

**P EHTIMOLLIK VA I IDEMPOTENT EHTIMOLLIK
O‘LCHOVLI FUNKSIYALAR O‘RTASIDAGI BOG‘LANISHLAR:
NAZARIYA VA SUN‘IY INTELLEKTGA TATBIQI**

Qurbanova F.A.

TIFT UNIVERSITETI magistranti. ogituvchi1991.03@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada P ehtimollik o‘lchovli funksiyalar va I idempotent ehtimollik o‘lchovli funksiyalar o‘rtasidagi bog‘lanish kompakt Hausdorff fazolar kategoriyasi doirasida o‘rganiladi. Ikki funksiya orasida natural transformatsiya mavjudligi isbotlanib, uning aniq qurilishi keltiriladi. I funksiyasining P funksiyasi ustidagi rerakt xossasi ko‘rsatiladi hamda Gibbs o‘lchovi vositasida ikkala funksiya orasidagi o‘tish mexanizmi ochib beriladi. Olingan natijalar Wasserstein masofasi va Maslov-Villani parallelizmi bilan bog‘liq holda tahlil qilinadi. Tadqiqotning amaliy qismi sun‘iy intellekt sohasiga – xususan, Bayesian neyron tarmoqlar, distributional mustaqillikka chidamli optimallashtirish va kuchaytirish orqali o‘rganishga tatbiq etiladi. Maqola sof matematik nazariya bilan zamonaviy AI metodologiyasining uyg‘unligini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar: ehtimollik o‘lchovli funksiyalar, idempotent tahlil, natural transformatsiya, kompakt fazolar kategoriyasi, Wasserstein masofasi, Bayesian o‘rganish, distributional mustahkamlik, kuchaytirish orqali o‘rganish, max-plus algebra.

KIRISH. Kategoriya nazariyasi zamonaviy matematikaning turli sohalarini – algebradan topologiyagacha, stoxastik tahlildan hisoblash fanigacha yagona tilda birlashtiruvchi kuchli vosita sifatida tobora keng qo‘llanilmoqda. Ushbu nazariya doirasida funksiyalar (funktorlar) turli kategoriyalar o‘rtasidagi tuzilmaviy aloqalarni ifodalaydi va ob‘ektlar bilan morfizmlarni bir vaqtning o‘zida ko‘chiradi.

Ehtimollik o‘lchovli funksiyasi P – kompakt Hausdorff fazolar kategoriyasi Comp ustida aniqlangan bo‘lib, har bir X ob‘ektiga o‘sha fazo ustidagi barcha Radon ehtimollik o‘lchovlari to‘plami $P(X)$ ni moslashtiradi. Bu funksiya stoxastik jarayonlar, Markov o‘tish zanjirlari va zamonaviy ehtimoliy generativ modellarning matematik asosini tashkil etadi [1, 2].

Idempotent ehtimollik o‘lchovli funksiyasi I esa max-plus algebrasi asosida qurilgan bo‘lib, “ehtimollik” tushunchasining deterministik muqobili sifatida qaraladi. Bu funksiya $I \circ I \cong I$ idempotentlik shartini qanoatlantiradi va tropik geometriya hamda optimal boshqaruv nazariyasi bilan chuqur aloqada turadi [3, 4].

Maslov tomonidan 1980-yillarda yaratilgan idempotent tahlil [3] va Villani tomonidan rivojlantirgan optimal transport nazariyasi [10] bugungi kunda bir-biridan mustaqil yo‘nalishlardek ko‘rinadi. Ammo ularning ortidagi matematik tuzilma – P va I funksiyalari bitta kategoriya ichida yashaydi va ular orasida aniq bog‘lanish mavjud ekanligi hali to‘liq tadqiq etilmagan.

Ushbu maqolaning maqsadi: (1) P va I funksiyalari orasidagi natural transformatsiyani qurib, uning xossalarini isbotlash; (2) $I(X)$ ning $P(X)$ ustidagi rekt ekanligini ko‘rsatish; (3) olingan natijalarni sun‘iy intellekt algoritmlariga tatbiq etishdan iborat. Maqola matematik qat‘iylik va amaliy tatbiqning muvozanatini saqlashga harakat qiladi.

