

TESKARI MATRITSA QURISHNING TURLI USULLARI: NAZARIY ASOSLAR VA AMALIY TAHLIL

Sotvoldiyev A.I.

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti. akmal.sotvoldiyev@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada kvadrat xosmas matritsaga teskari matritsa qurishning uchta asosiy usuli – algebraik to‘ldiruvchilar usuli, Gauss-Jordan usuli va Kayley-Gamilton usuli – ilmiy jihatdan batafsil tahlil qilingan. Har bir usul uchun aniq matematik ta’riflar, teoremlar keltirilgan, so’ngra aniq sonli misollar orqali usullarning amaliy qo‘llanilishi ko‘rsatilgan. Usullarning samaradorligi, hisoblash murakkabligi va qo‘llanish sohalari qiyosiy jihatdan baholangan. Maqola chiziqli algebra kursini o‘rganuvchi talabalar va ilmiy tadqiqotchilar uchun mo‘ljallangan.

Kalit so‘zlar: matritsa, birlik matritsa, teskari matritsa, xosmas matritsa, determinant, algebraik to‘ldiruvchi, qo‘shma matritsa, Gauss-Jordan usuli, Kayley-Gamilton teoremasi, xarakteristik ko‘phad.

KIRISH. Chiziqli algebra – zamonaviy matematikaning eng muhim tarmoqlaridan biri bo‘lib, u fizika, muhandislik, iqtisodiyot, kompyuter fanlari va boshqa ko‘plab sohalarda keng qo‘llaniladi. Matritsa nazariyasi esa chiziqli algebraning markaziy mavzularidan hisoblanadi. Teskari matritsa tushunchasi chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda, koordinatalar almashtirishda, kriptografiyada va boshqa amaliy masalalarda fundamental rol o‘ynaydi.

Teskari matritsa mavzusi matematika tarixida XVIII asrdan boshlab o‘rganila boshlangan. Gabriel Kramer (1750) determinantlar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usulini taklif etgan bo‘lsa, Karl Friedrich Gauss XIX asrda elementar almashtirishlar usulini ishlab chiqqan. XX asrda bu usullar Vilgelm Jordan tomonidan takomillashtirilgan va zamonaviy Gauss-Jordan usulining asosi yaratilgan.

Kayley-Gamilton teoremasi esa Artur Kayley tomonidan 1858-yilda e’lon qilingan bo‘lib, har bir kvadrat matritsa o‘zining xarakteristik tenglamasini qanoatlantirishi haqidagi fundamental natija hisoblanadi. Bu teorema teskari matritsa qurish usulini yaratishga asos bo‘lgan.

Ushbu maqolada teskari matritsa qurishning uchta usuli – algebraik to‘ldiruvchilar usuli, Gauss-Jordan usuli va Kayley-Gamilton teoremasi asosidagi usul

– ilmiy asosda, ta’riflar va teoremlar orqali tushuntirilgan hamda har bir usul aniq misol yordamida ko’rsatilgan. Maqolaning maqsadi – talabalar va tadqiqotchilar uchun ushbu usullarning nazariy asoslarini va amaliy qo’llanilishini yaxlit, tushunarli tarzda bayon etishdan iborat.

ADABIYOTLAR TAHLILI

Teskari matritsa mavzusi turli xil darsliklar va ilmiy maqolalarda keng yoritilgan. Strang [1] o’zining mashhur “Linear Algebra and Its Applications” darsligida Gauss-Jordan usulini eng samarali usul sifatida tavsiya etadi va hisoblash murakkabligini $O(n^3)$ deb baholaydi. Horn va Johnson [2] “Matrix Analysis” monografiyasida teskari matritsa mavjudligi shartlarini algebraik va analitik nuqtai nazardan chuqur tahlil qilgan.

O’zbekiston matematika ta’limi sohasida M.A.Mirzaahmedov va X.Q.Qodirov [3] “Oliy matematika” darsligida uchta usulni ham o’zbek tilida batafsil bayon etishgan. Ular algebraik to’ldiruvchilar usulini kichik o’lchamli matritsalar uchun ($n \leq 3$), Gauss-Jordan usulini esa katta o’lchamli matritsalar uchun tavsiya etadi.

