

MATEMATIKADA QIZIQARLI MASALALAR VA YECHISH USULLARI

Sotvoldiyev A.I., Maxmasaidova S.U.

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti akmal.sotvoldiyev@mail.ru

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti sayyodxonm@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqola umumiy o'rta ta'lim maktablarida matematika fanini o'qitish jarayonida o'quvchilarning fanga bo'lgan qiziqishini oshirish va bilim sifatini yuksaltirish masalasini ilmiy-didaktik jihatdan tadqiq etishga bag'ishlangan. Maqolada matematika fanining rivojlanishiga ulkan hissa qo'shgan uch buyuk alloma – Muso al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy va Abu Ali ibn Sinoning ilmiy merosi tizimli ravishda o'rganilgan. Xorazmiyning o'nlik pozitsion sanoq tizimini joriy etishdagi roli, "panjara" usuli bilan ko'paytirish texnikasi, Beruniyning proporsional hisob-kitob sohasidagi "besh miqdor qoidasi" va "to'qqiz miqdor qoidasi", Ibn Sinoning 9 raqami yordamida sonlarni kvadrat va kubga ko'tarish to'g'riligini tekshirish qoidalari tahlil qilingan. Har bir bo'limda nazariy asoslar matematik isbot bilan mustahkamlanib, o'quvchilar uchun qiziqarli va yechish mumkin bo'lgan amaliy masalalar keltirilib, natijalari jadval ko'rinishida umumlashtirilgan. Maqola matematik ta'limning tarixiy va metodologik jihatlarini birlashtirgan holda zamonaviy o'qitish amaliyotiga tadbiq etish uchun mo'ljallangan ilmiy-metodik manba sifatida xizmat qilishi mumkin.

Kalit so'zlar: matematikani o'qitish, Muso al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy, Abu Ali ibn Sino, algebra, o'nlik sanoq tizimi, panjara usuli, besh miqdor qoidasi, sonlarni tekshirish qoidalari, didaktik vositalar, matematika tarixi.

KIRISH. Ma'lumki, umumiy o'rta ta'lim maktablarida matematika fanini o'qitish har doim ham o'quvchilar uchun qiziqarli va tushunarli bo'lavermaydi. Ko'pchilik o'quvchilar matematikani "quruq" va "hayotdan uzoq" fan sifatida qabul qilishadi. Biroq, matematika tarixi shuni ko'rsatadiki, bu fan ming yillar davomida aniq hayotiy muammolarni hal etish ehtiyojidan tug'ilgan va rivojlangan [1].

Bugungi kunda O'zbekistonda ta'lim sifatini oshirish davlat siyosatining ustuvor yo'nalishlaridan biriga aylangan. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-5032-son qarori matematika ta'limini rivojlantirishga alohida e'tibor qaratib, o'quvchilarning matematik savodxonligini oshirishni maqsad qilib qo'ygan [6]. Shu bilan birga, ta'limda innovatsion va tarixiy-ma'rifiy yondashuvlardan foydalanish

o'quvchilarning kognitiv qiziqishini (bilishga intilishini) sezilarli darajada oshirishi ilmiy jihatdan asoslangan [5].

Ushbu maqolada biz matematika fani tarixidagi uch ulkan siymoning – Muso al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy va Abu Ali ibn Sinoning – merosidan olingan qiziqarli masalalar va usullarni ilmiy-didaktik nuqtai nazardan tahlil qilamiz. Har bir bo'lim tegishli nazariy asosni, amaliy misol va masalalarni, shuningdek, o'qituvchilar uchun metodik tavsiyalarni o'z ichiga oladi.