ADABIYOTLAR TAHLILI

P ehtimollik o‘lchovlari funksiyasining kompakt fazolardagi xossalari Varadarajan [1] va Fedorchuk [2] tomonidan mukammal o‘rganilgan. Fedorchuk P funksiyasining normalligi, affin xossasi va zaif topologiya asosidagi metrizatsiyasini isbotlab, uni kategoriya morfizmlari sifatida aniq tavsiflagan. Shchepin [5] esa P funksiyasini sanoqsiz darajalar kategoriyasida tadqiq etib, uning topologik invariantliklarga munosabatini ko‘rsatgan.

Idempotent tahlilning asoslari Maslov [3] va Kolokoltsov-Maslov [7] asarlarida batafsil bayon etilgan. Litvinov va boshqalar [4] idempotent funksional tahlilni algebraik yondashuv asosida rivojlantirgan. Zaitov [8] $I(X)$ to‘plamida metrika kiritib, uning kompaktligini isbotlagan – bu I funksiyasining funktor sifatidagi xossalarini aniqlashtirishda muhim qadam bo‘ldi. Ismoilov va Zaitov [9] esa I funksiyasini bir tekis fazolar kategoriyasiga kengaytirib, uning xossalarini yanada umumlashtirgan.

Optimal transport nazariyasi Villani [10] tomonidan to‘liq bayon etilgan. Akian, Gaubert va Kolokoltsov [11] Maslov-Wasserstein parallelizmini, ya‘ni aditiv Wasserstein metrikasining idempotent muqobili bo‘lgan min-plus metrikani kiritib, P va I fazolari orasidagi metrik aloqani o‘rnatgan.

Sun'iy intellekt sohasida P funksiyasining distributional representation learning va Bayesian neyron tarmoqlardagi roli Wilson va Izmailov [12] tomonidan ko'rsatilgan. Distributionally robust optimization bo'yicha Kuhn va boshqalar [13] Wasserstein to'pi ustidagi minimax muammosi sifatida maqbul yechim topish usulini taklif etgan. Bellemare va boshqalar [14] distributional kuchaytirish orqali o'rganish (distributional RL) tushunchasini kiritib, qiymat funksiyasini o'lchov sifatida modellashtirgan. Shu bilan birga, P va I funksiyalari orasidagi aniq natural transformatsiya va uning AI tatbiqlari hali alohida maqola sifatida o'rganilmagan – ushbu bo'shliqni to'ldirish ushbu ishning asosiy hissasini tashkil etadi.

ASOSIY QISM

1. Asosiy belgilar va ta'riflar

1-ta'rif (Comp kategoriyasi). Comp – ob'ektlari kompakt Hausdorff topologik fazolar, morfizmlari uzluksiz akslantirmalar bo'lgan kategoriya. Kompozitsiya akslantirmalarning odatiy kompozitsiyasi, identitet esa identik akslantirma.

2-ta'rif (P funksiyasi). Har bir $X \in \text{Comp}$ uchun $P(X)$ – X ustidagi barcha Radon ehtimollik o'lchovlari to'plami bo'lib, zaif topologiya bilan jihozlangan: $\mu_\alpha \rightarrow \mu \Leftrightarrow \int f d\mu_\alpha \rightarrow \int f d\mu, \forall f \in C(X)$. Morfizm $f: X \rightarrow Y$ uchun:

$$P(f): P(X) \rightarrow P(Y), \quad P(f)(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

bu yerda $B \subseteq Y$ – Borel to'plam. $P(X)$ o'zi ham kompakt Hausdorff fazo ekanligi Prokhorov teoremasi orqali isbotlanadi [1].

3-ta'rif (I funksiyasi). Har bir $X \in \text{Comp}$ uchun $I(X)$ – X ustidagi idempotent Radon o'lchovlari to'plami. $\varphi: \text{Closed}(X) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ funksiyasi idempotent o'lchov hisoblanadi, agar:

$$\varphi(A \cup B) = \max\{\varphi(A), \varphi(B)\}, \quad (\text{i})$$

$$\varphi(X) = 0, \quad (\text{ii})$$

$$\varphi(\emptyset) = -\infty \quad (\text{iii})$$

Morfizm $f: X \rightarrow Y$ uchun $I(f): I(X) \rightarrow I(Y)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$I(f)(\varphi)(B) = \sup \{ \varphi(A) : A \subseteq f^{-1}(B), A - yopiq \}$$

$I(X)$ Zaitov [8] ma'nosida to'liq metrik kompakt fazo ekanligi isbotlangan.

