GIPERBOLIK TIPDAGI SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI TENGLAMALARNING BIR SINFI UCHUN UMUMIY YECHIM FORMULALARI

Ergasheva O‘.E.

Farg‘ona davlat universiteti magistranti, ogilchaxonergasheva@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolaning asosiy vazifasi – giperbolik tipdagi, singulyar (maxsus) koeffitsiyentli differensial tenglamalarning ayrim sinflari uchun umumiy yechim formulalarini aniqlashdan iborat. Bunday tenglamalar gaz dinamikasi, to'lqinlar nazariyasi, aerodinamika va boshqa fizik jarayonlarni modellashtirishda muhim rol o'ynaydi. Tadqiqotda differensial tenglamalarni analitik o'rganish usullari, xarakteristik koordinatalarga o'tish usuli hamda Eyler–Darbu tenglamasining xossalaridan foydalanildi. Ko'rib chiqilgan tenglamalar xarakteristik koordinatalar yordamida o'zgartirilib, Eyler–Darbu ko'rinishidagi tenglamaga keltirildi va uning umumiy yechim formulalaridan foydalanib yangi echimlar olinadi. Tadqiqot natijasida singulyar koeffitsiyentli giperbolik tenglamalar uchun parametrlarning ba'zi qiymatlarida umumiy yechim formulalari topildi hamda ularning mavjudlik sohasi o'rganildi. Olingan natijalar giperbolik differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirishda va matematik modellashtirish masalalarida qo'llanishi mumkin.

Kalit so‘zlar: giperbolik tipdagi tenglama, singulyar koeffitsiyent, Eyler–Darbu tenglamasi, umumiy yechim, xarakteristik koordinatalar.

KIRISH. Giperbolik tipdagi buziladigan differensial tenglamalar real fizik jarayonlarni modellashtirishda muhim o‘rin tutadi. Ushbu tenglamalar gaz dinamikasi, aerodinamika, to‘lqinlar nazariyasi, plazma fizikasi hamda elastiklik nazariyasida qo‘llanilib, zarba to‘lqinlari, kritik tezlik zonalari va muhitning o‘zgaruvchan xossalarini tasvirlash imkonini beradi. Shu sababli, giperbolik tipdagi buziladigan tenglamalar uchun ularning umumiy yechimlarini qurish [1], [3] va xossalarini o‘rganish, bunday tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning to‘g‘ri qo‘yilishi, va ular yechimlarining yagonalik, mavjudlik hamda turg‘unlik masalalarini tadqiq etish [6] nafaqat nazariy, balki muhim amaliy ahamiyatga ham egadir.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYASI

Ushbu maqolada giperbolik tipdagi singulyar koeffitsiyentli tenglamalarning bir sinfi uchun umumiy yechim formulasini topish masalasini ko‘rib chiqamiz. Bunday turdagi tenglama va uning umumiy yechimini topish masalasi [1] ishda keltirib o‘tilgan. Unda qaralayotgan giperbolik tenglama parametrlarning turli qiymatlarida umumiy yechim fomulalarini topishda Eyler-Puasson-Darbu tenglamasi yechimi xossalaridan foydalanilgan [2], [3]. Mazkur ishda biz, [1] ishda qo‘llanilgan usul orqali singulyar koeffitsiyentli giperbolik tenglamalarning bir sinfi uchun parametrlarning turli qiymatlaridagi umumiy yechim formulalarini keltirib chiqarish bilan shug‘ullanamiz.

$y<0$ yarim tekislikning $A\ \ 0,0 \quad B\ \ 1,0$ kesma va ushbu

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{-y^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \tag{1}$$

tenglamaning quyidagi

$$AC:\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC:\eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1 \tag{2}$$

xarakteristikalari bilan chegaralangan sohasini D orqali belgilaylik.

$y=0$ to‘g‘ri chiziq u_x, u_y hosilalarning koeffitsiyentlari cheksizga aylanuvchi chiziq bo‘lishdan tashqari (1) tenglama uchun parabolik buzilish chizig‘i hamdir. Shu sababli (1) tenglama uchun korrekt masalalar qo‘yishda uning singulyar koeffitisyentlarida ishtirok etayotgan α_0, β_0 parametrlar muhim rol o‘ynaydi. Odatda bu tenglama qaralaganda parametrlar ushbu

$$-2<m, \qquad -\ \ m/2\ \ \le \beta_0 < 1, \qquad |\alpha_0| <\ \ m+2\ \ /2$$

shartlarni bajaradi deb faraz qilinadi [1].