Tadqiqotning maqsadi: matematika tarixi boyliklaridan foydalanib, o'quv jarayonini jonlantirish va o'quvchilarning fanga bo'lgan qiziqishini ilmiy asosda oshirishning samarali yo'llarini ko'rsatish.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

1. Muso al-Xorazmiy va raqamlar inqilobi. Muso al-Xorazmiy (taxminan 780-850) – O'rta Osiyo, xususan Xorazm zaminidan yetishib chiqqan buyuk alloma bo'lib, uning asarlari nafaqat Sharq, balki G'arb matematikasining poydevorini ham shakllantirgan. U Bag'doddagi “Bayt ul-Hikma” (Donishmandlar uyi) akademiyasida faoliyat yuritgan va o'z asarlarini arab tilida yozgan.

Uning “Kitob al-hisob al-hindiy” (Hind hisobi kitobi) nomli asari o'nlik pozitsion sanoq tizimini (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari) arab olamiga, undan esa Yevropaga tarqatishda hal qiluvchi rol o'ynadi. Ushbu raqamlar hozirda “arab raqamlari” deb atalsa-da, aslida Hindistonda ixtiro qilingan bo'lib, ularni ilmiy asosda tavsiflab, Yevropaga yetkazishda Xorazmiyning xizmati beqiyosdir [1].

Xorazmiyning ikkinchi buyuk xizmati – algebra faniga asos solishi. Uning “Al-Kitob al-mukhtasar fi hisob al-jabr va-l-muqabala” (Qayta tiklash va tenglashtirishning qisqacha kitobi) asari algebraning birinchi tizimli bayoni hisoblanadi. “Algebra” so'zining o'zi ham shu asarning nomidagi “al-jabr” iborasidan kelib chiqqan, muallif nomi esa Yevropada “algorismus” tarzida talaffuz etilgan – bugungi «algoritm» atamasi ana shu nomdan hosil bo'lgan [2].

Panjara usuli bilan ko'paytirish

Ko'pchilikka noma'lum bo'lgan bu usul aslida ko'p xonali sonlarni ko'paytirishning juda samarali va vizual yo'lidir. Usulning mohiyati shundaki, ko'paytiriluvchi va ko'paytuvchi sonlarning raqamlari maxsus panjara (to'r) ichiga joylashtiriladi, so'ngra har bir katak diagonali bo'yicha ikkiga bo'linadi va mos raqamlar ko'paytmasi katakchaga yoziladi.

Panjara usulining bosqichlari:

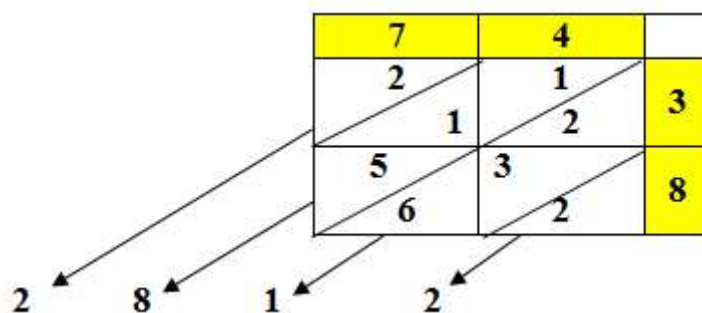
1-bosqich: Ko'paytiriladigan sonning har bir raqami panjara ustiga, ko'paytuvchi sonning har bir raqami esa panjara o'ng tomoniga yoziladi.

2-bosqich: Har bir katakcha diagonali bilan ikkiga bo'linadi. Mos raqamlarning ko'paytmasi hisoblanib, o'nlar katakchaning yuqori-chap qismiga, birlar esa quyi-o'ng qismiga yoziladi.

3-bosqich: Diagonallar bo'yicha raqamlar qo'shiladi (o'ng pastdan chap tepaga qarab). Hosil bo'lgan ko'paytma pastdan tepaga qarab o'qiladi.

Misol. 74×38 ni panjara usulida hisoblang.

