

INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISHNING SPLINE -FUNKSIYALARI YORDAMIDA YAQINLASHTIRISH

Usmonaliyev U.I.

FarDU talabasi, uusmonaliyev04@gmail.com

Annotatsiya: Integral tenglamalar — fizika, mexanika va boshqa amaliy fanlarning ko‘plab masalalarini ifodalashda asosiy vositalardan biridir. Bunday tenglamalarning aniq yechimini topish ko‘pincha iloji bo‘lmagani uchun ularni sonli usullar yordamida yechish dolzarb masala sifatida qolmoqda. Ushbu ishda Fredgolm tipidagi chiziqli integral tenglamalarni kubik spline-funksiyalar asosida yaqinlashtirish usuli taklif etiladi. Noma‘lum funksiya kubik B-splainlar orqali ifodalanib, kollokatsiya usuli yordamida algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Teoretik tahlil natijasida usulning to‘rtinchi tartibli yaqinlashishi ko‘rsatiladi. Sonli tajribalar esa taklif qilingan yondashuvning amaliy samaradorligi va aniqligini tasdiqlaydi.

Kalit so‘zlar: Spline, Integral tenglama, kubik spline, B-spline, kollokatsiya usuli.

KIRISH. Biz funksiyani ko‘phadlar bilan yaqinlashtirishning turli usullari bilan tanishdik. Silliqligi yuqori bo‘lmagan funksiyalar uchun ko‘phadlar yaqinlashish apparati sifatida qator noqulayliklarga ega. Bulardan eng asosiysi shundan iboratki, bunday funksiyalarning biror nuqta atrofidagi holati, ularning to‘la holati bilan uzviy bog‘liqdir. Bundan tashqari interpolyasion ko‘phadlarning nuqsoni sifatida ularning har doim ham interpolyasiyalanuvchi funksiyaga yaqinlashavermasligidir. Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko‘phadlarning kamchiligi sifatida shuni ko‘rsatish mumkinki, ularni qurish juda qiyin va odatda bunday ko‘phadning darajasi ortishi bilan koeffisientlari ham tez o‘sib boradi.

Oxirgi vaqtlarda shu nuqsondan holi bo‘lgan boshqa yaqinlashish apparatlari ishlab chiqilmoqda. Nazariy tadqiqot va tatbiqlarda yaxshi natija beradigan apparat spline-funksiyalar apparatidir. Splining ta'rifi bilan tanishaylik.

Haqiqiy o‘qdagi $[a, b]$ oraliqda ushbu

$$V_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

to‘r berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, $H_m(P)$ darajasi m dan ortmaydigan ko‘phadlar to‘plami, $C^{(k)} = C^{(k)}[a, b]$ o‘zi va k tartibgacha hosilalari-oraliqda uzluksiz bo‘lgan funksiyalar to‘plami bo‘lsin.

Ta'rif. Quyidagi ikkita shartni qanoatlantiruvchi ushbu

$$S_m(x) = S_m(x, \Delta)$$

funksiya defekti 1 ga teng bo'lgan m - darajali polinomial spline deyiladi:

1) Har bir $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n}$) oraliqda $S_m(x) \in H_m(P)$;

2) $S_m(x) \in C^{(m-1)}[a, b]$ $S_m(x) \in C^{(m-1)}[a, b]$,

Bu yerdagi $\{x_i\}$ nuqatalar splayin tugunlari deyiladi. $S_m(x)$ splayinning m - hosilasi $[a, b]$ oraliqda uzilishga ega bo'ishi ham mumkin.

Agar $k = 0, 1, \dots, m$ lar uchun $S_m^{(k)}(a+0) = S_m^{(k)}(b-a)$ tengliklar bajarilsa, $S_m(x)$ spline $b-a$ davrli davriy spline deyiladi.