Gantmaher [4] “Matritsa nazariyasi” asarida Kayley-Gamilton teoremasi asosidagi usulning nazariy asoslarini batafsil yoritgan va bu usulning xos sonlar nazariyasi bilan bog’liqligini ko’rsatgan. Golub va Van Loan [5] “Matrix Computations” asarida esa turli usullarning hisoblash barqarorligi va algoritmik samaradorligini qiyosiy tahlil qilgan.

Yuqoridagi manbalarga tayanib, ushbu maqolada uchala usulning ham nazariy asoslari va amaliy qo’llanilishi yaxlit tarzda taqdim etiladi. Avvalgi ishlardan farqli o’laroq, maqolada usullar bir xil matritsa misolida ko’rib chiqilgan, bu esa ularni taqqoslash imkonini beradi.

NAZARIY ASOSLAR

3.1. Asosiy ta’riflar va teoremlar

1-ta’rif. $n \times n$ o’lchovli A matritsaning determinanti noldan farqli bo’lsa, u holda A matritsaga xosmas matritsa deyiladi.

2-ta'rif. A xosmas matritsaning teskari matritsasi deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

bu yerda E – birlik matritsa.

3-ta'rif. $A = (a_{ij})$ matritsaning i -qator va j -ustun kesishmasidagi a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi quyidagicha aniqlanadi:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

bu yerda M_{ij} – i -qator va j -ustunni o'chirib tashlagandan hosil bo'lgan $(n-1) \times (n-1)$ o'lchovli minor.

4-ta'rif. A matritsaga $\bar{A}$ matritsa qo'shma matritsa deyiladi, agar

$$\bar{A} = (A_{ij})^T$$

ya'ni qo'shma matritsa algebraik to'ldiruvchilardan tuzilgan matritsaning transponirlangan matritsasi hisoblanadi.

1-teorema (teskari matritsa mavjudligi sharti). $n \times n$ o'lchovli A matritsaning teskari matritsasi mavjud bo'lishi uchun zarur va yetarli shart – uning determinanti noldan farqli bo'lishidir.

2-teorema (teskari matritsaning yagonaligi). Xosmas matritsa uchun teskari matritsa yagona bo'ladi.

3-teorema (Kayley-Gamilton). Har qanday kvadrat A matritsa o'zining xarakteristik tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ bo'lsa, u holda $p(A) = \Theta$ (Θ – nol matritsa).

TESKARI MATRITSA QURISH USULLARI. Quyida uchta usulni bir xil matritsa misolida ko'rib chiqamiz. Har uch usulda ham quyidagi matritsadan foydalanamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Avval matritsaning determinantini hisoblab, uning xosmas ekanligiga ishonch hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2(3 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 1(4 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 1(4 \cdot 7 - 3 \cdot 8) =$$

$$= 2(27 - 21) - 1(36 - 24) + 1(28 - 24) = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 12 + 1 \cdot 4 = 12 - 12 + 4 = 4$$

$\det(A) = 4 \neq 0$, demak, A – xosmas matritsa va unga teskari matritsa qurilishi mumkin.

4.1. Birinchi usul: algebraik to‘ldiruvchilar usuli

Bu usul qo‘shma matritsa tushunchasiga asoslanadi. Teskari matritsa quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \bar{A}$$

bu yerda $\bar{A}$ – qo‘shma matritsa.

Teskari matritsa qurish algoritmi:

1-qadam: $\det(A)$ ni hisoblash.

2-qadam: Har bir a_{ij} element uchun algebraik to‘ldiruvchi A_{ij} ni hisoblash.

3-qadam: Algebraik to‘ldiruvchilar matritsasini tuzish va transponlash (ya’ni $\bar{A}$).

4-qadam: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \bar{A}$ formulasini qo‘llash.

1-usulda yechish: Barcha 9 ta algebraik to‘ldiruvchini hisoblaymiz:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 21 = 6, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(36 - 24) = -12,$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 24 = 4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(9 - 7) = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 8 = 10,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -(14 - 8) = -6;$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 4) = -2,$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

Algebraik to'ldiruvchilar matritsasini tuzib, uni transponlaymiz:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 4 \\ -2 & 10 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -12 & 10 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Teskari matritsani topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -12 & 10 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Tekshirish:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

bo'lishini ko'rib chiqish mumkin, bu esa hisob to'g'riligini tasdiqlaydi.

Usulning afzalliklari va kamchiliklari:

Afzalliklari: Nazariy jihatdan aniq va tushunarli, kichik o'lchovli (2×2 , 3×3) matritsalar uchun qulay.

