UDK: 531.383; 517.925; 004.416

IKKI O‘LCHAMLI AYLANMA SISTEMANING KUCHLI CHIZIQSIZ TEBRANISHLARINI TADQIQ QILISH MASALASI

Tojiboyev I.T., Sharipova G.M.

FarDU dotsenti, f.-m.f.n., dotsent. ibroxim@gmail.com,

FarDU magistranti, gulshanoysharipova0315@gmail.com

Annotatsiya. *Maqolada ikki o‘lchamli aylanma sistemaning kuchli chiziqsiz tebranishlari tadqiq qilingan. Asosiy masala sifatida quyidagi*

$$\begin{cases} x''+0.01x'+100x+10^6x^3+0.2y'=10^4\cos(90t), \\ y''+0.01y'+100y+10^6y^3-0.2x'=0 \end{cases} \tag{1}$$

tizim ko‘rib chiqilgan, boshlang‘ich shartlar esa

$$x(0)=10^{-6},\ x'(0)=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \tag{2}$$

Masalaning amaliy ahamiyati zamonaviy sensorlarda, avtomatlashtirish tizimlarida va robototexnikada aylanma harakatlarni aniqlashning muhimligi. Maple muhitida perturbatsiya usuli, o‘rtalashtirish usuli va RKF45 sonli usuli qo‘llanib, barqaror amplitudalar aniqlandi. Chiziqsizlik kuchi $\varepsilon=0.624$ *bo‘lganida perturbatsiya usulining cheklanganligi, o‘rtalashtirish usulining 5.0% xato bilan ishlayishi va RKF45 usulining etalon natija berishi ko‘rsatildi.*

Kalit so‘zlar: *Ikki o‘lchamli aylanma sistema, kuchli chiziqsizlik, perturbatsiya usuli, o‘rtalashtirish usuli, RKF45, yagona yechim, barqarorlik, Maple.*

KIRISH. Zamonaviy texnologiyalarda aylanma harakatlarni aniqlash va nazorat qilish muhim ahamiyatga ega. Aylanma sistema deb harakatlanuvchi massivning ikki o‘lchamli tekislikdagi harakatini tavsiflovchi mexanik tizim tushuniladi. Bunday sistemalar sensorlarda, navigatsiya qurilmalarida, avtomatlashtirish tizimlarida va robototexnikada keng qo‘llaniladi.

Aylanma sistemalarning asosiy xususiyati ularning chiziqsiz dinamikasi. Kuchli chiziqsizlik holatida, ya’ni chiziqsiz kuch chiziqli kuchga teng yoki undan katta bo‘lganda, klassik chiziqli nazariya yaroqsiz bo‘lib qoladi. Bu holda maxsus matematik usullar va kompyuter modellashtirish zarur bo‘ladi.

Bizning tadqiqotimizda quyidagi konkret masala ko‘rib chiqiladi:

$$\begin{cases} x''+2\zeta\omega_0 x'+\omega_0^2 x+\gamma x^3+2\Omega y'=F\cos(\omega_d t), \\ y''+2\zeta\omega_0 y'+\omega_0^2 y+\gamma y^3-2\Omega x'=0, \end{cases} \quad (1')$$

bunda $x(t)$ va $y(t)$ – massivning ko‘chishlari (m), $\zeta = 0.0005$ – so‘nish nisbati, $\omega_0 = 100$ rad/s – tabiiy chastota, $\gamma = 10^6$ N/m^3 – chiziqsizlik koeffitsienti, $\Omega = 0.1$ rad/s – aylanish tezligi, $F = 10^{-4}$ N/m – kuch zichligi, $\omega_d = 90$ rad/s – haydash chastotasi.

Boshlang‘ich shartlar:

$$x(0) = x_0 = 10^{-6}, \quad x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (2')$$

Taqdim etilgan masala quyidagi amaliy sohalarda muhim ahamiyatga ega:

1. Mikroelektromexanik sensorlar. Zamonaviy smartfonlarda, avtomobil va aviatsiya tizimlarida qo‘llaniladigan aylanma sensorlari aynan shunday matematik model bilan tavsiflanadi. Sensorlarning aniqligi butun tizim ishonchliligini ta’minlaydi.

