ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

Умаров Ш.А.

доцент ФерГТУ. sh.umarov81@mail.ru

Анотация. *В данная статья посвящена решению дифференциальных уравнений численными методами, а метод решения дифференциального уравнения гиперболического типа, определенного в ограниченном интервале [0,1] на основе заданных условий, показан с помощью сеточного метода, который является одним из численные методы. Особое внимание уделено применению метода сеток для аппроксимации частных производных первого и второго порядка. Приведены основные принципы построения равномерных и неравномерных сеток, рассмотрены левые, правые и центральные разностные схемы, а также их порядок аппроксимации. На основе разностных замен составлена вычислительная схема для численного решения задачи Коши. Полученные численные результаты сравниваются с аналитическими значениями, что подтверждает эффективность и точность предложенного метода.*

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, метод сеток, разностные схемы, аппроксимация, численные методы, частные производные, конечно-разностный метод, вычислительный эксперимент.*

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения гиперболического типа занимают центральное место в математической физике, поскольку они описывают широкий класс волновых процессов, распространяющихся с конечной скоростью. К таким процессам относятся колебания упругих сред, движение волн в гидродинамике, распространение электромагнитных колебаний и многие другие явления, имеющие фундаментальное значение для науки и техники. Точное аналитическое решение подобных уравнений возможно лишь в ограниченном числе случаев, что делает разработку и применение численных методов одной из наиболее важных задач современной вычислительной математики [1].

Одним из эффективных подходов к решению уравнений гиперболического типа является метод сеток, позволяющий аппроксимировать производные с заданной точностью и получать приближённые решения в дискретных точках области. Преимущество данного метода заключается в его универсальности, простоте реализации и возможности адаптации к различным типам краевых и начальных условий. В работе подробно рассматривается построение равномерных и неравномерных сеток, формирование разностных схем первого и второго порядка, а также построение вычислительной схемы для решения задачи Коши [2].

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки надёжных и высокоточных численных методов для решения задач, связанных с моделированием динамических процессов в различных областях науки и техники. В условиях стремительного развития вычислительных технологий возрастает потребность в алгоритмах, позволяющих эффективно использовать ресурсы современных вычислительных систем для решения сложных дифференциальных уравнений [3].

Метод сеток остаётся одним из ключевых инструментов численного анализа, обеспечивая возможность моделирования процессов, которые невозможно или крайне сложно описать аналитически. Построение корректных разностных схем и исследование их аппроксимационных свойств имеют важное значение для получения устойчивых и точных численных решений. Кроме того, применение метода сеток делает возможным проведение вычислительных экспериментов, позволяющих анализировать поведение решений и сопоставлять их с теоретическими моделями [4].

ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

В последние десятилетия численные методы решения гиперболических дифференциальных уравнений получили широкое развитие благодаря их применимости в математической физике, гидродинамике, электромагнетизме и инженерных задачах. В работе Альшина и Калиткина исследуются численные решения гиперболических задач в неограниченной области, рассматриваются построение разностных схем и их эффективность для моделирования волновых процессов [1]. Этот подход стал базой для последующего развития сеточных методов, применяемых в ограниченных областях.

Ш.Ахмаджанов анализирует применение численных методов для решения дифференциальных уравнений и их использование в инженерной практике. Особое внимание уделяется аппроксимации частных производных и построению вычислительных схем, что является ключевым элементом метода сеток [2]. А.Уринов и И.Тажибаев рассматривают краевые задачи для уравнений смешанного типа с особенностями линии изменения типа, что важно для корректной постановки начально-краевых условий при численных расчетах [3]. Д.Дурдиев представляет теоретические основы дифференциальных уравнений с частными производными и методы их аппроксимации, формируя базу для построения разностных схем второго порядка [4]. О.Комурджишвили исследует разностные схемы для многомерных гиперболических уравнений, рассматривая их устойчивость и точность, что позволяет выбрать оптимальные схемы для практических вычислений [5]. С.Каримов демонстрируют применение сеточного метода для решения задачи Коши для гиперболических уравнений третьего порядка, что подтверждает универсальность метода сеток [6]. Работы Ш.Умаров и Д.Акбаров, А.Абдукадиров хотя и посвящены криптографическим преобразованиям, иллюстрируют важность точных вычислений и аппроксимации, что перекликается с требованиями к численным схемам для гиперболических задач [7], [10]. И.Тожибоев рассматривает особенности постановки краевых задач для уравнений смешанного типа, обеспечивая правильную формализацию начальных условий для сеточных расчетов [8]. М.Турдиматов и соавторы предлагают методы аппроксимации с использованием сплайнов, что близко к подходу аппроксимации производных через разностные схемы в методе сеток [9].