Kamchiliklari: Katta n uchun hisoblash murakkabligi $O(n!)$ tartibida bo'ladi (determinantlarni hisoblash tufayli), shuning uchun $n > 4$ uchun amalda qo'llanilmaydi.

4.2. Ikkinchi usul: Gauss-Jordan usuli

Bu usul kengaytirilgan matritsa tushunchasiga asoslanadi. A matritsani birlik matritsa E bilan yonma-yon qo'yib, $(A|E)$ kengaytirilgan matritsa tuziladi. So'ngra elementar almashtirishlar yordamida chap qism E ga aylantiriladi – o'ng qism esa A^{-1} bo'ladi.

4-teorema (Gauss-Jordan). Agar A xosmas matritsa bo'lsa, $(A|E)$ kengaytirilgan matritsani elementar almashtirishlar yordamida $(E|A^{-1})$ ko'rinishga keltirilish mumkin.

2-usulda yechish: Kengaytirilgan matritsani tuzamiz:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$(A|E)$ matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarib, $(A|E)$ matritsani topamiz:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sqsubset \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sqsubset \\ & \sqsubset \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sqsubset \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array} \right) \sqsubset \\ & \sqsubset \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array} \right) \sqsubset \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Demak, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Bu natija birinchi usul natijasi bilan to'liq

mos keladi, bu esa hisob to'g'riligini tasdiqlaydi.

Usulning afzalliklari va kamchiliklari:

Afzalliklari: Hisoblash murakkabligi $O(n^3)$ bo'lib, katta n uchun ham samarali, kompyuter algoritmlarida keng qo'llaniladi, tartibli va sistemali jarayon.

Kamchiliklari: Ko'p almashtirishlar talab etiladi, qo'lda hisoblashda xato qilish ehtimoli yuqori, diagonal elementlaridan biri nolga teng bo'lsa, qatorlarni almashtirish kerak bo'ladi.

4.3. Uchinchi usul: Kayley-Gamilton usuli

Bu usul Kayley-Gamilton teoremasiga asoslanadi. Matritsaning xarakteristik ko'phadi tuziladi, so'ngra Kayley-Gamilton teoremasi qo'llaniladi va algebraik manipulyatsiyalar orqali teskari matritsa ifodalanadi.

Teskari matritsa qurish algoritmi:

1-qadam: $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ xarakteristik ko'phadni topish.

2-qadam: Kayley-Gamilton teoremasi bo'yicha $p(A) = \Theta$ yozish.

3-qadam: Tenglikning har ikki tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirish.

4-qadam: A^{-1} ni matritsaning daraja ko'rinishida ifodalash.

3-usulda yechish: A matritsaning xarakteristik ko'phadini hisoblaymiz:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 4 & 3 - \lambda & 3 \\ 8 & 7 & 9 - \lambda \end{vmatrix}$$

Determinantni ochib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(9 - \lambda) + 28 + 24 - \\ &\quad - (8(3 - \lambda) + 21(2 - \lambda) + 4(9 - \lambda)) = \\ &= (2 - \lambda)(27 - 12\lambda + \lambda^2) + 52 - (24 - 8\lambda + 42 - 21\lambda + 36 - 4\lambda) = \end{aligned}$$

$$= 54 - 51\lambda + 14\lambda^2 - \lambda^3 + 52 + 33\lambda - 102 = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 18\lambda + 4$$

Demak, karakteristik ko'phad:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 18\lambda + 4$$

Kayley-Gamilton teoremasiga ko'ra, $p(A) = \Theta$:

$$-A^3 + 14A^2 - 18A + 4E = \Theta$$

Har ikki tomonni chapdan A^{-1} ga ko'paytiramiz:

$$A^{-1} \cdot (-A^3 + 14A^2 - 18A + 4E) = A^{-1} \cdot \Theta$$

$$-A^{-1} \cdot A^3 + 14A^{-1} \cdot A^2 - 18A^{-1} \cdot A + 4A^{-1} \cdot E = \Theta$$

$$-A^2 + 14A - 18E + 4A^{-1} = \Theta$$

Bu tenglikdan A^{-1} ni topamiz:

$$4A^{-1} = A^2 - 14A + 18E + \Theta$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 14A + 18E) =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} - 14 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 16 & 12 & 14 \\ 44 & 34 & 40 \\ 116 & 92 & 109 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 & 14 \\ 56 & 42 & 42 \\ 112 & 98 & 126 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -12 & 10 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Demak, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Bu natija ham oldingi ikki usul natijalari

bilan to'liq mos keldi.