Yechish: Panjara 2×2 o'lchamda tuziladi (74 ning 7 va 4 raqamlari ustiga, 38 ning 3 va 8 raqamlari o'ngiga yoziladi):



Diagonallar bo'yicha quyidan yuqoriga qarab qo'shib chiqamiz. Demak, 2812

Tekshiruv: $74 \times 38 = 2812$

Panjara usulining pedagogik afzalligi shundaki, u o'quvchilarga ko'paytirishning qanday ishlashini vizual ko'rsatadi, xatolik qilish ehtimolini kamaytiradi va hisoblash jarayonini oson kuzatish imkonini beradi. Bu usul hozirgi kunda ham Hindiston va ba'zi Yevropa mamlakatlarida o'quvchilarga o'rgatilmoqda.

2. Abu Rayhon Beruniy va proporsional hisob-kitoblar. Abu Rayhon Beruniy (973-1048) – Oʻrta Osiyo, xususan Xorazmning Kot shahrida tugʻilgan buyuk alloma boʻlib, u astronomiya, matematika, geografiya, tarix, farmakologiya va boshqa oʻnlab fanlar boʻyicha 146 dan ortiq asar yozgan. Uning “Hindiston” (Tahqiq ma lil-Hind) va “Qonuni Mas’udiy” asarlari ilm-fan tarixining durdona asarlaridan hisoblanadi.

Matematika sohasida Beruniy “miqdorlar qoidasi” – ya’ni proporsional noma’lumlarni topish usulini chuqur rivojlantirdi. U nafaqat “uch miqdor qoidasi”ni, balki 5, 7, 9, 11, 15 va hatto 17 miqdorli masalalarni yechish usullarini ham tizimlashtirdi. Bu qoida savdo, foizlar, zichlik va boshqa amaliy hisob-kitoblarda keng qoʻllanilgan.

Besh miqdor qoidasi. Uch miqdor qoidasida proporsiya: $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ koʻrinishida boʻlib, uchta ma’lum orqali toʻrtinchi noma’lum topiladi. Besh miqdor qoidasida esa ikkita proporsiya birlashtiriladi:

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : x$$

ya’ni

$$x = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2}$$

Beruniy masalasi (foiz hisoblash). Agar 10 dirham 2 oyda 5 dirham foyda keltirsa, 8 dirham 3 oyda qancha foyda keltiradi?

Yechish: Noma’lumni x dirham deylik. Besh miqdor qoidasiga koʻra:

$$x = \frac{8 \cdot 3 \cdot 5}{10 \cdot 2} = 6 \text{ dirham}$$

yoki

10	2	5
8	3	x

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 6$$

Javob: 8 dirham 3 oyda 6 dirham foyda keltiradi.

Nyuton masalasi (ishchi masalasi). Bir xattot 8 kunda 15 varoq yoza oladi. 405 varoqni 9 kunda yozishga ulgurish uchun necha nafar xattot zarur bo‘ladi?

Yechish: Xattotlar sonini x deylik. Besh miqdor qoidasiga ko‘ra:

$$x = \frac{1 \cdot 8 \cdot 405}{15 \cdot 9} = 24 \text{ nafar}$$

yoki

1	8	15
x	9	405

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{8}{9} = \frac{15}{405} \Rightarrow x = 24$$

Javob: Jami 24 nafar xattot zarur.

To‘qqiz miqdor qoidasi. To‘qqiz miqdor qoidasi – Beruniyning eng noodatiy kashfiyotlaridan biri. Bunda to‘rtta omil birlashtirilgan holda noma’lum topiladi: uch o‘lchamli ob’ektlar narxini hisoblashda qo‘llaniladi.

Beruniy masalasi (g‘isht narxini hisoblash). O‘lchamlari $5 \times 4 \times 3$ bo‘lgan 30 dona g‘ishtning narxi 60 dirham. O‘lchamlari $8 \times 6 \times 2$ bo‘lgan 20 dona g‘ishtning narxi necha dirham?

Yechish: To‘qqiz miqdor qoidasiga ko‘ra:

$$x = \frac{8 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 60}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 30} = 64 \text{ dirham}$$

yoki

5	4	3	30	60
8	6	2	20	x

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{30}{20} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 64$$

Javob: 20 dona katta g‘ishtning narxi 64 dirham.

