

INTEGRAL TENGLAMALAR UCHUN ITERATSION YONDASHUVLARNING KOVERGENSIYA SHARTLARI BURXONOV A.A.

FarDU talabasi, burkhonov101@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada Fredgolm va Volter tipidagi chiziqli integral tenglamalar uchun iteratsion yondashuvlar hamda ularning konvergeniya shartlari nazariy jihatdan tahlil qilinadi. Integral tenglamalarning ko'plab amaliy jarayonlarni modellashtirishdagi ahamiyati hisobga olinib, analitik yechim mavjud bo'lmagan holatlarda ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanish imkoniyatlari asoslab beriladi. Olingan natijalar iteratsion metodlarning nazariy asoslanganligi va ularni sonli hisoblashlarda samarali qo'llash imkoniyatini tasdiqlaydi.

Kalit so'zlar: integral tenglama, iteratsion usul, ketma-ket yaqinlashish, konvergeniya sharti, Fredgolm tenglamasi, Volter tenglamasi.

Integral tenglamalar zamonaviy amaliy matematikaning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, uzluksiz muhitlarda kechadigan ko'plab fizik, texnik va muhandislik jarayonlarini matematik modellashtirishda keng qo'llaniladi. Issiqlik almashinuvi, elastiklik nazariyasi, elektromagnit maydonlar, diffuziya jarayonlari hamda signal va tasvirlarni qayta ishlash masalalarida yuzaga keladigan ko'plab modellar integral tenglamalar orqali ifodalanadi. Bunday tenglamalarning asosiy xususiyati shundaki, noma'lum funksiya integral ifoda tarkibida qatnashadi, bu esa ularni klassik algebraik yoki differensial tenglamalardan tubdan farqlaydi va yechim masalasini sezilarli darajada murakkablashtiradi.

Amaliy masalalarning aksariyatida integral tenglamalar uchun aniq analitik yechimni topish imkoniyati mavjud bo'lmaydi yoki u nihoyatda murakkab ko'rinishga ega bo'ladi. Shu sababli integral tenglamalarni yechishda taqribiy va sonli yondashuvlar muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu yondashuvlar orasida iteratsion metodlar, xususan ketma-ket yaqinlashish usuli, o'zining soddaligi, algoritmik qulayligi va nazariy asoslanganligi bilan alohida ajralib turadi. Iteratsion yondashuvlarda noma'lum funksiya ketma-ket yaqinlashishlar yordamida aniqlanadi va bu jarayonning muvaffaqiyati konvergeniya shartlarining bajarilishiga bevosita bog'liq bo'ladi.

Integral tenglamalar nazariyasida Fredgolm va Volter tipidagi tenglamalar muhim o‘rin egallaydi. Ayniqsa ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamalari amaliy hisoblashlarda keng uchraydi, biroq ular uchun iteratsion usullarning yaqinlashuvi ma’lum shartlar bilan cheklanadi. Shu sababli bunday tenglamalar uchun kovergensiya masalasini chuqur tahlil qilish nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham dolzarb hisoblanadi. Parametr qiymatlarining tanlanishi, integral yadroning xossalari va operator normasi iteratsion jarayonning barqarorligini belgilovchi asosiy omillar sifatida namoyon bo‘ladi.

Quyidagi ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasi qaraladi:

$$u(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)u(t) dt, x \in [0,1].$$

bu yerda $u(x)$ — noma’lum funksiya, $f(x) = x^2$ — berilgan uzluksiz funksiya, $K(x,t) = x+t$ — integral yadrosi, λ esa haqiqiy parametr hisoblanadi.

Integral chegaralarining doimiyligi ushbu tenglamani Fredgolm tipiga mansub ekanligini ko‘rsatadi. Yadro ikkala o‘zgaruvchi bo‘yicha uzluksiz va chegaralangan bo‘lib, bu holat integral operatorning aniqlangan funksional fazoda to‘g‘ri aniqlanishini ta’minlaydi. Shunga qaramay, noma’lum funksiya integral ifoda orqali butun oraliq bo‘yicha bog‘langanligi sababli tenglamaning aniq analitik yechimini bevosita topish murakkab hisoblanadi.