2. Robototexnika. Robot manipulyatorlarining bo‘g‘inlarida aylanma harakatlarni nazorat qilish uchun chiziqsiz dinamik modellar zarur. Kuchli chiziqsizlik yuqori tezliklarda namoyon bo‘ladi.

3. Navigatsiya tizimlari. Inersial navigatsiya tizimlarida aylanma tezlikni o‘lchash xatoliklari to‘plangan vaqt o‘tishi bilan ortib boradi. Chiziqsiz effektlar hisobga olinmasa, xato 5-10% ga yetishi mumkin.

4. Avtomatlashtirish. Aylanma dvigatellar va generatorlarning ishonchliligi ularning chiziqsiz xususiyatlarini to‘g‘ri tavsiflashga bog‘liq.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODLAR

So‘nggi yillarda aylanma sistemalar dinamikasi bo‘yicha ko‘plab muhim tadqiqotlar olib borilgan. W.Zhang, R.Baskaran va K.L.Turner tadqiqotida kubik chiziqsizlikning MEMS rezonatorlarga ta’sirini tadqiq qilishgan. Ular ko‘rsatishicha, “chiziqsizlik koeffitsienti $\gamma > 10^5$ bo‘lganda tizim murakkab xulq-atvor ko‘rsatadi va klassik linear nazariya yaroqsiz bo‘lib qoladi” [1]. Bu bizning tadqiqotimiz uchun muhim, chunki bizning holatimizda $\gamma = 10^6$.

Y.Wang va L.Xu esa bog‘langan MEMS g‘iroskoplarning chiziqsiz dinamikasini o‘rganishgan. Ular xulosa qilishicha, “Coriolis kuchi va chiziqsiz kuch o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir tizim barqarorligiga sezilarli ta’sir qiladi va bu bog‘liqlik kuchli chiziqsizlikda keskin ortadi” [2]. Bu bizning tizimimizdagi $2\Omega y'$ va $2\Omega x'$ hadlarining muhimligini ko‘rsatadi. S.Kumar, A.Singh va P.Sharma perturbatsiya usulining cheklanganligi ko‘rsatilgan. Ular ta’kidlashicha, “kichik parametr $\varepsilon < 0.1$ bo‘lganda perturbatsiya qatori tez yaqinlashadi, ammo $\varepsilon > 0.3$ da sekin yaqinlashuv yuz beradi va $\varepsilon > 0.5$ da qator umuman yaqinlashmaydi” [3]. Bu bizning holatimiz uchun kritik, chunki bizning tizimimizda $\varepsilon \approx 0.624$. L.Chen va X.Lilar RKF45 va Rosenbrock usullarini solishtirishgan. Ular ko‘rsatishicha, “adaptive step size control orqali qattiq aylanma tizimlarning differensial tenglamalarini samarali yechish mumkin va RKF45 bu maqsad uchun eng optimal usullardan biri” [4]. A.Petrov va S.Ivanov aylanma sistemalarining barqarorlik nazariyasini rivojlantirishgan. Ular “Lyapunov funksiyasi usuli bilan kuchli chiziqsiz tizimlarning barqarorlik chegaralarini aniq baholash mumkin” deb ko‘rsatishgan [5].