(1) tenglamada (2) xarakteristik koordinatalarga o‘taylik. Natijada (1) tenglama quyidagi

$$u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi} u_\xi - \frac{\alpha}{\eta-\xi} u_\eta = 0 \tag{3}$$

ko‘rinishga keladi, bu yerda

$$\alpha = \frac{m+2\ \ \beta_0 + \alpha_0}{2\ \ m+2}, \qquad \beta = \frac{m+2\ \ \beta_0 - \alpha_0}{2\ \ m+2}. \tag{4}$$

(3) – Eyler-Darbu tenglamasi bo‘lib, uning uchun umumiy yechim formulalari α, β parametrlarning turli qiymatlarida turlichadir. α va β parametrlar α_0 va β_0 larga bog‘liq ravishda o‘zgargani uchun, ularni $\alpha_0 O \beta_0$ tekisligida tadqiq qilamiz.

$0<\alpha,\ \beta<1$ bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda (4) tengliklardan foydalanib ko‘rsatish mumkinki, buning uchun α_0 va β_0 parametrlar

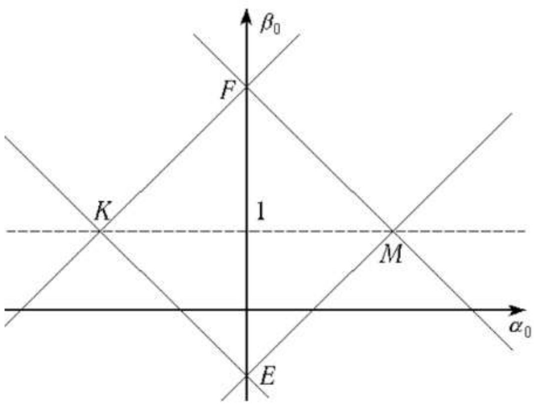
$$\begin{cases} -\dfrac{m}{2}<\beta_0-\alpha_0<\dfrac{m}{2}+2, \\ -\dfrac{m}{2}<\beta_0+\alpha_0<\dfrac{m}{2}+2 \end{cases} \tag{5}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantirishi zarurdir. $\alpha_0 O \beta_0$ parametrlar tekisligida (5) tengsizliklar sistemasining yechimlar to‘plami

$$KF: \beta_0-\alpha_0=2+\frac{m}{2},\ \ FM: \beta_0+\alpha_0=2+\frac{m}{2},$$

$$ME: \beta_0-\alpha_0=-\frac{m}{2},\ \ KE: \beta_0+\alpha_0=-\frac{m}{2}$$

to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘rtburchakdan iborat (1-chizma).



1-chizma

Demak, α_0, β_0 nuqta $KEMF$ to‘rtburchakda yotsa, $0<\alpha,\ \beta<1$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Yuqoridagilardan va (3) tenglamadan foydalanib, (1) tenglamaning umumiy yechimini topish mumkin. Biz avvalgi ishlarimizda $\alpha_0, \beta_0 \in \Delta KEM$, $0<\alpha,\ \beta<1$, $\beta_0<1$ bo‘lgan holdagi umumiy yechimdan foydalanib, turli xil singulyar koeffitsiyentli tenglamalarning umumiy yechimini α va β parametrlarni surish orqali topgan edik [3]. Endi $\alpha_0, \beta_0 \in ME$, ya'ni $\beta = 0,\ 0 < \alpha < 1, -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ boʻlgan holni qaraylik.

