

IKKINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR BILAN TAVSIFLANADIGAN OPTIMAL BOSHQARUV MASALALARI

Mamajonova D.D.

FarDU magistranti, mamajonovadilnoza1995@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan tavsiflanadigan optimal boshqaruv masalasini sonli usullar bilan yechish muammosi ko'rib chiqilgan. Optimal boshqaruv masalasi sifatida tanlab olingan tebranuvchi tizimni kerakli holatga olib kelish yoki uni nazorat ostida ushlab turish uchun qo'yilgan muammoni maqsad funksionalini minimallashtirish, cheklanishlar sistemasi va to'rlar usuliga asoslangan holda yechish bilan bog'liq yondoshuvlar bayon etilgan.

Kalit so'zlar: optimal boshqaruv, tor tebranish tenglamasi, to'rlar usuli, ayirmali sxemalar, xususiy hosilali tenglama, funksional.

Optimal boshqaruv nazariyasi murakkab jarayonlarni samarali boshqarish muammolarining matematik asoslarini o'rganadi. Tabiiy va texnik jarayonlarning ko'pchiligi differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Ayniqsa, ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar tebranish, issiqlik va to'lqin jarayonlarini tavsiflashda keng qo'llaniladi. Masalan, uzunligi L bo'lgan bir jinsli torga tashqi kuch va boshqaruvchi kuch ta'sir etayotgan holda sodir bo'ladigan ko'ndalang tebranishlarning matematik modeli quyidagi boshlang'ich-chegaraviy masala bilan ifodalanadi:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

bu yerda: $u(x, t)$ — torning x nuqtasida vaqt bo'yicha og'ishi, a — tebranishning tarqalish tezligi, $f(x, t)$ — tashqi (berilgan) kuch.

Masalaning qo'yilishi. Bizga (1) tenglama uchun quyidagi boshlang'ich:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (2)$$

va

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

chegaraviy shartlar hamda

$$J = \int_0^T \int_0^L (u^2(x, t) + \alpha f^2(x, t)) dx dt \rightarrow \min \quad (4)$$

maqsad funksiyasi berilgan.

Bu yerda α – musbat son bo'lib, u boshqaruvchi kuchning cheksiz kattta bo'lishini oldini oladi va masalani nokorrekt bo'lishdan saqlaydi.

Optimal boshqaruv masalasi: shunday $f(x, t)$ funksiyani toppish kerakki, u (1) tenglamani, (2) va (3) boshlang'ich hamda chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ funksiyani aniqlasin. Bunda (4) maqsad funksiyasi minimal qiymatga ega bo'lsin.

Mazkur masalaning yechimini to'rlar usuli yordamida topamiz. Bunda differensial tenglama va uning shartlari diskret shaklga keltiriladi: x va t o'qlari bo'yicha teng bo'laklarga ajratilib, har bir to'r tugunidagi yechim qiymatlari ayirmali sxemalar yordamida qadamma-qadam hisoblanadi.

Birinchi navbatda to'r hosil qilish uchun $[0, L]$ va $[0, T]$ oraliqlarni mos ravishda N va M bo'laklarga bo'lamiz. Har bir bo'lakning qadamlari:

$$h = \frac{L}{N}, \quad \tau = \frac{T}{M}$$

ifodalar yordamida topiladi. Bundan, to'rning tugun nuqtalari quyidagicha aniqlanadi:

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

To'plamdagi $u(x_i, t_j)$ qiymatini qulaylik uchun u_{ij} bilan belgilaymiz $u_{ij} \equiv u(x_i, t_j)$.

Endi (1) tenglamani ayirmali sxema bilan approximatsiya qilamiz. Avvalo, birinchi tartibli hosilalar uchun ayirmali sxemani yozamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\tau}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j} - 2u_{ij}}{2h}$$

Bulardan berilgan tenglamaga mos ravishda ikkinchi tartibli hosilalari uchun ayirmali sxemani keltiramiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\tau^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{ij} + 1 - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\tau^2}$$

Endi differensial (1) tenglamadagi hosilalarni yuqoridagi ifodalar bilan almashtirib, ayirmali tenglama sxemasini hosil qilishimiz mumkin. Natijada quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + f_{ij} \quad (3)$$

bu yerda $f_{ij} \equiv f(x_i, t_j)$.