Eslatma: “Proporsiya” so‘zi lotincha “proportio” so‘zidan olingan bo‘lib, “o‘lchovdosh” degan ma‘noni bildiradi. Zamonaviy matematikada Beruniy qoidalari proporsional munosabatlar va chiziqli tenglamalar sifatida o‘rgatiladi.

O‘quvchilar uchun mustaqil masala: Agar 6 ishchi 10 kunda 90 kvadrat metr yer qazasa, 4 ishchi 15 kunda qancha metr yer qazadi?

3. Abu Ali ibn Sino va 9 raqami sirlari. Abu Ali Husayn ibn Sino (980-1037) – Buxoro yaqinidagi Afshona qishlog‘ida tug‘ilgan buyuk tabib va faylasuf. Uning “Ash-shifo” asari 18 qismdan iborat bo‘lib, unda matematikaga oid “Qisqartirilgan Yevklid”, “Sonlar fani”, “Qisqartirilgan Almagest” va “Musiqqa fani” bo‘limlari mavjud. “Sonlar fani” bo‘limi 43 ta’rif va 201 teoremani o‘z ichiga oladi [3].

Ibn Sino 9 soni yordamida arifmetik amallarning to‘g‘riligini tekshirish usulini matematik jihatdan asoslab berdi. Bu usul “to‘qqizga tekshirish” yoki “modullar arifmetikasi” nomi bilan ham tanilgan bo‘lib, hisob-kitob xatolarini aniqlashda qo‘llanilgan.

Kvadratlarning oxirgi raqamlari haqidagi teoremlar. Ibn Sino kuzatishiga ko‘ra, ixtiyoriy natural sonni kvadratga ko‘targanda natijaning oxirgi raqami faqat 0, 1, 4, 5, 6 yoki 9 bo‘lishi mumkin – hech qachon 2, 3, 7 yoki 8 bo‘lmaydi. Bu esa son kvadrat ekanligi-emasligini tezda aniqlash imkonini beradi.

Son (mod 10)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kvadrat (mod 10)	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Masala. Sonning kvadrati 0, 2, 3, 5 raqamlaridan tashkil topadi. Sonning o‘zini toping.

Yechish: 0, 2, 3, 5 raqamlari bilan yozilgan eng kichik son: 2035, eng katta son: 5320. Demak, $45 < \text{son} < 73$ (chunki, $45^2 = 2025$ va $73^2 = 5329$).

Kvadrat 5 bilan tugashi uchun son 0 yoki 5 bilan tugashi kerak.

Tekshirish:

$$50^2 = 2500 \text{ (raqamlar: 0, 2, 5, 0 – 3 mavjud emas)}$$

$$55^2 = 3025 \text{ (raqamlar: 0, 2, 3, 5 – barchasi mavjud)}$$

$$60^2 = 3600 \text{ (raqamlar: 0, 3, 6, 0 – 2 va 5 yo‘q)}$$

Javob: 55

9 raqami yordamida tekshirish qoidalari. Ibn Sinoning eng muhim matematik kashfiyotlaridan biri – sonlarni 9 ga bo‘lishda hosil bo‘ladigan qoldiqlar (modullar) va ularning kvadratlari o‘rtasidagi bog‘liqlikni aniqlaganligidadir.

Bu to‘rt qoidada bayon etilgan:

Qoida	Sonning 9 ga bo‘linganda qoldig‘i	Kvadratining 9 ga bo‘linganda qoldig‘i
1	1 yoki 8	1
2	2 yoki 7	4
3	4 yoki 5	7
4	3, 6 yoki 9 (0)	0

1-qoidaning isboti: $M = 9n + 1$ bo‘lsin. U holda:

$$M^2 = (9n + 1)^2 = 81n^2 + 18n + 1 = 9(9n^2 + 2n) + 1$$

Demak, M^2 ni 9 ga bo‘lganda qoldiq 1 ga teng.