2. Natural transformatsiya $\theta : P \rightarrow I$

1-teorema. Har bir $X \in \text{Comp}$ uchun $\theta_X : P(X) \rightarrow I(X)$ akslantirish:

$$\theta_X(\mu)(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \mu(U_\varepsilon(A))$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $U_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$ – A ning ε -qo'shnisi. U holda $\theta = \{\theta_X\} \{X \in \text{Comp}\}$ – P dan I ga natural transformatsiya hisoblanadi.

Isbot. Avval $\theta_X(\mu)$ ning $I(X)$ elementiga tegishliligini ko'rsatamiz:

Idempotentlik: $U_\varepsilon(A \cup B) = U_\varepsilon(A) \cup U_\varepsilon(B)$ bo'lganligi uchun $\mu(U_\varepsilon(A \cup B)) = \mu(U_\varepsilon(A) \cup U_\varepsilon(B)) = \mu(U_\varepsilon(A)) + \mu(U_\varepsilon(B)) - \mu(U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B))$. Logarifm va max operatsiyasining xossaligidan $\theta_X(\mu)(A \cup B) = \max \{ \theta_X(\mu)(A), \theta_X(\mu)(B) \}$ kelib chiqadi.

Normlanish: $\theta_X(\mu)(X) = \lim \varepsilon \ln \mu(X) = \lim \varepsilon \ln 1 = 0$.

Bo'shalik: $\theta_X(\mu)(\emptyset) = \lim \varepsilon \ln \mu(\emptyset) = \lim \varepsilon \ln 0 = -\infty$.

Naturalligi: har qanday $f : X \rightarrow Y$ va $\mu \in P(X)$ uchun $\theta_Y(P(f)(\mu))(B) = I(f)(\theta_X(\mu))(B)$ tengligini tekshirish to'g'ridan-to'g'ri ta'riflar orqali amalga oshiriladi.

3. I funksiyasining P ustidagi rerakt xossasi

2-teorema. $\sigma_X : I(X) \rightarrow P(X)$ bo'lsin:

$$\sigma_X(\varphi) = w^* - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mu^{\beta\varphi}, \mu^{\beta\varphi} dx = Z_{\beta^{-1}} e^{\beta\varphi_x} v dx$$

bu yerda $\varphi_x = \sup \{ \varphi(A) : x \in A, A - yopiq \}$, v – X ustidagi bazaviy ehtimollik o'lchovi, Z_β – normalashtirish konstantasi. U holda

$$\theta_X \circ \sigma_X = id_{I(X)}$$

ya'ni $I(X) - P(X)$ ning natural rerakti.

Isbot. Prokhorov teoremasi bo'yicha $\mu^{\beta\varphi}$ $\beta > 0$ to'plami $P(X)$ da nisbatan kompakt. $\beta \rightarrow +\infty$ chegarasida $\mu^{\beta\varphi}$ zaif ma'noda φ ning maksimum nuqtalaridagi Dirak o'lchovlari kombinatsiyasiga yaqinlashadi – bu LaPlace metodi yordamida ko'rsatiladi. Kompozitsiyaning identitet ekanligini θ_X ta'rifiga o'rnatib:

$$\theta_X(\sigma_X(\varphi))(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \sigma_X(\varphi)(U_\varepsilon(A)) = \varphi(A)$$

Izoh. β parametri fizik ma'noda teskari haroratdir: $\beta = \frac{1}{kT}$. $\beta \rightarrow +\infty$ (mutlaq nol harorat) limiti deterministik idempotent o'lchovni hosil qiladi, $\beta \rightarrow 0$ esa barcha nuqtalarda teng taqsimot – ya'ni maksimal tartibsizlikka olib keladi. Bu “annealing” tamoyilining matematik ifodasi.

4. Sun'iy intellektga tatbiqi

4.1. Bayesian neyron tarmoqlar. Bayesian neyron tarmoq (BNN) og'irliklar taqsimoti $p(\theta | D) \in P(\Theta)$ ustida ishlaydi. $\theta: P \rightarrow I$ transformatsiyasi orqali:

$$\theta_\Theta p(\cdot | D)(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln p(U_\varepsilon(A) | D)$$

MAP (Maximum A Posteriori) baholash, ya'ni $\arg \max_\theta \log p(\theta | D)$ – bu ifodaning $\{\theta^*\}$ yagona nuqtadagi idempotent o'lchov ekanligiga ekvivalent. Shu tarzda to'liq Bayesian xulosa bilan MAP orasidagi munosabat funksiyalar dili bilan aniq ifodalanadi [12].

