

YUQORI TARTIBLI O'ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLI BO'LMAGAN CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

Sattorov M.E., Jalilov Sh.S.

QDTU katta o'qituvchisi. mamadiyorsattorov29@gmail.com

QDTU assistenti. jalilovshaxriyor10@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada yuqori tartibli o'zgarmas ko'effitsiyentli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarning nazariy asoslari va ularni yechish usullari o'rganiladi. Ushbu turdagi tenglamalarni yechishda mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini aniqlash, xarakteristik tenglama usulidan foydalanish hamda xususiy yechimni topish metodlari tahlil qilinadi. Shuningdek, maqolada differensial tenglamalarning amaliy masalalarni modellashtirishdagi o'rni ko'rsatilib, ayrim misollar orqali ularning tatbiqi yoritiladi. Olingan natijalar matematik modellashtirish, fizika va texnika sohalaridagi jarayonlarni tahlil qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Kalit so'zlar: Differensial tenglama, chiziqli differensial tenglama, bir jinsli bo'lmagan tenglama, o'zgarmas ko'effitsiyentlar, yuqori tartibli tenglamalar, xarakteristik tenglama, umumiy yechim, xususiy yechim, matematik modellashtirish.

KIRISH. Hozirgi zamon matematika va uning amaliy tatbiqlarida differensial tenglamalar muhim o'rin egallaydi. Turli tabiiy jarayonlar, texnik tizimlar hamda iqtisodiy modellarni tavsiflashda yuqori tartibli differensial tenglamalardan keng foydalaniladi. Ayniqsa, o'zgarmas ko'effitsiyentli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar ko'plab fizik va muhandislik masalalarini modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Bunday tenglamalar mexanika, elektrotexnika, tebranish jarayonlari, signal uzatish tizimlari va boshqa ko'plab sohalarda uchraydi.

Yuqori tartibli o'zgarmas ko'effitsiyentli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarni yechishda ularning mos bir jinsli tenglamasining umumiy yechimini topish, xarakteristik tenglama usulidan foydalanish hamda xususiy yechimni aniqlash muhim bosqich hisoblanadi. Mazkur maqolada ushbu turdagi differensial tenglamalarning nazariy asoslari, ularni yechish usullari hamda ayrim amaliy misollar orqali tatbiqlari ko'rib chiqiladi.

MASALANING QO'YILISHI, YECHIMI VA TAHLILI. Ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar . Bunday tenglama

$$y'' + py' + gy = f(x) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lib, bu yerda p, g o'zgaras koeffitsiyentlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi, bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni $\bar{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo'lsa, umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu fikrga (2) yechimni (1) tenglamaga qo'yib, (1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}(x)$ ni topishni yuqorida o'rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo'lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo'ladi. (1) tenglamada $f(x)$ funksiya:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, bu yerda $P_n(x)$ n – darajali ko'p had;

2) $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ ko'rinishda bo'lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.

Birinchi holda xususiy yechimni $y_1(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$ ko'rinishda izlaymiz, bu yerda k xarakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo'lganlari soni (0,1,2 bo'lishi mumkin), $Q_n(x), P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko'phad. U holda bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(25x^2 - 47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y'' + 2y' - 3y = 0$ bo'lib, uning xarakteristik tenglamasi $r^2 + 2r - 3 = 0$ bo'ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \quad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

bo'lib, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ bo'ladi.

Endi berilgan birjinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz: Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko'phad darajasi bilan bir xil ko'phad, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko'phad ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi aniqmas A , B va C koeffitsiyentlarni topish lozim. Shartga ko'ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak.

Buning uchun

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1'(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B),$$

$$y_1''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} \cdot 2A$$

larni berilgan tenglamaga qo'yib,

$$e^{2x}[2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C)] = e^{2x}(25x^2 - 47) \text{ tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi}$$

tenglikni e^{2x} ga bo'lsak,

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 - 47$$

bo'ladi.

$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo'lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = 47. \end{cases}$$

uchta noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak $A = 5$, $B = -12$, $C = 3$ bo'ladi.

Demak, $y_1(x) = e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$ berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan

$$y = \bar{y} + y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + e^{2x} (5x^2 - 12x + 3)$$

bo'ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga *aniqmas koeffitsiyentlar usuli* deyiladi.

