

RUNGE-KUTTA USULI YORDAMIDA DIFFERENSIAL TENGLAMA YECHIMI

Mashrabov I.B.

FarDU talabasi, mashrabovibrohimjon503@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu ish oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish masalalariga bag'ishlangan bo'lib, unda Koshi masalasini taqribiy yechishda Runge–Kutta to'rtinchi tartibli usulining nazariy va amaliy jihatlari yoritdim. Ishda chiziqsiz va noavtonom differensial tenglama uchun analitik yechimni topish qiyin bo'lgan holatlarda sonli usullardan foydalanish zarurati asoslab berdim. Runge–Kutta 4 usulining matematik mohiyati, aniqlik darajasi hamda Eyler usuliga nisbatan ustunliklari nazariy jihatdan tahlil qilindi.

Kalit so'zlar: noavtonom differensial tenglama, lokal xatolik, Simpson integrallash qoidasi, analitik yechim.

Quyidagi Koshi masalasi Runge–Kutta to'rtinchi tartibli usuli yordamida sonli yechdim:

$$y' = x^2 + y \sin x, \quad y(0) = 1$$

bu yerda integrallash qadami $h=0.2$ deb olindi. Mazkur differensial tenglama noavtonom va chiziqsiz bo'lgani sababli uning analitik yechimini oddiy usullar bilan topish mushkul, shu bois masalani taqribiy-sonli usul bilan yechish maqsadga muvofiq hisoblanadi. Hisoblashlarda to'rtinchi tartibli Runge–Kutta usuli tanlandi, chunki u yuqori aniqlikka ega bo'lib, har bir qadamda lokal xatolik $O(h^5)$ tartibida bo'ladi.

Runge–Kutta 4 usulining asosiy g'oyasi differensial tenglamaning o'ng tomonidagi funksiyani qadam boshida, qadam o'rtasida va qadam oxirida bir necha marta hisoblab, ularning og'irlikli o'rtachasini olishdan iborat. Buning uchun to'rtta yordamchi qiymat — k_1, k_2, k_3, k_4 aniqlanadi. Hisoblashlar boshlang'ich nuqta $x_0 = 0, y_0 = 1$ dan boshlanadi. Avvalo qadam boshidagi hosila aniqlanadi va

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

formula orqali hisoblanadi. Berilgan tenglama uchun $f(x, y) = x^2 + y \sin x$ bo'lgani sababli $f(0, 1) = 0^2 + 1 \cdot \sin 0$ ga teng bo'ladi va natijada $k_1 = 0$ hosil bo'ladi. Bu bosqich Eyler usulining bir qadamiga mos kelib, qadam boshidagi qiymatni ifodalaydi.

Keyingi bosqichda qadamning o'rtasidagi hosilani baholash uchun

$$k_2 = hf \left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2} \right)$$

formulasi qo'llanadi. Bu yerda $x_0 + \frac{h}{2} = 0.1$ va $y_0 + \frac{k_1}{2} = 1$ bo'ladi. Ushbu qiymatlar differensial tenglamaning o'ng tomoniga qo'yilib, $f(0.1, 1) = 0.1^2 + \sin 0.1$ aniqlanadi.

Trigonometrik funksiya qiymatini hisoblash natijasida $\sin 0.1 \approx 0.09983$ bo'lgani uchun $k_2 = 0.2 * (0.01 + 0.09983) = 0.02197$ ga teng bo'ladi. Ushbu bosqich RK4 metodida aniqlikni oshirish uchun muhim ahamiyatga ega.

Uchinchi bosqichda yana qadam o'rtasidagi hosila hisoblanadi, biroq bunda oldingi bosqichdan olingan k_2 qiymati asosida y ning yangilangan qiymati olinadi. Buning uchun

$$k_3 = hf \left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2} \right)$$

formulasi ishlatiladi. Hisoblashlar $y_0 + \frac{k_2}{2} = 1.01$ bo'ladi va shundan $f(0.1, 1.010985) = 0.01 + 1.010985 \sin 0.1$ aniqlanadi. Bu ifodaning qiymati taxminan 0.11094 ga teng bo'lib, natijada $k_3 = 0.02219$ hosil bo'ladi. Mazkur bosqich RK4 metodining barqarorligini ta'minlovchi asosiy bosqichlardan biridir.