Mazkur tenglamaning murakkabligi integral hadning noma’lum funksiya qiymatlarini global tarzda bog‘lashida namoyon bo‘ladi. Natijada yechimning xatti-harakati integral operatorning normasi va parametr λ ning qiymatiga bevosita bog‘liq bo‘ladi. Ushbu holat iteratsion yondashuvni qo‘llash va uning yaqinlashuv shartlarini alohida tahlil qilish zaruratini yuzaga keltiradi.

Berilgan ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasining yechimini aniqlash uchun ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalaniladi. Ushbu yondashuv noma’lum funksiyani integral operator orqali ketma-ket aniqlanadigan funksiyalar ketma-

ketligi sifatida qurishga asoslanadi. Integral tenglama quyidagi ko‘rinishda qayta yoziladi:

$$u(x) = f(x) + \lambda(Tu)(x),$$

bu yerda integral operator

$$(Tu)(x) = \int_0^1 (x+t)u(t)dt$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Iteratsion jarayonni boshlash uchun boshlang‘ich yaqinlashish tanlanadi. Odatda boshlang‘ich funksiya sifatida integral hadni hisobga olmagan holdagi ifoda olinadi:

$$u_0(x) = f(x) = x^2.$$

Shundan so‘ng noma’lum funksiya quyidagi rekurrent munosabat asosida aniqlanadi:

$$u_{n+1}(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)u_n(t)dt, n = 0, 1, 2, \dots$$

Mazkur rekurrent formula integral tenglamaning tuzilishidan bevosita kelib chiqadi va har bir iteratsiyada oldingi yaqinlashish asosida yangi funksiya hosil qilinadi. Hosil bo‘lgan $\{u_n(x)\}$ ketma-ketlik integral operator ta’siri ostida shakllanadi va uning xatti-harakati operatorning normasi hamda parametr λ ning qiymatiga bog‘liq bo‘ladi.

Iteratsion yondashuvning yaqinlashuv xossalarini aniqlash integral operatorning funksional fazodagi xatti-harakatini tahlil qilish bilan bog‘liq. Qaralayotgan integral tenglama uchun integral operator quyidagi ko‘rinishda aniqlangan:

$$(Tu)(x) = \int_0^1 (x+t)u(t)dt.$$

Operator normasini baholash maqsadida uzluksiz funksiyalar fazosi $C[0,1]$ da supremum norma qaraladi:

$$\|u\| = \max_{x \in [0,1]} |u(x)|.$$

Ushbu normada operatorning bahosini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\|(Tu)\| \leq \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |x+t| |u(t)| dt.$$

Yadro musbat va uzluksiz bo'lganligi sababli quyidagi baho o'rinli:

$$\|(Tu)\| \leq \|u\| \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 (x+t) dt.$$

Integralni hisoblash orqali

$$\int_0^1 (x+t) dt = x + \frac{1}{2}$$

natija hosil qilinadi. Shundan so'ng operator normasi uchun baho olinadi:

$$\|T\| \leq \max_{x \in [0,1]} (x + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}.$$

Iteratsion jarayonning kovergensiya ketma-ket yaqinlashishlar orasidagi farqni baholash orqali aniqlanadi. Rekurrent munosabatdan kelib chiqib,

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \lambda \|T\| \|u_n - u_{n-1}\|$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Ushbu tengsizlik iteratsion jarayon geometrik progressiya bilan baholanishini ko'rsatadi. Demak, quyidagi shart bajarilganda ketma-ket yaqinlashishlar tekis yaqinlashuvchi bo'ladi:

$$|\lambda| \|T\| < 1.$$

Operator normasi uchun olingan bahoni hisobga olib, kovergensiya uchun yetarli shart quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$|\lambda| < \frac{2}{3}.$$

Ushbu shart bajarilganda integral operator qisqaruvchi operator bo'lib, iteratsion jarayon yagona yechimga yaqinlashadi. Parametr qiymati ushbu chegaraga yaqinlashgan sari iteratsiyalar soni ortadi va yaqinlashuv sekinlashadi, kichik qiymatlarda esa iteratsion jarayon tez barqarorlashadi.