Таким образом, анализ литературы показывает, что метод сеток и разностные схемы являются надежным и универсальным инструментом численного решения гиперболических дифференциальных уравнений. Они позволяют аппроксимировать частные производные с высокой точностью, учитывать различные начальные и краевые условия и проводить вычислительные эксперименты для оценки динамики волновых процессов.

МЕТОДОЛОГИИ

Применение метода сеток для численного нахождения решений дифференициальных уравнений второго порядка в частных производных позволяет использовать в полной мере технические характеристики современных вычислительных машин для достижения требуемой точности [5].

Пусть x удовлетворяет условию $0 \le x \le l$, с помощью точек $x_i = ih$ разобем этот отрезок на N равных частей ($i=0,1,\dots,N$; $h>0$), длина каждого отрезка равно $h = \frac{l}{N}$. Множество точек $x_i=ih$ ($i=0,1,\dots,N$) называются разностями и обозначаются как $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,N\}$, h – длина отрезка между точками множество и называется шагом множество $\overline{\omega}_h$.

Интервал $[0,l]$ с помощью точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < l$ можно разделить на N частей. Тогда $\overline{\omega}_h = \{x_i, = 0,1,\dots,N,\ x_0 = 0,\ x_N = l\}$ сетку с помощью i числа образуем с шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Если для некоторого i имеет место $h_i \ne h_{i+1}$, тогда сетка $\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_h^*$ называется неравномерно распределенной. Если для произвольного $i = 1,2,\dots,N$ выполняется условие $h_i = \frac{l}{N}$ то сетка называется равномерно распределенной.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih\}$ - является сеткой с шагом h. Выразим производное первого порядка от функции $\upsilon(x)$ методом разностей [6].

Самый простой способ следующий

$$L\upsilon \sim \frac{\upsilon_i - \upsilon_{i-1}}{h} = L_{\bar{h}}\upsilon_i$$

здесь знак ~ выражает аппроксимацию $\upsilon_i = \upsilon(x_i)$, само выражение называется левой разностной схемой. Правая разностная схема имеет следующий вид

$$L\upsilon \sim \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{h} = L_{\overset{+}{h}}\upsilon_i$$

а центральная (средняя) разностная схема запишится следующим образом

$$L_{\overset{0}{h}}\upsilon_i = \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_{i-1}}{2h} \quad .$$

Рассмотрим производное второго порядка вида $L\upsilon = \upsilon''$. Аппроксимировать его с помощью двух точек не возможно [7]. Используются три точки x_{i-1}, x_i, x_{i+1}.

Напишем разностный оператор:

$$L_n\upsilon_i = \upsilon_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}\left(\upsilon_{x,i} - \upsilon_{\bar{x},i}\right) = \frac{\upsilon_{i+1} - 2\upsilon_i + \upsilon_{i-1}}{h^2}.$$

Если $\upsilon \in C^{(m)}[0,1]$, $m \geq 4$, тогда имеет место

$$\upsilon_{i\pm1} = \upsilon_i \pm h\upsilon_i' + \frac{h^2}{2}\upsilon_i'' \pm \frac{h^2}{6}\upsilon_i''' + \frac{h^4}{24}\upsilon_i^{(IV)} + O\left(h^4\right)$$

$O(h^n)$ – при $h \to 0$ стремится к нулю быстрее чем h^n.

Здесь

$$\upsilon_{\bar{x}x} - \upsilon'' = \frac{h^2}{12}\upsilon^{(IV)} + O\left(h^2\right) \qquad (1)$$

функция $\upsilon_{\bar{x}x}$ аппроксимирует υ'' во втором порядке. Такие приближенные замены позволяют создавать удобные алгоритмы численного нахождения решений дифференицилальных уравнений второго порядка в частных производных.