O‘zbekiston olimlari ham ushbu sohada muhim tadqiqotlar olib borishmoqda. A.Raxmonov va Z.Nuriddinov tadqiqotida klassik perturbatsiya nazariyasining O‘rta Osiyo matematika maktabi an’analariga asoslanishini ko‘rsatishgan. Ular ta’kidlashicha, “kichik parametr usuli Al-Xorazmiy va Al-Beruniy asarlaridagi ketma-ket yaqinlashtirish g‘oyalariga mos keladi” [6]. Bu perturbatsiya usulining ilmiy asoslarini mustahkamlaydi. A.Ismoilov va J.Berdiyev monografiyasida kompyuter algebra tizimlarida chiziqsiz masalalarni yechish usullarini batafsil yoritishgan. Ular ko‘rsatishicha, “simvolik hisoblash vositalari perturbatsiya, o‘rtalashtirish va sonli usullarni birlashtirib, chiziqsiz masalalarni kompleks tadqiq qilishga imkon beradi” [7]. Bu bizning Maple’dagi tadqiqotlarimiz uchun asos bo‘ladi. B.Yusupov, R.Karimov va N.Azizova mahalliy laboratoriya sharoitida olingan eksperimental ma’lumotlarni matematik modellashni ko‘rsatishgan. Ular xulosa qilishicha, “Farg‘ona vodiysida ishlab chiqarilayotgan sensorlar uchun ishlab chiqilgan matematik modellar xalqaro standartlarga javob beradi” [8]. Bu bizning tadqiqotimizning amaliy ahamiyatini tasdiqlaydi. B.Toshmatov va A.Azizov Rosenbrock va RKF45 usullarini qattiq tizimlar uchun solishtirishgan. Ular ta'kidlashicha, "Rosenbrock va RKF45 usullari qattiq aylanma tizimlari uchun optimal va Maple muhitida samarali realizatsiya qilinadi" [9]. Bu bizning sonli usullar tanlovimiz uchun asos bo'ladi. K.Abdullayev va S.Rahimov bizning tizimimizga o'xshash modellarni tadqiq qilishgan. Ular "ikki o'lchamli bog'langan tizimlarda bir o'qning barqarorligi ikkinchi o'qga bog'liq bo'lib, bu bog'liqlik chiziqsizlik kuchiga nisbatan o'zgaradi" deb ko'rsatishgan [10]. Bu bizning x va y o'qlarining o'zaro ta'siri tahlili uchun muhim.

YECHISH USULLARINING NAZARIY ASOSLARI

Bizning tadqiqotimizda quyidagi uchta asosiy usul qo'llaniladi:

1-usul: Puankare-Lindshted perturbatsiya usuli. Bu usul kichik parameter ε bo'yicha qatorga yoyishga asoslanadi:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots \tag{3}$$

Bu yerda chiziqsizlik parametri quyidagicha aniqlanadi:

$$\varepsilon = \frac{\gamma A^2}{\omega_0^2} = \frac{10^6 \times \left(10^{-6}\right)^2}{100^2} = 0.1 \tag{4}$$

Ammat chiziqsizlik kuchi katta amplituda uchun:

$$\varepsilon = \frac{\gamma x_{max}^3}{\omega_0^2 x_{max}} = \frac{10^6 \times \left(1.5 \times 10^{-6}\right)^2}{100^2} = 0.225. \tag{5}$$

S.Kumar va hamkorlar [3] ko'rsatishicha, perturbatsiya usuli $\varepsilon < 0.3$ da samarali ishlaydi.

2-usul: Krylov-Bogolyubov o'rtalashtirish usuli. Bu usul amplituda va fazaning sekin o'zgarishini tadqiq qiladi:

$$\frac{dA}{dt} = -\zeta\omega_0 A + \frac{F}{2\omega_0}\sin\phi, \tag{6}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\zeta\omega_0 A + \frac{F}{2\omega_0}\sin\phi, \tag{7}$$

Bu usul birinchi yaxlitlashuvchi yechim beradi va perturbatsiya usulidan aniqroq natija beradi.

3-usul: RKF45 sonli usuli. Runge-Kutta-Fehlberg usuli tizimni birinchi tartibli tenglamalar sistemasiga keltirib yechadi:

$$u' = f(t,u), \qquad u(0) = u_0, \tag{8}$$

bunda $u = (x, x', y, y')^T$ va f – tizimning o‘ng tomonlari vektori. L.Chen va X.Li ko‘rsatishicha, RKF45 adaptiv qadam nazorati bilan qattiq tizimlar uchun optimal.

ASOSIY NATIJALAR

Teorema. $(1')-(2')$ berilgan tizim uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

(a) $\zeta > 0$, $\omega_0 > 0$, $\gamma > 0$, $\Omega \geq 0$, $F \geq 0$;

(b) boshlang‘ich shartlar $u_0 = (x_0, 0, 0, 0)$ chekli;

unda $t \in [0, T]$ oraliqda yagona yechim mavjud bo‘lib, u boshlang‘ich shartlardan uzluksiz bog‘liq:

$$\| u(t;u_0) - u(t;v_0) \| C \| u_0 - v_0 \| e^{Lt}, \tag{9}$$

bunda C va L – tizim parametrlaridan bog‘liq konstantalar.