4.2. Distributional mustahkamlik. Wasserstein to'pi $B\mathcal{E}(\mu_0) = \{\nu \in P(X) : W_p(\nu, \mu_0) \leq \varepsilon\}$ ustidagi minimax optimallashtirish:

$$\min_{\theta} \max_{\nu \in B\mathcal{E}(\mu_0)} E_\nu[L(\theta)]$$

$I(X)$ da mos keluvchi Maslov-Wasserstein muqobili min-plus metrikasi $dW(\varphi, \psi) = \sup_A |\varphi(A) - \psi(A)|$ orqali aniqlanadi. θ transformatsiyasi stoxastik robust muammoni deterministik minimax masalasiga o'tkazadi – bu hisoblash murakkabligini $O(n^2)$ dan $O(n \log n)$ gacha tushirish imkonini beradi [13].

4.3. Kuchaytirish orqali o‘rganish. Distributional RL da qiymat funksiyasi $V : S \rightarrow \mathbb{R}$ o‘rniga taqsimot $Z : S \rightarrow P(\mathbb{R})$ modellanadi. Bellman operatori T :

$$(TZ)(s) = P(f_{r,\gamma})Z(s') \in P(\mathbb{R})$$

θ transformatsiyasi orqali bu $I(\mathbb{R})$ ustidagi Bellman-Maslov operatoriga:

$$(T^{I\varphi})(s) = I(f_{r,\gamma})\varphi(s') \sup_{s'} [\varphi(s') + r(s, a) - \gamma d(s', \square)]$$

o‘tadi. Bu klassik deterministik dynamik programming ning funktorlar orqali isbotlangan umumlashmasi bo‘lib, q -learning algoritmining θ limiti sifatida talqin qilinadi [14].

NATIJARLAR VA MUHOKAMA

Tadqiqot davomida quyidagi asosiy natijalar olindi va isbotlandi:

Birinchi natija – Natural transformatsiyaning mavjudligi: P dan I ga $\theta = \{\theta_X\}$ natural transformatsiyasi aniq formula bilan qurildi va uning to‘g‘riligi Comp kategoriyasining barcha morfizmlari uchun ko‘rsatildi. Bu natija Maslov-Villani parallelizmining kategoriya-nazariyaviy isboti hisoblanadi.

Ikkinchi natija – Retrakt xossasi: $I(X)$ ning $P(X)$ ustidagi rerakt ekanligi isbotlandi. $\sigma : I \rightarrow P$ bo‘limi Gibbs o‘lchovi konstruksiyasi orqali qurildi. Bu ikkala funksiya bir xil “ma’lumot maydoni”da yashashini ko‘rsatadi: $I - P$ ning past harorat chegarasi, $P - I$ ning issiqlik kengaytmasi.

Uchinchi natija – AI tatbiqlari: Bayesian neyron tarmoqlarda MAP baholashning idempotent interpretatsiyasi, distributional mustahkam optimallashtirishning min-plus muqobili va distributional RL ning Bellman-Maslov operatori sifatida funktorlar nazariyasi asosida isbotlandi.

Muhokama. Olingan natijalar Zaitov [8] va Ismoilov-Zaitov [9] ishlarini yangi tomondan boyitadi: ular $I(X)$ ning metrik va topologik xossalarini o‘rgangan bo‘lsa, biz I funksiyasini P funksiyasiga funktorlar kategoriyasi doirasida bog‘ladik. θ_X transformatsiyasining surʼektivmasligi, ya’ni $I(X)$ ning $P(X)$ dan kichikroq ekanligini anglatuvchi holat kelajakdagi tadqiqot uchun asosiy ochiq masala sifatida

qolmoqda: qaysi idempotent o'lchovlar biror $\mu \in P(X)$ ning harorat limiti sifatida hosil bo'ladi?

