16}$$

$$x_2 = 2.058824 + 0.390648 \cdot \frac{-0.941176}{-16.390648}$$

$$x_2 = 2.058824 + 0.390648 \cdot 0.057426 \approx 2.058824 + 0.022424 \approx 2.081248$$

Afzalliklarni qiyosiy tahlil:

Nyuton usulining asosiy afzalligi uning yuqori tezligi (kvadratik yaqinlashish)dir. Biroq, bu afzallik funksiyaning hosilasini hisoblash qiyin yoki qimmat bo'lgan hollarda yo'qoladi.

Vatarlar usulining asosiy afzalligi esa:

1. Hosilani talab qilmaydi — bu, ayniqsa, funksiyaning hosilasini analitik topish qiyin bo'lgan hollarda muhim,
2. Hosilani sonli hisoblash talab qilinmaydi,
3. Hisoblash algoritmi sodda.

Agar funksiyaning hosilasini topish murakkab yoki imkonsiz bo'lsa, Vatarlar usuli matematik jihat- dan ancha qulay va afzalroqdir, chunki u faqat funksiyaning qiymatlariga tayanadi. Yaqinlashish tezligi (kvadratik yaqinlashuv) Nyuton usuliga juda yaqin bo'lganligi sababli, bu soddalashtirish katta yo'qotishga olib kelmaydi. Ammo, agar hosilani sonli hisoblash mumkin bo'lsava boshlang'ich yaqinlashishni to'g'ri tanlash mumkin bo'lsa, Nyuton usuli tezroq natija beradi.

Xulosa

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishning Nyuton va Vatarlar usullari o'rtasidagi solishtirma tahlil shuniko'rsatadiki, har ikki usul ham o'ziga xos afzalliklarga ega:

Nyuton usuli o'zining kvadratik yaqinlashish tezligi tufayli eng samarali hisoblash usuli hisoblanadi. Bu usul ildizga juda tez yaqinlashadi va kamiteratsiyadayuqorianiqlikka erishishimkonini beradi. Biroq, uning muvaffaqiyati boshlang'ich yaqinlashishning to'g'ri tanlanishiga va funksiyaning hosilasining mavjudligiga bog'liq.

Vatarlar usuli esa Nyuton usulining hosilasiz versiyasi bo'lib, hosilani hisoblashni talab qilmasligi bilan ajralib turadi. Bu xususiyat uni murakkab funksiyalarni yechishda, ayniqsa hosilani analitik topish qiyin bo'lgan hollarda, afzalroq qiladi. Garchi yaqinlashish tezligi Nyuton usuliga nisbatan biroz sekinroq bo'lsada, u barqaror vaishonchlinatijalar beradi.

Ushbu maqolani o'qiyotgan o'rganishni endi boshlagan talabalarga shuni ayta olamanki, Agar funksiyaning hosilasi oson hisoblansa va boshlang'ich yaqinlashish aniq tanlangan bo'lsa, Nyuton usuli afzalroqdir.

Agar hosilani hisoblash qiyin yoki mumkin bo'lmasa, yoki barqarorlik muhim ahamiyatga ega bo'lsa, Vatarlar usulidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Ikkala usul ham zamonaviy hisoblash tizimlarida samarali amalga oshirilishi mumkin va matematik modellashtirishning asosiy vositalari hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Isaev I. "Sonli usullar", Toshkent, 2015.
2. Burden R., Faires J. "Numerical Analysis", Cengage Learning, 2010.
3. Amaliy modellashtirish bo'yicha xalqaro maqolalar (Google Scholar)
4. Abdirashidov A., Babayarov A.I. "Hisoblash usullari" mexaniklar uchun amaliy mashg'ulotlar 1-qism.