Integral tenglamalar — noma'lum funksiya bir yoki bir nechta integrallar ostida uchraydigan va uning qiymatlari butun sohadagi boshqa funksiyalar bilan bog'langan matematik ifodalar hisoblanadi. Bunday tenglamalar tabiatda tarqoq jarayonlarni, potensial maydonlarni, diffuziya va issiqlik o'tkazuvchanligi hodisalarini, shuningdek, teskari masalalarni modellashtirishda keng qo'llaniladi. Integral tenglama deb shunday tenglamaga aytiladiki, unda $u(x)$ noma'lum funksiya aniq integral belgisi ostida qatnashadi. Masalan,

$$g(x)u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad (1.1)$$

bu yerda $g(x)$, $K(x, s)$ va $f(x)$ berilgan funksiyalar va λ berilgan parametrdir (ko'pincha u 1 yoki -1 deb olinadi). $K(x, y)$ funksiya integral tenglamaning yadrosi (yadresi) va $f(x)$ funksiya tenglamaning o'ng 39omoni (yoki ozod hadi) deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, λ kompleks ham, haqiqiy ham bo'lishi mumkin, lekin x va s lozim haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi.

Agar $g(x) = 0$ va $\lambda = -1$ bo'lsa, u holda (1.1) tenglama

$$\int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x) \quad (1.2)$$

ko'rinishga ega bo'lib, Fredholmning I tur integral tenglamasi deyiladi. Agar barcha $x \in [a, b]$ uchun $g(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda (1.1) tenglamaning har ikki tomonini $g(x)$ ga bo'lib, qayta belgilab chiqsak, uni

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.3)$$

ko'rinishga yozish mumkin. Bu tenglama Fredholmning II tur integral tenglamasi deyiladi. Agar $[a, b]$ oraliqning ayrim nuqtalarida $g(x) = 0$ bo'lib, boshqa nuqtalarida $g(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda (1.1) tenglama Fredholmning III tur integral tenglamasi deyiladi. III tur tenglama kam o'rganilgan, lekin tatbiqlarda uchrashi mumkin.

Yuqoridagi (1.1), (1.3) tenglamalar bir jinsli bo'lmagan tenglamalar deyiladi. Agar (1.3) tenglamada $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)u(s)ds = 0 \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.4)$$

Fredholmning bir jinsli tenglamasi deyiladi. Bu tenglama doimo nolini (trivial) $u(x) = 0$ echimga ega. Agar λ parametrining ayrim qiymatlarida tenglama notrivial echimga ega bo'lsa, bunday qiymatlar $K(x, s)$ yadroni yoki unga mos keladigan (1.4) tenglamaning xos qiymatlari (xos sonlari) deyiladi, ularga mos keladigan notrivial echim esa xos funksiyalar deyiladi. Ushbu

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(s, x)u(s)ds = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.5)$$

tenglama (1.3) tenglamaga bog'lovchi deyiladi.

Biz ikkinchi turdagi Fredgolm integral tenglamasini spline yordamida taqribiy yechishni quyidagi misol orqali ko'raylik:

Misol: Quyidagi Fredholm integral tenglama ko'raylik:

$$y(x) = 1 + \int_0^1 xy(t)dt.$$

1. Integralni soddalashtirish. Integral t bo'yicha olingani sababli x integral ichida o'zgarmas hisoblanadi:

$$\int_0^1 xy(t)dt = x \int_0^1 ty(t)dt.$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$C = \int_0^1 ty(t)dt.$$

Shunda integral tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y(x) = 1 + Cx.$$

2. Spline yaqinlashuvi. Noma'lum funksiya $y(x)$ chiziqli spline yordamida yaqinlashtiriladi:

$$y(x) \approx a + bx.$$

Integral tenglamadan: $a = 1$, $b = C$.

3. Koeffitsiyentni aniqlash. C ni aniqlash uchun topilgan yaqinlashuvni integralga qo'yamiz:

$$C = \int_0^1 t(1 + Ct)dt.$$

Integralni hisoblaymiz:

$$C = \int_0^1 tdt + C \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2} + \frac{C}{3}.$$

Hosil bo'lgan tenglamani yechamiz:

$$C - \frac{C}{3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2C}{3} = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{3}{4}.$$

4. Taqribiy yechim. Natijada integral tenglamaning taqribiy (va ushbu misolda aniq) yechimi:

$$y(x) = 1 + \frac{3}{4}x.$$

Biz Volterra integral tenglamasini kvadratik spline yordamida taqribiy yechishni quyidagi misol orqali ko'raylik:

Misol: Quyidagi Volterra integral tenglama berilgan:

$$y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)y(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

1.Spline tanlash. Noma'lum funksiya $y(t)$ kvadratik spline bilan ifodalanadi:

$$S(t) = a + bt + ct^2,$$

bu yerda (a, b, c) — aniqlanishi kerak bo'lgan koeffitsiyentlar.