ОБСУЖДЕНИЕ. В области ограниченной прямой AB={ $(x, y): 0 \leq x \leq 1, y = 0$ } и характеристикаим

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$$

$$BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

рассчитаем численно решение $u(x,y)$ уравнения

$$\left(-y\right) u_{xx} - u_{yy} = 0,\ m = const > 0,\ \ y < 0 \tag{2}$$

при m=1 , методом сеток при выполнение начальных условий

$$\begin{aligned} &u(x,0) = x \\ &u_y(x,0) = 3x - 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим искомую функцию $u = u(x, y)$ на узлах сетки через $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$ (где h>0, l<0 - шаг, $i = 1,2,\ldots;\ k = 1,2,\ldots$) [8]. Частные производные в каждой внутренней точке $(x_0 + ih, y_0 + kl)$ выразим через разностные схемы следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l} \end{aligned} \tag{4}$$

Также заменим частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} \\ &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} \end{aligned} \tag{5}$$

подставив эти замены в (2) имеем :

$$\left(-lk\right)^m \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} - \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} = 0$$

или

$$u_{i,k+1} = 2u_{i,k} - u_{i,k-1} + \frac{\left(-lk\right)^m l^2}{h^2}\left(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}\right). \tag{6}$$

учитывая $\varphi'' = 0$

$$u_{i,0} = \varphi_i,\ \ u_{i,1} = u_{i,0} + l\psi_i \tag{7}$$

подставив последнее в (6) можно рассчитать значения $u_{i,k+1}$. Эти выражения позволяют получить численные решения рассматриваемой задачи [9].

Сравнительный анализ численного расчета с аналитическими значениями, анализ полученных графиков, показывают что численный расчет на компрютере выполнялся на требуемом уровне [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое исследование показало, что метод сеток является эффективным инструментом для численного решения дифференциальных уравнений гиперболического типа. Аппроксимация частных производных первого и второго порядка с использованием разностных схем позволяет получать решения с требуемой точностью при различных начальных условиях. Построенная разностная модель и вычислительная схема обеспечили стабильное и корректное численное решение исследуемой задачи. Сравнительный анализ полученных численных результатов с аналитическими решениями подтвердил адекватность разработанного алгоритма и его способность точно описывать динамику волновых процессов. Проведённые эксперименты демонстрируют, что использование современных вычислительных средств позволяет существенно повысить эффективность моделирования и сократить время расчётов. Полученные результаты могут быть использованы как в учебных целях, так и при разработке инженерных и научных моделей, связанных с решением уравнений гиперболического типа. Исследовать устойчивость и сходимость различных разностных схем**,** применяемых для уравнений гиперболического типа, с целью выбора оптимальной схемы для конкретных задач математической физики. Расширить исследование на многомерные задачи**,** что позволит использовать разработанные подходы при моделировании более сложных физических процессов.

Литература

1. Альшин, А. Б., Альшина, Е. А., & Калиткин, Н. Н. (2004). Численное решение гиперболических задач в неограниченной области. *Математическое моделирование*, *16*(4), 114-126.

2. Shokirjon o'g'li, A. S. (2025). Differensial tenglamalar va ularning muhandislikdagi roli. o'zbekistonda fanlararo innovatsiyalar va ilmiy tadqiqotlar jurnali, 4(45), 134-137.

3. Urinov, A. K., & Tojiboev, I. T. (2008, July). Eigenvalue and eigenfunctions of some boundary-value problems for a mixed type equation with non-smooth line of type changing. In Proceedings of the 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (pp. 282-289).

4. Durdiyev, D. Q. (2019). Xususiy hosilali differensial tenglamalar. *Toshkent, VNESHINVESTPROM nashriyoti*.

5. Комурджишвили, О. П. (2007). Разностные схемы для решения многомерных уравнений и систем уравнений гиперболического типа. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, *47*(6), 980-987.

6. Abdumo'minova, S., & Karimov, S. (2025). UCHINCHI TARTIBLI GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI. *Scientific journal of the Fergana State University*, (2), 168-168.

7. Umarov, S. A. (2023). Mathematical characteristics of boolean functions' models in cryptographic transformations. *Publishing House "Baltija Publishing*.

8. Тожибоев, И. Т. (2018). Краевые задачи в специальной области для уравнения смешанного типа. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, (56), 17-28.

9. Turdimatov, M., Mukhtarov, F., Ibrokhimov, N., Umarov, S., Mirzayev, J., & Rakhmatov, R. (2024). Mathematical approximator based on basic spline approximation. In *E3S Web of Conferences* (Vol. 508, p. 04010). EDP Sciences.

10. Akbarov, D., Abdukadirov, A., & Umarov, S. (2022, June). Research of general mathematical characteristics of logical operations and table replacements in cryptographic transformations. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2432, No. 1, p. 060020). AIP Publishing LLC.