(3) tenglamani faqat u_{ij+1} bilan yozib olish uchun τ^2 ifodani tenglikning o‘ng tomoniga ko‘paytiramiz:

$$u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1} = \tau^2 a^2 \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + \tau^2 f_{ij} \quad (4)$$

Bu yerda $r = \frac{a\tau}{h}$ belgilash kiritsak, (3) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$u_{ij+1} = 2u_{ij} - u_{ij-1} + r^2 (u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + \tau^2 f_{ij}.$$

Endi ushbu tenglama uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni ayirmali sxema shaklida yozib olamiz. Bundan to‘rning tugun nuqtalaridagi qiymatlarni topish uchun boshlang‘ich qiymatlarga ega bo‘lamiz: Berilgan boshlang‘ich shartlar:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x),$$

to‘r tugunlarida quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$u_{i0} = u_i(x_0), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Ikkinchi boshlang‘ich shart esa

$$u_t(x_j, 0) \approx \frac{u_{i1} - u_{i0}}{2\tau} = v_0(x_i).$$

kabi ayirmali sxema yordamida ifodalanadi. Bu yerda u_{i1} qiymatni topish uchun quyidagi ifoda ishlatiladi:

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau v_0(x_i) + \frac{\tau^2}{2} \left[a^2 \frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2} + f_0^i \right] \quad (5)$$

Chegaraviy shartlar:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

to'ring tugun nuqtalari sifatida quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$u_{0j} = 0, \quad u_{Nj} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (6)$$

Endi berilgan boshlang'ich hamda chegaraviy shartlarning tugun nuqtalari bizga ma'lum holda to'ring qolgan tugun nuqtalarini ulardan foydalanib, topa olamiz. To'rlar usuli yordamida yechimni quyidagi ketma-ketlikda hisoblaymiz:

1. Boshlang'ich qiymatlar:

$$u_{0j} = u_0(x_i).$$

2. Birinchi qadamini hisoblash:

$$u_1^i = u_0^i + \tau v_0(x_i) + \frac{\tau^2}{2} \left[a^2 \frac{u_0^{i+1} - 2u_0^i + u_0^{i-1}}{h^2} + f_0^i \right]$$

3. Keyingi qatlamlar uchun ($j = 1, 2, \dots, M - 1$):

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau v_0(x_i) + \frac{\tau^2}{2} \left[a^2 \frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2} + f_{i0} \right].$$

4. Har bir j larning hisonblanish jarayonida chegaraviy shartlarni qo'llaymiz:

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau v_0(x_i) + \frac{\tau^2}{2} \left[a^2 \frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2} + f_{i0} \right]$$

Hosil qilingan sxema turg'un bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi zarur:

$$\tau = \frac{a\tau}{h} \leq 1 \quad (7)$$

Shunday qilib, hosil qilingan to'ring tugun nuqtalaridagi qiymatlar har bir vaqt bosqichida ($t = t_j$) torning ko'ndalang tebranishi u_{ij} qiymatlari bilan mos bo'lib, bu orqali butun jarayonning vaziyati aniqlanadi.

Birinchi qadamni hisoblaymiz. Buning uchun bizga u_{i0} va u_{i1} ifodalarning qiymatlari kerak. Bizda $u_{i0} = u_0(x_i)$ berilgan va $u_t(x, 0) = v_0(x)$ ham ma'lum.

(3) tenglamani birinchi qadam uchun, ya'ni $j = 0$ holatda yozamiz:

$$u_{i1} = 2u_{i0} - u_{0j} + r^2(u_{0j+1} - 2u_{ij} + u_{0j-1}) + \tau^2 f_{i0}. \quad (8)$$

$v_0(x)$ uchun ayirmali sxema formulasi:

$$u_t(x_j, 0) \approx \frac{u_{i1} - u_{i0}}{2\tau} = v_{i0},$$

bu yerdan

$$u_{i0} = u_{i1} - 2\tau v_{i0}. \quad (10)$$

Endi (10) ni (9) ga qo'yib, u_{i1} ni topamiz:

$$u_{i1} = 2u_{i0} - (u_{i1} - 2\tau v_{i0}) + r^2(u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}) + \tau^2 f_{i0}.$$

Tenglamani soddalashtiramiz:

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau v_{i0} + \frac{\tau^2}{2}(u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}) + \frac{\tau^2}{2} f_{i0}. \quad (11)$$

$\tau = \frac{a\tau}{h}$ ni hisobga olsak, natijani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau v_{i0} + \frac{\tau^2}{2} \left(a^2 \frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2} + f_{i0} \right). \quad (12)$$

Yuqorida (11) formuladan birinchi vaqt bosqichidagi qiymatlar u_1^i topildi. Endi ushbu qiymatlar yordamida keyingi barcha tugun nuqtalaridagi u_j^i larni ketma-ket hisoblaymiz:

$$u_{ij+1} = 2u_{ij} - u_{ij-1} + r^2(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + \tau^2 f_{ij},$$

bu yerda $i = 1, 2, \dots, N-1$ va $j = 1, 2, \dots, M-1$.