To'rtinchi bosqichda qadam oxiridagi hosila aniqlanadi. Bunda

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

formulasidan foydalaniladi. Bu yerda $x_0 + h = 0.2$ va $y_0 + k_3 = 1.02219$ bo'ladi. Ushbu qiymatlar tenglamaning o'ng tomoniga qo'yilib, $f(0.2, 1.02219) = 0.04 + 1.02219 \sin 0.2$ aniqlanadi. $\sin 0.2 \approx 0.1967$ bo'lgani sababli $k_4 = 0.04862$ qiymatiga ega bo'ladi. Bu bosqich qadam oxiridagi qiyalikni hisobga olib, yechimni yakuniy tuzatishni ta'minlaydi.

Barcha yordamchi qiymatlar aniqlangach, Runge–Kutta usulining asosiy formulasi yordamida yechimning navbatdagi qiymati topiladi:

$$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4}{6}$$

Mazkur formuladagi 1:2:2:1 og'irliklar Simpson integrallash qoidasiga mos keladi va Teylor qatori bilan moslikni ta'minlaydi. Hisoblash natijasida $y(0.2) \approx 1.02282$ qiymati olinadi.

Shunday qilib, berilgan chiziqsiz va noavtonom differensial tenglama Runge–Kutta to'rtinchi tartibli usuli yordamida muvaffaqiyatli yechildi. Olingan natija shuni ko'rsatadiki, RK4 usuli bitta qadamda bir nechta oraliq nuqtalarni hisobga olishi tufayli yuqori aniqlik va barqarorlikni ta'minlaydi. Bu esa uni amaliy va muhandislik masalalarida differensial tenglamalarni sonli yechish uchun samarali usullardan biri ekanligini tasdiqlaydi.

XULOSA. Ushbu ishda oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish masalasi atroflicha o'rgandim va Koshi masalasini yechishda Runge–Kutta to'rtinchi tartibli usulining samaradorligi nazariy va amaliy jihatdan asoslab berdim. Tadqiqot davomida chiziqsiz va noavtonom differensial tenglamalar uchun analitik yechimni topish har doim ham imkoniyatli emasligi ko'rsatdim va bunday holatlarda sonli usullardan foydalanish muhim ahamiyat kasb etishi aniqladim. Runge–Kutta 4 usulining matematik mohiyati, hisoblash algoritmi hamda Eyler usuliga nisbatan aniqlik va barqarorlik jihatidan ustunliklari tahlil qildim.

Umuman olganda, olib borilgan tadqiqot natijalari Runge–Kutta to'rtinchi tartibli usuli oddiy differensial tenglamalarni sonli yechishda eng ishonchli va samarali metodlardan biri ekanligini tasdiqlaydi. Ushbu usulning qo'llanishi muhandislik, fizika, biologiya va iqtisodiyot kabi turli sohalaridagi dinamik jarayonlarni modellashtirishda katta amaliy ahamiyatga ega bo'lib, kelgusida yanada murakkab differensial tenglamalar tizimlarini tadqiq etishda mustahkam nazariy asos bo'lib xizmat qilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Бахвалов Н.С. *Численные методы*. — М.: Наука, 1975.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. — М.: Наука, 1989.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. *Вычислительные методы*. — М.: Физматлит, 2008.

4. Бойков И.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и численные методы их решения*. — СПб., 2006.
5. Butcher J.C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. — John Wiley & Sons, 2008.
6. Burden R.L., Faires J.D. *Numerical Analysis*. — Cengage Learning, 2015.
(RK4 usuli va uning Eyler usuli bilan solishtirilishi.)
7. Atkinson K. *An Introduction to Numerical Analysis*. — Wiley, 1989.
8. Xudoyberganov A., Rahimov B. *Sonli usullar*. — Toshkent: O'qituvchi, 2010.
9. Ismoilov M. *Differensial tenglamalar va sonli yechimlar*. — Toshkent, 2014.