

KOSHI MASALASINI YECHISHDA PREDICTOR-CORRECTOR(OLDINDAN TAHMIN-TO‘G‘RILASH) USULLARINI QO‘LLASH

G‘aniyeva. M.R.

FarDU talabasi, ganiyevaoyilham@gmail.com.

Annotatsiya: Ushbu maqola matematik modellashtirish va hisoblash matematikasining zamonaviy fan-texnika taraqqiyotidagi markaziy rolini ko‘rib chiqadi. Asosan, analitik yechimi mavjud bo‘lmagan yoki juda murakkab matematik modellar bilan tavsiflangan real jarayonlarni o‘rganishda sonli usullarning ahamiyati ta‘kidlanadi. Maqolaning asosiy e‘tibori oddiy differensial tenglamalar bilan ifodalangan koshi masalalarini yechishga qaratilgan bo‘lib, uning analitik yechimi izlab chiqiladi va topilgan aniq yechim keyingi tadqiqotlarda predictor–corrector (oldindan bashoratlash va tuzatish) tipidagi sonli usullarning samaradorligi va aniqligini baholash uchun etalon (reference) sifatida xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: analitik, diskretlash xatoligi, differensila tenglama, predictor–corrector, Koshi masalasi, Adams tipi, algoritmik xatolik.

Hozirgi kunda matematik modellashtirish va hisoblash matematikasi usullari fan-texnika taraqqiyotining ajralmas qismiga aylanib bormoqda. Zamonaviy ilm-fan va muhandislik masalalarining aksariyati analitik yechimga ega bo‘lmagan yoki juda murakkab ko‘rinishda bo‘lgan matematik modellar bilan tavsiflanadi. Bunday holatlarda masalalarni yechish uchun sonli usullardan foydalanish muqarrar bo‘lib, ular amaliy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, oddiy differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan jarayonlarni tahlil qilishda sonli yechim usullarining roli juda kattadir.

Oddiy differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadigan masalalar matematik fizika, mexanika, elektrotexnika, kimyo va biologiya kabi ko‘plab fan sohalarida keng uchraydi. Bunday masalalarda tizimning holati vaqt yoki boshqa mustaqil o‘zgaruvchi bo‘yicha o‘zgaradi va ushbu o‘zgarish differensial tenglama orqali ifodalanadi. Nazariy jihatdan, ayrim differensial tenglamalar uchun aniq analitik yechimlar mavjud bo‘lsa-da, amaliy masalalarning katta qismi uchun bunday yechimlarni topish imkonsiz yoki juda murakkab hisoblanadi.

Analitik yechim deganda differensial tenglamaning yechimi yopiq formulalar orqali ifodalanishi tushuniladi. Masalan, quyidagi oddiy tenglama analitik yechimga ega:

$$y'(x) = ay(x)$$

uning yechimi eksponensial funksiya ko‘rinishida yoziladi:

$$y(x) = Ce^{ax}$$

biroq ko‘plab amaliy masalalarda differensial tenglama chiziqli bo‘lmagan, murakkab ko‘rinishda yoki analitik usullar uchun qulay bo‘lmagan shaklda beriladi.

Masalan:

$$y'(x) = x^2 + y^2$$

bunday tenglamalar uchun umumiy holda aniq analitik yechim mavjud emas. Shu sababli, bu turdagi masalalarni yechishda sonli usullardan foydalanish zarurati yuzaga keladi.

Sonli usullarning asosiy g‘oyasi shundan iboratki, uzluksiz yechimni topish o‘rniga, yechimning ma’lum diskret nuqtalardagi taxminiy qiymatlari aniqlanadi. Bu jarayonda uzluksiz oraliq qadam uzunligi h yordamida bo‘linadi:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

natijada mustaqil o‘zgaruvchining diskret nuqtalari hosil bo‘ladi:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Har bir x_i nuqtada yechimning qiymati taxminan aniqlanadi:

$$y_i \approx y(x_i)$$

sonli usullarning afzalligi shundaki, ular yordamida murakkab differensial tenglamalarni kompyuter orqali yechish mumkin. Biroq sonli yechim har doim ma’lum darajada xatolik bilan aniqlanadi. Shu sababli sonli usullarning aniqligi va barqarorligini tahlil qilish muhim hisoblanadi.

Sonli usullarda yuzaga keladigan asosiy xatoliklar quyidagilardan iborat:

- diskretlash xatoligi, ya’ni uzluksiz masalaning diskret ko‘rinishga o‘tkazilishi natijasida yuzaga keladigan xatolik;

- yumaloqlash xatoligi, ya'ni kompyuterda sonlarni chekli aniqlikda ifodalash bilan bog'liq xatolik;
- algoritmik xatolik, ya'ni tanlangan sonli usulning aniqlik darajasi bilan bog'liq xatolik.