$N = 9k + 8$ bo‘lganda ham:

$$N^2 = (9k + 8)^2 = 81k^2 + 144k + 64 = 9(9k^2 + 16k + 7) + 1$$

Natijada qoldiq yana 1 ga teng. Demak, 1-qoida isbotlandi. Qolgan qoidalar ham xuddi shunday algebraik kengaytirish orqali isbot qilinadi.

Amaliy tatbiq (hisob-kitob xatosini aniqlash). O‘quvchi $47^2 = 2019$ deb hisobladi. Bu to‘g‘rimi?

Yechish:

$$47 = 9 \cdot 5 + 2$$

demak, $47 \equiv 2 \pmod{9}$

2-qoidaga ko‘ra, $47^2 \equiv 4 \pmod{9}$ bo‘lishi kerak. Lekin $2019 = 9 \cdot 224 + 3$, ya’ni $2019 \equiv 3 \pmod{9}$. Bundan $4 \neq 3$. Demak, hisob noto‘g‘ri!

To‘g‘ri javob: $47^2 = 2209 \equiv 4 \pmod{9}$

Bundan tashqari, Ibn Sino kub ko'tarish uchun ham shunga o'xshash qoidalarni bayon etdi. Kublarda 9 ga bo'linganda qoldiqlar quyidagicha:

Qoida	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Son (mod 9)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Kubi (mod 9)	0	1	8	0	1	8	0	1	8

5-qoidaning isboti: $N = 9k + 1$ bo'lsin:

$$N^3 = (9k + 1)^3 = 729k^3 + 243k^2 + 27k + 1 = 9(81k^3 + 27k^2 + 3k) + 1$$

Demak, $N^3 \equiv 1 \pmod{9}$. Xuddi shunday, son $\equiv 4 \pmod{9}$ bo'lsa, $4^3 = 64 = 9 \cdot 7 + 1$, ya'ni kub $\equiv 1 \pmod{9}$. Son $\equiv 7 \pmod{9}$ bo'lsa, $7^3 = 343 = 9 \cdot 38 + 1$, ya'ni kub $\equiv 1 \pmod{9}$. 5-qoida isbotlandi.

NATIJALAR

Ushbu tadqiqot davomida quyidagi asosiy natijalar qo'lga kiritildi:

Alloma	Usul / Qoida	Zamonaviy ekvivalenti	Didaktik ahamiyati
Al-Xorazmiy	Panjara usuli bilan ko'paytirish	Matritsali hisoblash elementlari	Vizual o'rganish, hisob tezligi
Beruniy	Besh/To'qqiz miqdor qoidasi	Proporsional tenglamalar, ikki o'zgaruvchili tizimlar	Amaliy masalalarni hal etish
Ibn Sino	9 raqami bilan tekshirish qoidalari	Modullar arifmetikasi (mod 9)	Hisob-kitob xatolarini aniqlash

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki:

1. O'rta Osiyo allomalarining matematika merosida bugungi maktab dasturidagi barcha asosiy mavzular (ko'paytirish, proporsiya, modullar arifmetikasi) uchun metodologik asoslar mavjud.

2. Tarixiy kontekstda berilgan masalalar o'quvchilarning fanga bo'lgan qiziqishini oshirishga xizmat qiladi, chunki "bu usulni kim, qachon va nima uchun ixtiro qilgan" savoli o'quvchida tabiiy qiziqish uyg'otadi.

3. Panjara usuli, miqdor qoidalari va Ibn Sino tekshiruv qoidalari – uchala usul ham hozirgi dasturda mavjud mavzularga (ko'paytirish, proporsiya, bo'linish) organik tarzda kiritilishi mumkin.

4. Ushbu usullar nafaqat tarixiy, balki algoritmik jihatdan ham mustahkam bo'lib, ularni kompyuter dasturlash darslarida ham qo'llash mumkin (masalan, panjara usuli – matritsali ko'paytirish asosi sifatida).