Qaralayotgan integral tenglama

$$u(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)u(t) dt$$

uchun iteratsion jarayon avval aniqlangan rekurrent formula asosida quriladi:

$$u_{n+1}(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)u_n(t) dt.$$

Boshlang'ich yaqinlashish sifatida

$$u_0(x) = x^2$$

tanlanadi. Ushbu tanlov integral had ishtirokisiz tenglamaning o'ng tomoniga mos keladi va iteratsion jarayonni soddalashtiradi.

Rekurrent formulaga $u_0(x)$ ni qo'yib, birinchi iteratsiya aniqlanadi:

$$u_1(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)t^2 dt.$$

Integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^1 (x+t)t^2 dt = x \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^3 dt = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}.$$

Natijada birinchi iteratsiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u_1(x) = x^2 + \lambda \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4} \right).$$

Endi $u_1(x)$ ifodadan foydalanib, ikkinchi iteratsiya aniqlanadi:

$$u_2(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t) \left(t^2 + \lambda \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{4} \right) \right) dt$$

Integralni hadma-had hisoblaymiz:

$$\int_0^1 (x+t)t^2 dt = \frac{x}{3} + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 (x+t)t dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 (x+t) dt = x + \frac{1}{2}.$$

Shu asosda

$$u_2(x) = x^2 + \lambda\left(\frac{x}{3} \middle| \frac{1}{4}\right) + \lambda^2\left(\frac{x}{6} \middle| \frac{1}{9} \middle| \frac{x}{4} \middle| \frac{1}{8}\right).$$

Ifodani soddalashtirib,

$$u_2(x) = x^2 + \lambda\left(\frac{x}{3} \middle| \frac{1}{4}\right) + \lambda^2\left(\frac{5x}{12} \middle| \frac{17}{72}\right).$$

Olingan iteratsiyalar ko‘rinishidan noma’lum funksiya har bir qadamda x ga nisbatan polinom ko‘rinishida ifodalanishi kuzatiladi. Har bir keyingi iteratsiya oldingisiga nisbatan yuqori darajali λ koeffitsiyentli hadlarni o‘z ichiga oladi. Oldingi bo‘limda aniqlangan

$$|\lambda| < \frac{2}{3}$$

shart bajarilganda ushbu hadlar geometrik progressiya kabi kamayib boradi va iteratsion ketma-ketlik tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Natijada $\{u_n(x)\}$ ketma-ketlikning limit funksiyasi integral tenglamaning yagona yechimini beradi. Amaliy hisoblashlarda bir necha iteratsiyadan so‘ng yechimning ko‘rinishi deyarli o‘zgarmas holga keladi, bu esa iteratsion yondashuvning samaradorligini tasdiqlaydi.

Iteratsion yondashuv asosida qurilgan yechimlar ketma-ketligi integral tenglamaning xatti-harakatini yaqqol namoyon etadi. Hisoblashlar natijasida hosil bo‘lgan yaqinlashishlar noma’lum funksiyaning polinom ko‘rinishda ifodalanishini ko‘rsatadi, bu esa integral yadroning chiziqli tuzilishi bilan bog‘liq. Har bir keyingi iteratsiyada λ ning yuqori darajali hadlari paydo bo‘lib, ular iteratsion jarayonning yaqinlashuv tezligini belgilaydi.

Parametr λ ning qiymati iteratsion jarayonning xatti-harakatiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Kovergensiya sharti bajarilgan holatda, ya’ni

$$|\lambda| < \frac{2}{3},$$

iteratsion ketma-ketlik tekis yaqinlashuvchi bo‘lib, yechim barqaror ravishda shakllanadi. Parametr qiymati ushbu chegaraga yaqinlashgan sari iteratsiyalar soni

ortadi va yaqinlashuv jarayoni sekinlashadi. Aksincha, λ ning kichik qiymatlarida bir necha iteratsiyadan so'ng yechim deyarli o'zgarmas holga keladi.