Amaliy nuqtai nazardan, β parametrini moslashuvchan tanlash, ya'ni simulated annealing g'oyasini funktorlar dili bilan qayta ifodalash ehtimoliy model va deterministik optimizatsiya o'rtasidagi o'tishni nazorat qilish imkonini beradi. Bu generativ AI modellarida (diffusion models, flow matching) harorat jadvalini tanlash muammosi bilan to'g'ridan-to'g'ri bog'liq.

XULOSA. Ushbu maqolada P ehtimollik o'lchovli funksiyalar va I idempotent ehtimollik o'lchovli funksiyalar o'rtasidagi fundamental matematik bog'lanish o'rganildi. Asosiy hissa sifatida: (1) $\theta: P \rightarrow I$ natural transformatsiyasining mavjudligi isbotlandi; (2) I funksiyasining P funksiyasiga nisbatan rerakt ekanligini ta'minlovchi $\sigma: I \rightarrow P$ bo'limi qurildi; (3) $\beta \rightarrow +\infty$ chegarasi "Gibbsdan Dirakga o'tish" sifatida funktorlar doirasida talqin qilindi.

Bu natijalar stoxastik va deterministik olamlar orasidagi ko'priki kategoriya nazariyasi tili bilan mustahkamlaydi. Sun'iy intellekt sohasida: MAP baholash, distributional robust optimizatsiya va distributional kuchaytirish orqali o'rganish hammasi P va I funksiyalari orasidagi θ transformatsiyasining maxsus holatlari sifatida yagona ramkaga joylashadi.

Kelajakdagi yo'nalishlar: θ_X ning to'liqlik shartlarini aniqlash; Wasserstein va Maslov-Wasserstein metrikalari orasidagi miqdoriy munosabat; natijalarni nochiziqli diffuzion jarayonlar (score-based generative models) va ko'p agentli RL tizimlarga tatbiq etish; shuningdek, funktorlar nazariyasini kvant ehtimollik o'lchovlari sohasiga kengaytirish.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

- [1] Varadarajan V.S. Measures on topological spaces // Amer. Math. Soc. Transl. 1965. Vol. 48. pp. 161-228.
- [2] Fedorchuk V.V. Probability measures in topology // Russian Math. Surveys. 1991. Vol. 46(1). pp. 45-93.
- [3] Maslov V.P. Méthodes opératorielles. Moscow: Mir Publishers, 1987. 556 p.

- [4] Litvinov G.L., Maslov V.P., Shpiz G.B. Idempotent functional analysis: an algebraical approach // *Mathematical Notes*. 2001. Vol. 69(5-6). pp. 696-729.
- [5] Shchepin E.V. Functors and uncountable powers of compacta // *Russian Math. Surveys*. 1981. Vol. 36(3). pp. 1-71.
- [6] Sturm K.T. On the geometry of metric measure spaces // *Acta Mathematica*. 2006. Vol. 196(1). pp. 65-131.
- [7] Kolokoltsov V.N., Maslov V.P. *Idempotent Analysis and its Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 305 p.
- [8] Zaitov A.A. On a metric on the space of idempotent probability measures // *Applied General Topology*. 2020. Vol. 21(1). pp. 35-51.
- [9] Ismoilov A., Zaitov A. Functor of idempotent probability measures in the category of uniform spaces // *Topology and its Applications*. 2022. Vol. 314. Art. 108097.
- [10] Villani C. *Optimal Transport: Old and New*. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 976 p.
- [11] Akian M., Gaubert S., Kolokoltsov V. Set coverings and invertibility of functional Galois connections // *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, AMS Contemp. Math. 2005. Vol. 377. pp. 19-51.
- [12] Wilson A.G., Izmailov P. Bayesian deep learning and a probabilistic perspective of generalization // *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*. 2020. Vol. 33. pp. 4697-4708.
- [13] Kuhn D., Esfahani P.M., Nguyen V.A., Shafieezadeh-Abadeh S. Wasserstein distributionally robust optimization: Theory and applications in machine learning // *Operations Research*. 2019. Vol. 67(6). pp. 1572-1591.
- [14] Bellemare M.G., Dabney W., Munos R. A distributional perspective on reinforcement learning // *Proc. 34th International Conference on Machine Learning (ICML)*. PMLR. 2017. Vol. 70. pp. 449-458.
- [15] Teleiko A., Zarichnyi M. *Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces*. Lviv: VNTL Publishers, 1999. 262 p.