Maqolada keltirilgan barcha masalalar maktab o'quvchilari uchun yechish mumkin darajada bo'lib, ular matematik mantiqni rivojlantirish bilan bir qatorda tarixiy-madaniy bilimlarni ham shakllantiradi.[11]

XULOSA. Ushbu tadqiqot shuni ko'rsatadiki, matematika fani tarixidan olingan qiziqarli usullar va masalalar zamonaviy o'qitishning samarali vositasiga aylanishi mumkin. Muso al-Xorazmiyning panjara usuli, Abu Rayhon Beruniyning ko'p miqdorli proporsiya qoidalari va Abu Ali ibn Sinoning 9 raqami yordamidagi tekshiruv qoidalari – bu uchta uslub birgalikda o'quvchida matematik tafakkurning uch jihatini – vizual idrok etish, mantiqiy umumlashtirish va analitik tekshirishni shakllantiradi.

Pedagogik nuqtai nazardan, ko'p asrlik tarixga ega usullarni darsda qo'llash o'quvchilar ongida "matematika qadim-qadimdan inson hayotiga xizmat qiluvchi tirik fan" degan tushunchani mustahkamlaydi. Bu esa "matematika nima uchun kerak?" degan abadiy savolga tarixiy va amaliy javob beradi.

O'zbek matematika maktabining ushbu buyuk vakillari – al-Xorazmiy, Beruniy va ibn Sino – nafaqat o'z davrlari, balki butun insoniyat matematika tarixi uchun muhim kashfiyotlar qilganlar. Ularning merosini maktab darsliklariga organik tarzda kiritish o'quvchilarning milliy g'ururini oshirish bilan birga, matematik ta'lim sifatini ham yuksaltiradi.

Kelgusi tadqiqotlarda ushbu usullarning zamonaviy o'qitish texnologiyalari (masalan, GeoGebra, interaktiv dasturlar) bilan integratsiyasi va uning o'quvchilar yutuqlari dinamikasiga ta'sirini eksperimental jihatdan o'rganish maqsadga muvofiq.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Al-Xorazmiy. Kitob al-hisob al-hindiy (Hind hisobi kitobi). Bag'dod, IX asr. (Arab tilidan tarjima: Roshdinskiy I. Matematicheskiye traktati. M.: Nauka, 1983.)
2. Al-Xorazmiy. Al-Kitob al-muhtasar fi hisob al-jabr va-l-muqabala. Bag'dod, IX asr. (Tarjima: Rozenfeldning "Al-Xorazmiy" kitobi, M.: Nauka, 1983.)
3. Ibn Sino. Kitob ash-Shifo: Sonlar fani bo'limi. Buxoro, XI asr. (Qayta nashr: Rozenfeldning "Ibn Sino" asari, M.: Nauka, 1986.)
4. Beruniy A.R. Maqola fi rashikāt al-Hind (Hind rashikalari haqida maqola). XI asr // Beruniy. Tanlangan asarlar. T.: Fan, 1973.
5. Jo'rayev M.U. Matematika va zamonaviy texnologiyalar uyg'unligi. T.: "O'zbekiston", 2022. 280 b.
6. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-5032-son qarori. "Matematika ta'limini rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida". 2021 yil 6 may.
7. Kovalevskaya S.V. Matematika haqida mulohazalar. M.: Akademiya, 1974. 112 b.
8. Sobirov T.S., Toshmatov N. Qiziqarli matematika. T.: O'qituvchi, 2019. 184 b.
9. Gauss C.F. Disquisitiones Arithmeticae. Leipzig, 1801. (Tarjima: Gauss. Arifmetik tadqiqotlar. M.: Nauka, 1959.)
10. Matviyevskaya G.P. Al-Xorazmiy – buyuk matematik va astronom. T.: Fan, 1987. 96 b.
11. Maxmasaidova, S. U. (2023). FUNKSIYA HOSILASINING IQTISODIY TATBIQLARI. *ILMIY TADQIQOT VA INNOVATSIYA*, 2(1), 22-27.