Nazariy jihatdan aniqlangan kovergensiya sharti bilan amaliy hisoblashlar natijalari o'rtasida to'liq moslik kuzatiladi. Operator normasiga asoslangan baholar iteratsion jarayonning barqarorligini ishonchli tarzda tushuntirib beradi. Shu bilan birga, tanlangan integral tenglama uchun iteratsion yondashuvning algoritmik jihatdan sodda ekanligi va hisoblash jarayonining elementar integrallar bilan cheklanishi amaliy jihatdan muhim afzallik hisoblanadi.

XULOSA. Ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasi uchun iteratsion yondashuvning qo'llanilishi ketma-ket yaqinlashish usulining nazariy va amaliy samaradorligini aniq namoyon etadi. Tanlangan integral tenglama misolida iteratsion jarayon integral operator asosida qurildi va noma'lum funksiya ketma-ket yaqinlashishlar orqali aniqlanishi ko'rsatildi. Integral yadroning uzluksiz va chegaralangan bo'lishi iteratsion yondashuvni qo'llash uchun zarur shartlarni ta'minladi.

Integral operator normasini baholash asosida kovergensiya uchun yetarli shart aniqlanib, parametr qiymatlarining iteratsion jarayon barqarorligiga ta'siri asoslab berildi. Ushbu shart bajarilganda iteratsion ketma-ketlikning tekis yaqinlashuvi ta'minlanishi va yechimning yagonaligi kafolatlanishi nazariy jihatdan ko'rsatildi. Amaliy hisoblashlar natijalari ham ushbu xulosalarni tasdiqlab, iteratsion yondashuvning real masalalarda ishonchli ishlashini ko'rsatdi.

Batafsil hisoblangan iteratsiyalar integral tenglamaning yechimi polinom ko'rinishda yaqinlashishini va har bir keyingi iteratsiyada λ ning yuqori darajali hadlari kamayib borishini ko'rsatdi. Bu holat iteratsion jarayonning geometrik xususiyatga ega ekanligini va yaqinlashuv tezligining parametr tanloviga bog'liqligini ochib berdi.

Natijada, iteratsion usul ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamalarini yechishda samarali, algoritmik jihatdan sodda va nazariy jihatdan asoslangan yondashuv ekanligi tasdiqlandi. Ushbu metod murakkab integral modellarni tahlil

qilishda, ayniqsa aniq analitik yechim mavjud bo'lmagan holatlarda, ishonchli taqribiy yechimlar olish imkonini beradi va integral tenglamalar asosida qurilgan matematik modellarni o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1-qism. – Toshkent: O'qituvchi, 1988. – 400 b.
2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. -Toshkent: Iqtisod-Moliya, 2008. - 320 b.
3. Mamatov Sh.S., Abdirashidov A. Integral tenglamalarni taqribiy yechish usullari. – Samarqand: Samarqand davlat universiteti nashriyoti, 2014. – 180 b.
4. Tojimamatov I. Sonli usullar va matematik modellashtirish asoslari. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2016. – 256 b.
5. Qodirov A., Rahimov B. Amaliy matematika masalalari va integral tenglamalar. – Toshkent: Universitet, 2019. – 212 b.
6. Karimov A.A. Funktsional analiz va uning amaliy masalalari. – Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2017. – 300 b.
7. Xudoyberdiyev M. Integral va differensial tenglamalar. – Toshkent: Fan, 2015. – 284 b.
8. O'rinboyev A., Saidov D. Sonli hisoblash usullari. – Toshkent: Innovatsiya-Ziyo, 2020. – 240 b.
9. Mamatqulov B. Matematik modellashtirish asoslari. – Toshkent: O'qituvchi, 2018. – 198 b.