Usulning afzalliklari va kamchiliklari:

Afzalliklari: Matritsalar algebrasi nuqtai nazaridan elegant va nazariy jihatdan muhim; xos sonlar nazariyasi bilan chuqur bog‘liq.

Kamchiliklari: Xarakteristik ko‘phadni hisoblash murakkab; katta o‘lchamli matritsalar uchun amaliy emas; hisoblash jarayoni ko‘proq vaqt talab qiladi.

NATIJALAR VA MUHOKAMA. Uchala usul ham bir xil A matritsa uchun bir xil A^{-1} ni berdi – bu matematik nazariyaning izchilligini tasdiqlaydi (2-teorema – teskari matritsaning yagonaligi). Usullarni quyidagicha qiyosiy baholash mumkin.

Hisoblash murakkabligi bo‘yicha: Algebraik to‘ldiruvchilar usulida determinantlarni hisoblash $O(n!)$ operatsiya talab qiladi, bu esa $n > 4$ bo‘lganda amalda qo‘llab bo‘lmaydi. Gauss-Jordan usuli $O(n^3)$ operatsiya talab qilgani uchun eng samarali usul hisoblanadi. Kayley-Gamilton usulida xarakteristik ko‘phadni hisoblash $O(n^3)$, matritsa darajalarini hisoblash esa $O(n^4)$ operatsiya talab qiladi.

Qo‘llanish sohalari bo‘yicha: Algebraik to‘ldiruvchilar usuli 2×2 va 3×3 matritsalar uchun, formulalar yordamida analitik ifoda olish kerak bo‘lganda qulay. Gauss-Jordan usuli katta o‘lchamli ($n > 4$) matritsalar uchun, kompyuter dasturlarida eng ko‘p qo‘llaniladigan usul. Kayley-Gamilton usuli esa nazariy tadqiqotlarda, Kayley-Gamilton teoremasi bilan bog‘liq masalalarda, xos sonlar nazariyasi bilan birga qo‘llaniladigan holatlarda ahamiyatli.

Sonli barqarorlik bo‘yicha: Gauss-Jordan usuli qisman ustunli diagonal elementlarini tanlash bilan birgalikda eng barqaror usul hisoblanadi. Algebraik to‘ldiruvchilar usuli yaxlit sonlar bilan ishlashda aniq natijalar beradi.

HULOSA. Ushbu maqolada kvadrat xosmas matritsaga teskari matritsa qurishning uchta asosiy usuli – algebraik to‘ldiruvchilar usuli, Gauss-Jordan usuli va Kayley-Gamilton usuli – nazariy jihatdan asoslanib, aniq misollar yordamida ko‘rsatildi.

Asosiy xulosalar quyidagilar: (1) Teskari matritsa mavjud bo‘lishi uchun zarur va yetarli shart – determinantning noldan farqliligi; (2) Teskari matritsa, agar mavjud

bo'lsa, yagona; (3) Uchala usul ham to'g'ri qo'llanilganda bir xil natijaga olib keladi; (4) Gauss-Jordan usuli katta o'lchamli masalalar uchun eng samarali; (5) Kayley-Gamilton usuli nazariy jihatdan eng chuqur, lekin amalda eng og'ir.

Kelgusi tadqiqotlarda LU-ajratish, QR-ajratish va iterativ usullarni ham tahlil qilish, shuningdek, teskari matritsa hisoblashning parallel algoritmlarini o'rganish maqsadga muvofiq.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Strang G. Linear Algebra and Its Applications. 4th ed. Cengage Learning, 2006. 492 p.
2. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. 2nd ed. Cambridge University Press, 2012. 662 p.
3. Mirzaahmedov M.A., Qodirov X.Q. Oliy matematika. T.: O'zbekiston, 2019. 384 b.
4. Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. Vol. 1. AMS Chelsea Publishing, 1959. 374 p.
5. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. 4th ed. Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
6. Lay D.C. Linear Algebra and Its Applications. 5th ed. Pearson, 2016. 576 p.
7. Axmedov A., Xasanov A. Chiziqli algebra va analitik geometriya. T.: Fan, 2015. 312 b.
8. Trefethen L.N., Bau D. Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997. 361 p.
9. Anton H., Rorres C. Elementary Linear Algebra. 11th ed. Wiley, 2013. 592 p.
10. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd ed. SIAM, 2003. 528 p.