Misol.

$$y'' - 4y' = 3x^2$$

tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish:

$$r^2 - 4r = 0$$

bo'lib, $r_1 = 0$; $r_2 = 4$ uning ildizlari bo'ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$$

bo'ladi. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo'lib, $\alpha = 0$ va nol xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun xususiy yechimi

$$y_1(x) = e^{0x}x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_1''(x) = 6Ax + 2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 3x^2$$

tenglama hosil bo'ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

bo'ladi. Shunday qilib, xususiy yechimi

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

bo‘lib, umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

bo‘ladi.

2) $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ bo‘lganda xususiy yechimi

$$y_1(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^k$$

ko‘rinishda bo‘lib, k xarakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng bo‘lganlarining soni.

Misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: Xarakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ bo‘lib, ildizlari

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

bo‘ladi. $\beta = 1$; $i\beta = i$ bo‘lganligi uchun $k = 1$, ya‘ni xususiy yechimini

$$y_1(x) = (A \cos x + B \sin x)x^1$$

ko‘rinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsiyentlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topib,

$$y_1'(x) = (A \cos x + B \sin x)x + A \cos x + B \sin x = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x$$

$$y_1''(x) = B \cos x - A \cos x - Bx \sin x - A \sin x + B \cos x - Ax \cos x = (2B - Ax) \cos x + (-2A - Bx) \sin x$$

berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(2B - Ax) \cos x + (2A - Bx) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x \quad \text{yoki}$$

$$2B \cos x + (-2A) \sin x = \sin x$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0$, $A = -\frac{1}{2}$ bo‘lib, xususiy yechimi

$$y_1(x) = -\frac{x}{2} \cos x$$

bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

bo'lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

bo'ladi.

Misol.

$$y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x$$

differentensial tenglamaning

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

tenglamaning xarakteristik tenglamasi $r^2 + 4r + 5 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $r_1 = -2 - i$;

$r_2 = -2 + i$ bo'ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

bo'ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x) = A \cos x + B \sin x$$

ko'rinishda izlaymiz.

$y'(x)$, $y''(x)$ hosilalarni topib berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x = 2 \cos x - \sin x$$

bo'lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2 \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A = \frac{3}{8}$, $B = \frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy

yechimini topamiz.

$$y_1(x) = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

bo'ladi.

Endi berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya'ni boshlang'ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechiminitopamiz: Umumiy yechimdan hosila

$$y'(x) = -2e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) - \frac{3}{8} \sin x + \frac{1}{8} \cos x$$

bo'ladi va boshlang'ich shartlardan foydalanib,

$$1 = \frac{3}{8} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2$$

C_1 va C_2 noma'lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $C_1 = \frac{5}{8}$, $C_2 = \frac{25}{8}$.

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasining yechimi

$$y(x) = e^{-2x}\left(\frac{5}{8} \cos x + \frac{25}{8} \sin x\right) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x \text{ ga teng bo'ladi}$$

XULOSA

Mazkur maqolada yuqori tartibli o'zgaras koeffitsiyentli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarning nazariy asoslari va ularni yechish usullari tahlil qilindi. Tadqiqot jarayonida ushbu turdagi tenglamalarni yechishda avvalo mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini aniqlash, so'ngra xususiy yechimni topish orqali umumiy yechimni hosil qilish muhimligi ko'rsatib berildi.

Olib borilgan tahlillar shuni ko'rsatdiki, yuqori tartibli o'zgaras koeffitsiyentli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar turli tabiiy va texnik jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Ushbu tenglamalarni yechish usullarini chuqur o'rganish va takomillashtirish mexanika, fizika, elektrotexnika hamda boshqa amaliy fanlarda yuzaga keladigan murakkab jarayonlarni tahlil qilish imkonini beradi.

Differensial tenglamalar nazariyasining yo‘nalishidagi tadqiqotlar matematik modellashtirishning rivojlanishiga hamda turli ilmiy-amaliy masalalarni yechishda samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Claudio Canuto, Anta Tabacco. Mathematical Analysis I, (II). Springer-Verlag, Italia, Milan, 2008-yil (2015-yil).
2. B.A.Xudayarov Matematika. I-qism. Chiziqli algebra va analitik geometriya. Toshkent, “Fan va texnologiya”, 2018-yil. 284 bet.
3. B.A.Xudayarov “Matematikadan misol va masalalar to‘plami” Toshkent “O‘zbekiston” 2018-yil. 304 bet.
4. E.F.Fayziboev, Z.I.Suleymenov, B.A.Xudayarov “Matematikadan misol va masalalar to‘plami”, Toshkent, “O‘qituvchi” 2005-yil. 254 bet.
5. F.Rajabov va boshqalar. “Oliy matematika”, Toshkent “O‘zbekiston” 2007-yil. 400 bet.
6. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son qarori. Lex.uz