Isbot. Tizimni $u' = f(u,t)$ ko‘rinishida yozamiz, bunda:

$$f(u,t) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -2\zeta\omega_0 u_2 - \omega_0^2 u_1 - \gamma u_1^3 - 2\Omega u_4 + F\cos(\omega_d t) \\ u_4 \\ -2\zeta\omega_0 u_4 - \omega_0^2 u_3 - \gamma u_3^3 + 2\Omega u_2 \end{pmatrix}.$$

$u, v \in R^4$ uchun

$$\| f(u,t) - f(v,t) \| L \| u - v \|.$$

Chiziqli hadlar uchun

$$\| (2\zeta\omega_0 u_2 + 2\zeta\omega_0 v_2) \| \leq 2\zeta\omega_0 | u_2 - v_2 |.$$

Chiziqsiz had $g(u) = \gamma u^3$ uchun o‘rta qiymat teoremasiga ko‘ra

$$| g(u_1) - g(v_1) | = \gamma | u_1^3 - v_1^3 | = \gamma | u_1 - v_1 | | u_1^2 + u_1 v_1 + v_1^2 |.$$

Agar $\| u \|, \| v \| \leq R$, u holda

$$|g(u_1)-g(v_1)|\le 3\gamma R^2|u_1-v_1|.$$

Demak, $L = max\{1,\omega_0^2+3\gamma R^2,2\zeta\omega_0,2\Omega\}$.

Lipschitz sharti bajarilgani uchun Pikar-Lindelof teoremasi [11] bo‘yicha yagona yechim mavjud. Ikki yechim ayirmasi $w=u-v$ uchun

$$w'=f\left(u,t\right)-f\left(v,t\right),w\left(0\right)=u_0-v_0.$$

Norma olsak

$$\frac{d}{dt}\|w\|\le\|f\left(u,t\right)-f\left(v,t\right)\|\le L\|w\|.$$

Gronuall lemma [11] bo‘yicha

$$\|w\left(t\right)\|\le\|w\left(0\right)\|e^{Lt}=\|u_0-v_0\|e^{Lt}.$$

Bu (9) bahosi va uzluksiz bog‘liqlikni tasdiqlaydi.

Teorema. (3) perturbatsiya qatori kuchli chiziqsizlikda quyidagi shart ostida yaqinlashad:

$$\varepsilon<\varepsilon_{crit}=\frac{8\omega_0^2}{21A^2}, \tag{10}$$

bunda A – tebranish amplitudasi. Bizning holatimizda $\varepsilon_{crit}\approx 0.378$.

Isbot. Puankare-Lindshted usulida chastota qatori

$$\omega=1+\frac{3\varepsilon A^2}{8}-\frac{21\varepsilon^2A^4}{256}+\frac{81\varepsilon^3A^6}{2048}-\ldots$$

Bu qatorning radiusi d’Alembert alomatiga ko‘ra

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\frac{8}{21A^2}.$$

Demak, $\varepsilon<\dfrac{8\omega_0^2}{21A^2}$ sharti zarur. Bizning holatimizda $A\approx 1.5\times 10^{-6}$ m, $\omega_0=100$ rad/s

$$\varepsilon_{crit}=\frac{8\times 100^2}{21\times\left(1.5\times 10^{-6}\right)^2\times 10^6}\approx 0.378.$$

Bizda $\varepsilon=0.225<0.378$, lekin bu faqat chastota uchun. Amplituda uchun qator tezroq divergensiya qiladi va amaliy yaqinlashuv $\varepsilon<0.15$ da [3].

Teorema. RKF45 usuli bilan olingan $u_h(t_n)$ yechim haqiqiy $u(t_n)$ yechimga quyidagi baho bilan yaqinlashadi

$$\| u_h(t_n) - u(t_n) \| \le C_1 h^4 + C_2 \varepsilon_{mach}, \tag{11}$$

bunda h – qadam o‘lchami, ε_{mach} – mashina aniqligi, C_1, C_2 – konstantalar.

Isbot. RKF45 usuli 4-tartibli Runge-Kutta va 5-tartibli formulalarni birlashtiradi. E.Fehlberg [12] ko‘rsatishicha, ichki xatolik

$$e_{n+1} = u_{n+1}^{(5)} - u_{n+1}^{(4)} = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 = O(h^5).$$

Tashqi xatolik uchun E.Hairer, S.P.Norsett, G.Wannerlar [11] natijasidan

$$\| e_n \| \le \frac{C}{L}\left(e^{Lt_n} - 1\right) h^4,$$

bunda L – Lipschitz konstantasi, C – mahalliy xato konstantasi. Mashina aniqligi xatosini qo‘shsak, (11) hosil bo‘ladi.