Sonli usulning aniqligi odatda uning tartibi bilan baholanadi. Agar usulda xatolik h^p ga proporsional bo'lsa, u holda usul p -tartibli usul deyiladi:

$$\varepsilon = O(h^p)$$

Sonli usullar nazariyasida boshlang'ich shartlar bilan berilgan oddiy differensial tenglamalarni (Koshi masalalarini) yechish muhim o'rin tutadi. Bunday masalalar ko'pincha real fizik, texnik va iqtisodiy jarayonlarning matematik modellarini ifodalaydi. Aksariyat hollarda differensial tenglamalarning aniq (analitik) yechimini topish mushkul yoki umuman imkonsiz bo'lgani sababli, ularni sonli usullar yordamida taxminiy hisoblash talab etiladi.

Mazkur bobda predictor–corrector (oldindan bashoratlash va tuzatish) usullarining ishlash samaradorligini amaliy misolda ko'rsatish maqsadida klassik Koshi masalasi tanlanadi. Ushbu masala “Sonli usullar” faniga oid ko'plab darslik va o'quv qo'llanmalarda standart test masala sifatida qo'llaniladi.

Quyidagi birinchi tartibli oddiy differensial tenglama berilgan bo'lsin:

$$y'(x) = y - x^2 + 1, \quad y(0) = 0.5, \quad x \in [0,2].$$

Berilgan differensial tenglama chiziqli bo'lib, uni standart ko'rinishga keltiramiz:

$$y'(x) - y = -(x^2 - 1)$$

ushbu tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishiga mos keladi:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

bu yerda $P(x) = -1$, $Q(x) = -(x^2 - 1)$

Chiziqli differensial tenglamani yechish uchun integrallovchi ko'paytuvchi aniqlanadi:

$$\mu(x) = \exp\left(\int P(x) dx\right)$$

Berilgan $P(x) = -1$ bo'lgani uchun integrallovchi ko'paytuvchi quyidagicha bo'ladi:

$$\mu(x) = e^{-x}$$

endi differensial tenglamaning har ikki tomonini integrallovchi ko'paytuvchiga ko'paytiramiz:

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{-x}(1 - x^2)$$

Chap tomonni to'liq hosila ko'rinishida yozish mumkin:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}(1 - x^2)$$

har ikki tomonni x bo'yicha integrallaymiz:

$$e^{-x}y = \int e^{-x}(1 - x^2) dx + C$$

Integralni hisoblash natijasida:

$$\int e^{-x}(1 - x^2) dx = e^{-x}(x + 1)^2 + C$$

shunday qilib, umumiy yechim quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$e^{-x}y = e^{-x}(x + 1)^2 + C$$

boshlang'ich shart $y(0) = 0.5$ dan foydalanamiz:

$$e^0 \cdot y(0) = (0 + 1)^2 + C.$$

Natijada:

$$0.5 = 1 + C$$

$$C = -0.5.$$

Topilgan konstantani umumiy yechimga qo'yib, Koshi masalasining analitik yechimini hosil qilamiz:

$$y(x) = (x + 1)^2 - \frac{1}{2}e^x$$

ushbu bandda boshlang'ich shartlar bilan berilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama — klassik Koshi masalasi ko'rib chiqildi. Masala matematik jihatdan to'liq qo'yilib, differensial tenglama chiziqli ko'rinishga keltirildi va integrallovchi

ko‘paytuvchi usuli yordamida uning analitik yechimi topildi. Natijada izlanayotgan funksiya uchun aniq yechim

$$y(x) = (x + 1)^2 - \frac{1}{2}e^x$$

ko‘rinishida aniqlanib, u berilgan boshlang‘ich shartni to‘liq qanoatlantirishi ko‘rsatildi.

Olingan analitik yechim keyingi bo‘limlarda qo‘llaniladigan predictor–corrector sonli usullarining aniqligini baholashda asosiy etalon yechim sifatida xizmat qiladi. Shu orqali sonli va aniq yechimlar orasidagi farqni tahlil qilish, xatolikni baholash hamda algoritmlarning barqarorligi va samaradorligini amaliy jihatdan tekshirish imkoniyati yaratiladi.

Xulosa qilib aytganda, Adams tipidagi predictor–corrector usullari Koshi masalalarini yechishda samarali, aniqligi yuqori va amaliy jihatdan qulay sonli usullar hisoblanadi. Ushbu usullar analitik yechimni topish qiyin yoki imkonsiz bo‘lgan murakkab differensial tenglamalarni yechishda ham muvaffaqiyatli qo‘llanilishi mumkin. O‘tkazilgan tadqiqotlar natijalari sonli usullarni real ilmiy va muhandislik masalalarida qo‘llash uchun mustahkam amaliy asos yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari: 1-qism. -Toshkent: O‘qituvchi, 2003. -256 b.
2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari: 2-qism. -Toshkent: Iqtisod-Moliya, 2008. -320 b.
3. Ismatullayev G.P. Hisoblash usullari: o‘quv qo‘llanma. -Toshkent: Tafakkur-bo‘stoni, 2010. -240 b.
1. Gelfand I.M., Fomin S.V. Calculus of Variations. -Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1963. -232 p.
2. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. I. -New York: Wiley, 1989. -561 p.
3. EqWorld -The World of Mathematical Equations [Elektron resurs]. -Kirish rejimi: <https://eqworld.ipmnet.ru>.
4. SciPy Documentation / SciPy Manual [Elektron resurs]. -Kirish rejimi: <https://docs.scipy.org> .