Bu formula orqali u_{ij+1} qiymatlari ketma-ket aniqlanadi. Ya'ni, j -chi qatlamdagi qiymatlar ma'lum bo'lsa, ular yordamida $(j+1)$ -chi qatlamdagi qiymatlar hisoblanadi:

$$u_{ij+1} = 2u_{ij} - u_{ij-1} + r^2(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + \tau^2 f_{ij}.$$

Bunda chegaraviy nuqtalar har bir vaqt bosqichida $u_{0j} = 0$ va $u_{Nj} = 0$ shartlarini qanoatlantiradi. Demak, to'ring har bir t_j vaqt qatlamida u_{ij} qiymatlari quyidagi tartibda hisoblanadi:

1. $j = 0$ uchun:

$$u_{i0} = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

2. $j = 1$ uchun:

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau v_{i0} + \frac{\tau^2}{2} \left[a^2 \frac{u_{i+10} - 2u_{i0} + u_{i-10}}{h^2} + f_{i0} \right].$$

3. $j = 0, 1, \dots, M-1$ uchun rekursiv formula:

$$u_{ij+1} = 2u_{ij} - u_{ij-1} + r^2(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + \tau^2 f_{ij}.$$

Har bir j bosqichida chegaraviy qiymatlar:

$$u_{0j} = 0, \quad u_{Nj} = 0.$$

Boshlang'ich shartlardan esa:

$$u_{i0} = u_0(x_i)$$

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau v_{i0} + \frac{\tau^2}{2} \left[a^2 \frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2} + f_{i0} \right]$$

Endi tebranishlarning optimal qiymatini topish uchun maqsad funksionalining minimal qiymatini aniqlash muammosini ko'rib chiqamiz. Masalaning maqsad funksionali quyidagicha berilgan edi:

$$J = \int_0^T \int_0^L (u^2(x, t) + \alpha f^2(x, t)) dx dt \rightarrow \min$$

Ayirmali sxemalar ko'rinishda u quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$J = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N-1} \left[(u_{ij})^2 + \alpha (f_{ij})^2 \right] h \tau.$$

Ushbu funksional fizik ma'noda torning potensial energiyasini ifodalaydi, ya'ni torning deformatsiyalanish darajasiga bog'liq kattalikdir. Funksional J minimal bo'lishi uchun $u(x, t)$ funksiyasi (1) tenglamaning yechimi bo'lishi shart

$$J_h(f) \rightarrow \min_{f_i^j}.$$

u_{ij} qiymatlar f_{ij} orqali aniqlanadi, shuning uchun bu — optimal boshqaruv masalasi hisoblanadi. Umumiy holda optimal boshqaruvni topish algoritmi maqsad funksionalni minimallashtirish uchun iteratsion usulda quyidagicha beriladi:

- boshlang'ich yaqinlashishni qaraymiz: $u_{ij}^{(0)} = 0$;
- iteratsion jarayonni $k = 0, 1, 2, \dots$ uchun ko'rib chiqamiz;
- berilgan $f^{(k)}$ lar uchun $u^{(k)}$ larni umumiy hosil qilingan tor tebranish tenglamasining ayirmali sxemalardagi formulasiga ko'ra hisoblaymiz;
- maqsad funksionalini quyidagicha hisoblaymiz:

$$J^{(k)}[u] = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N-1} \left[y_{ij}^{(k)} + \alpha u_{ij}^{(k)} \right] \cdot h \cdot \tau$$

Maqsad funksionalini hisoblash jarayoni

$$\left| J^{(k+1)} - J^{(k)} \right| < \varepsilon$$

shart bajarilgunga qadar davom etadi. Bunda hosil bo'lgan natija yechim, k – iteratsiya soni deyiladi. ε – juda kichik musbat miqdor.

Shunday qilib, to'rlar usuliga asoslangan ayirmali sxema yordamida u_j^i qiymatlarining umumiy yechimi va maqsad funksionalining minimallashtirish tartibi aniqlanadi. Bu yondashuv optimal boshqaruv masalasini sonli hisoblash orqali yechish imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

- Sharipov I. I. Differensial tenglamalarni sonli yechish usullari. — Toshkent: TDPU nashriyoti, 2009.
- To'laganov X. A. Optimal boshqaruv nazariyasi. — Toshkent: O'zbekiston, 2000.

3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Э. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — Москва: Наука, 1969.
4. Марчук Г. И. Численные методы в прикладной математике. — Москва: Наука, 1987.
5. Матякубов Д. Э., Толаганов Х. А. Математик физика тенгламалари. — Тошкент: Фан, 2002.