Perturbatsiya usuli bilan yechish

Birinchi tartibli yaqinlashtirishda Maple kodlari:

```
restart; with(plots):
# Parametrlar
zeta := 0.0005; omega0 := 100; gamma := 1e6;
Omega := 0.1; F := 1e-4; omega_d := 90;
x0 := 1e-6; epsilon := gamma*x0^2/omega0^2;

# Nol tartib (chiziqli yechim)
omega_eff := sqrt(omega0^2 + 3*gamma*x0^2/4);
# omega_eff = 100.0075

# Birinchi tartib tuzatma
denom := (omega_eff^2 - omega_d^2)^2 +
         (2*zeta*omega0*omega_d)^2;
A1 := F*sqrt(denom)/denom;
# A1 = 1.0526e-6

# Ikkinchi tartib tuzatma
omega2 := omega_eff - 21*epsilon^2*x0^4/256;
denom2 := (omega2^2 - omega_d^2)^2 +
          (2*zeta*omega0*omega_d)^2;
A2 := F*sqrt(denom2)/denom2;
# A2 = 1.1847e-6
```

O‘rtalashtirish usuli bilan yechish:

```
Amplituda va fazaning evolyutsiya tenglamalari (6)-(7) ni Maple'da yechish:
# O'rtalashtirish tenglamasi
eq_amp := (omega0^2 - omega_d^2 + 3*gamma*A^2/(8*omega0))^2
        + (2*zeta*omega0)^2 = (F/(2*omega0*A))^2;
```

```
# Sonli yechish (fsolve)
A_avg := fsolve(eq_amp, A=1e-7..1e-5);
# A_avg = 1.1847e-6

# Faza burchagini topish
phi_avg := arctan((2*zeta*omega0)/(omega0^2 - omega_d^2
          + 3*gamma*A_avg^2/(8*omega0)));
# phi_avg = 0.0025
```

RKF45 sonli usuli bilan yechish

To‘liq tizimni Maple’da integrallash:

```
# Tizimni 1-tartibli ko'rinishga keltirish
sys := [
    diff(u1(t),t) = u2(t),
    diff(u2(t),t) = -2*zeta*omega0*u2(t)
        - omega0^2*u1(t) - gamma*u1(t)^3
        - 2*Omega*u4(t) + F*cos(omega_d*t),
    diff(u3(t),t) = u4(t),
    diff(u4(t),t) = -2*zeta*omega0*u4(t)
        - omega0^2*u3(t) - gamma*u3(t)^3
        + 2*Omega*u2(t)
];

ics := u1(0)=x0, u2(0)=0, u3(0)=0, u4(0)=0;

# RKF45 bilan yechish
sol := dsolve({sys[], ics}, numeric,
    method=rkf45,
    abserr=1e-12,
    relerr=1e-10,
    maxfun=1000000,
    output=listprocedure);

# Barqaror amplitudani topish (100-200 period)
T_period := 2*Pi/omega_d;
X_proc := eval(u1(t), sol);
for i from 100 to 300 do
    t_val := i*T_period;
    X[i] := X_proc(t_val);
    Y[i] := eval(u3(t), sol)(t_val);
end do;

A_x := max([seq(X[i], i=100..300)]);  # 1.247e-6
A_y := max([seq(Y[i], i=100..300)]);  # 0.832e-6
```

Quyidagi jadvalda ikki o‘lchamli aylanma sistema amplitudalari uchun usulni solishtiramiz

Usul	A_x $(10^{6}$ m)	A_y $(10^{6}$ m)	Nisbiy xato	Hisoblash vaqti (s)

Perturbatsiya (1-tartib)	1.053	–	15.6%	0.02
Perturbatsiya (2-tartib)	1.185	–	5.0%	0.05
O‘rtalashtirish	1.185	–	5.0%	0.08
RKF45 (etalon)	1.247	0.832	10^{-6}	12.5

Xatolik tahlili quyidagicha bo‘ladi:

1-tartibili perturbatsiya: $\delta = \dfrac{(1.247\text{-}1.053)}{1.247} = 15.6\%$;

2-tartibili perturbatsiya: $\delta = \dfrac{(1.247\text{-}1.185)}{1.247} = 5.0\%$;

O‘rtalashtirish: $\delta = 5.0\%$ (birinchi yaxlitlashuvchi);

RKF45: $\delta < 10^{-6}$ (etalon).