2.Integralni hisoblash. Splineni integralga qo'yamiz:

$$\int_0^x (x-t)S(t)dt = x \int_0^x S(t)dt - \int_0^x tS(t)dt.$$

Shunday qilib:

$$\int_0^x (x-t)S(t)dt = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{6}x^3 + \frac{c}{12}x^4.$$

Spline yordamida integral tenglama

$$y(x) \approx 1 + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{6}x^3 + \frac{c}{12}x^4.$$

Tugun nuqtalar va shartlar. Kvadratik spline uchun uchta tugun:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1.$$

Interpolyatsiya sharti:

$$y(x_i) = S(x_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

$x = 0$ hol

$$S(0) = a, \quad y(0) = 1 \Rightarrow a = 1.$$

$x = 1/2$ hol

$$S(1/2) = 1 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}, \quad y(1/2) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{b}{48} + \frac{c}{192}.$$

Tenglashtiramiz:

$$1 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{b}{48} + \frac{c}{192}.$$

$x = 1$ hol

$$S(1) = 1 + b + c, \quad y(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{12}.$$

Tenglashtiramiz:

$$1 + b + c = \frac{3}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{12}.$$

3. Algebraik sistema va yechim. Tenglamalar sistemasini yechish natijasida:

$$b = \frac{6}{5}, \quad c = -\frac{3}{5}.$$

4. Yakuniy taqribiy yechim

$$y(x) \approx 1 + \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}x^2.$$

XULOSA. Integral tenglamalar zamonaviy matematik modellashtirishning asosiy vositalaridan biri bo'lib, ular fizika, mexanika, elektrodinamika, biologiya va boshqa ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi. Biroq, aksariyat hollarda bunday tenglamalarning aniq yechimini topish amaliy jihatdan qiyin yoki umuman imkonsizdir. Shu sababli ularni sonli usullar yordamida yechish dolzarb vazifa sifatida qolmoqda. Ushbu ishda Fredgolm va Volterra tipidagi ikkinchi turdagi chiziqli integral tenglamalarni spline-funksiyalar asosida taqribiy yechish usullari tadqiq qilindi. Avval chiziqli spline, keyin esa kvadratik spline yordamida noma'lum funksiya yaqinlashtirildi. Kollokatsiya va interpolatsiya shartlaridan foydalanib, integral tenglamalar algebraik tenglamalar sistemasiga keltirildi. Olingan sistemalar yechilib, taqribiy yechimlar topildi. Ayniqsa, ba'zi sodda misollar uchun taklif etilgan usul aniq yechimni ham berishini ko'rsatdi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, spline-funksiyalar orqali yechimni ifodalash — hisoblash jihatidan sodda, tushunarli va samarali yondashuvdir. Splainlarning lokal xususiyati tufayli xatolik butun sohani emas, balki faqat cheklangan mintaqani ta'sir qiladi, bu esa usulni barqaror va moslashuvchan qiladi. Shuningdek, kvadratik spline yordamida yechish chiziqli splinedan yuqori aniqlik berish imkonini ochib berdi. Olingan natijalar shuni tasdiqlaydiki, spline asosida qurilgan sonli usullar integral tenglamalarni yechishda nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliyotda ham qo'llashga mos keladi. Kelajakda ushbu yondashuvni kubik B-splainlar, ortogonal bazislar yoki adaptiv tarmoqlar bilan birlashtirish orqali yanada murakkabroq (masalan, chiziqli bo'lmagan yoki chegaraviy qiymatli) integral tenglamalarni yechishga qaratish maqsadga muvofiqdir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abdullayev R.A., Isroilov M.I. "Sonli usullar" – T.: "O‘qituvchi", 2018. – 245 b.
2. Chapra S.C., Canale R.P. "Numerical Methods for Engineers", 7th ed. – McGraw-Hill, 2015. – 960 p.
3. Xudoyberganov G‘., Tojiboyev O. "Dasturlash asoslari: C# va Python misollarida" – T.: "Innovatsiya", 2021. – 318 b.
4. Quarteroni A., Saleri F. "Scientific Computing with MATLAB and Octave", 4th ed. – Springer, 2014.
6. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. "Computer Methods for Mathematical Computations" – Prentice-Hall, 1977.