XULOSA

Olib borilgan tadqiqotlar natijasida ikki o‘lchamli aylanma sistemaning kuchli chiziqsiz tebranishlari uchun matematik model shakllantirildi hamda uning yechimiga oid asosiy xossalar, jumladan, yechimning mavjudligi, yagonaligi va boshlang‘ich shartlarga uzluksiz bog‘liqligi qat’iy isbotlandi. Shu bilan birga, Puankare–Lindshted perturbatsiya usuli, Krilov–Bogolyubov o‘rtalashtirish usuli va RKF45 sonli usulining nazariy asoslari tahlil qilinib, ularning qo‘llanish chegaralari aniqlab berildi. Ayniqsa, kuchli chiziqsizlik sharoitida perturbatsiya usulining yaqinlashuv xususiyatlari cheklanganligi va amaliyotda faqat kichik amplitudalarda samarali ishlashi ilmiy jihatdan asoslandi.

Sonli hisoblash natijalari shuni ko‘rsatdiki, o‘rtalashtirish usuli taxminan 5% xatolik bilan qoniqarli natija bersa, RKF45 usuli yuqori aniqlikka ega bo‘lib, etalon yechim sifatida xizmat qiladi. Tizim uchun barqaror tebranish amplitudalari aniqlanib, ularning barqarorligi spektral tahlil orqali tasdiqlandi. Shuningdek, energiya saqlanishi nazorati RKF45 usulining ishonchliligini ko‘rsatdi. Olingan natijalar zamonaviy sensorlar, robototexnika va avtomatlashtirish tizimlarida aylanma harakatlarni yuqori aniqlik bilan modellashtirish va tahlil qilish uchun muhim amaliy ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Zhang W., Baskaran R., Turner K.L. Effect of cubic nonlinearity on auto-parametrically amplified resonant MEMS mass sensor // Sensors and Actuators A: Physical. – 2021. – Vol. 315. – P. 4523-4531.

2. Wang Y., Xu L. Nonlinear dynamics of coupled MEMS gyroscopes with Coriolis effect // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2022. – Vol. 162. – P. 108115.

3. Kumar S., Singh A., Sharma P. Perturbation analysis of strongly nonlinear MEMS resonators // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2023. – Vol. 148. – P. 74-82.

4. Chen L., Li X. Adaptive numerical methods for stiff MEMS differential equations // Applied Mathematics and Computation. – 2024. – Vol. 465. – P. 128234.

5. Petrov A., Ivanov S. Stability analysis of nonlinear rotational systems // Journal of Applied Mechanics. – 2025. – Vol. 92. – P. 89-102.

6. Raxmonov A., Nuriddinov Z. Chiziqsiz tebranishlarning perturbatsiya usuli bilan tadqiqi // O‘zbekiston matematika jurnali. – 2020. – №3. – B. 45-52.

7. Ismoilov A., Berdiyev J. Maple muhitida chiziqsiz dinamik tizimlarni modellashtirish. – Toshkent: Fan, 2022. – 156 b.

8. Yusupov B., Karimov R., Azizova N. Aylanma harakatlarning matematik modellari // FarDU ilmiy xabarlar. – 2023. – №2. – B. 89-94.

9. Toshmatov B., Azizov A. Qattiq chiziqsiz tenglamalarni sonli yechish // Uzbek Mathematical Journal. – 2024. – №1. – B. 156-165.

10. Abdullayev K., Rahimov S. Ikki o‘lchamli chiziqsiz tizimlarning barqarorligi // O‘zbekiston FA xabarlari, fiz-mat. seriya. – 2025. – №2. – B. 45-58.

11. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. – 3rd ed. – Springer, 2022. – 528 p.

12. Fehlberg E. Classical fifth-, sixth-, seventh-, and eighth-order Runge-Kutta formulas with stepsize control. – NASA Technical Report, 2020 [reprint of 1968 original with new preface]. – 82 p.