Bu holda umumiy yechim quyidagi koʻrinishga ega [1]:

$$u\ \ x, y\ = \phi\ \ \xi\ + \ -y\ ^{1-\beta_0} \int_0^1 t^{-\alpha} \psi\ \ z\ \ dt, \tag{6}$$

bu yerda $z = x + \frac{2}{m+2}\ -y\ ^{\frac{m+2}{2}}\ 2t-1\ .$

NATIJA VA MUHOKAMA

Eyler-Darbu tenglamasining umumiy yechim uchun berilgan xossalaridan foydalanib, α, β larning turli qiymatlarida umumiy yechim formulalarini keltirib chiqaramiz. Yuqoridagi kabi D yarim tekislikda quyidagi

$$-\ -y\ ^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 + \frac{m+2}{2}}{-y^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 + \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0 \tag{7}$$

singulyar koeffitsiyentli giperbolik tipdagi tenglamani qaraylik, uning xarakteristik funksiyalari ham (2) koʻrinishda aniqlanadi, bu yerda $m, \alpha_0, \beta_0 \in R$ boʻlib, $m > -2$, $1 \le \beta_0 < 2 + m/2$, $0 < \alpha_0 < m+2$.

Endi (7) tenglamada (2) xarakteristik koordinatalarga oʻtamiz. U holda (7) tenglama ushbu

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} U_\xi - \frac{\alpha_1}{\eta - \xi} U_\eta = 0 \tag{8}$$

koʻrinishni oladi, bu yerda $\alpha_1 = \alpha + 1$ boʻlib, α, β parametrlar (4) tengliklar orqali aniqlanadi.

(8) tenglama yechimini (3) Eyler-Darbu tenglamasi yechimining

$$z\ \ 1 + \alpha, \beta\ = \frac{\partial}{\partial \xi} z\ \ \alpha, \beta \tag{9}$$

xossasidan [2] foydalanib aniqlaymiz, bu yerda $z(\alpha,\beta)$ - (3) tenglamaning, $z(1+\alpha,\beta)$ esa (8) tenglamaning umumiy yechimi.

Agar (9) xossaga asosan ξ argument bo‘yicha hosila olsak, (4) tenglamadagi α paramertga qo‘yilgan shart o‘zgaradi, ya’ni, $\beta=0$, $\alpha\in(1,2)$ oraliqqa tegishli bo‘lib,

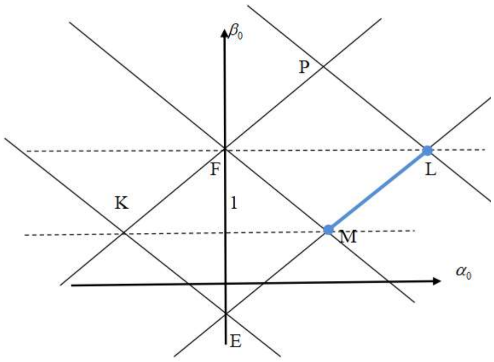
$$\begin{aligned}&\beta_0-\alpha_0=-m/2,\\ &m/2+2<\beta_0+\alpha_0<3m/2+4.\end{aligned}$$

sistema hosil bo‘ladi. Bu sistemaning yechimlar to‘plami:

$$FM:\beta_0+\alpha_0=\frac{m}{2}+2 \text{ va } PL:\beta_0+\alpha_0=\frac{3m}{2}+4 \text{ chiziqlar orasidagi}$$

$$ML:\beta_0-\alpha_0=-\frac{m}{2},$$

kesmani ifodalaydi (2-chizma).



2-chizma.

Endi (3) tenglamaning (6) umumiy yechimidan (ξ,η) o‘zgaruvchilarga o‘tsak, u quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$U(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}}(\eta-\xi)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}}\int_0^1\psi(z)t^{-\alpha}dt \qquad (10)$$

bu yerda $z=\xi+(\eta-\xi)t$, $\quad (-y)^{1-\beta_0}=\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}}(\eta-\xi)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}}$

(10) yechimning ξ o‘zgaruvchi bo‘yicha hosilasini hisoblaylik:

$$U_\xi(\xi,\eta)=\varphi'(\xi)-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}}\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}(\eta-\xi)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}-1}\int_0^1\psi(\xi+(\eta-\xi)t)t^{-\alpha}dt+$$

$$+\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2\ 1-\beta_0}{m+2}} \quad \eta-\xi^{\ \frac{2\ 1-\beta_0}{m+2}} \int_0^1 \psi'(\xi+\ \eta-\xi\ t)t^{-\alpha}\ 1-t\ \ dt\,.$$

Bu yerda x, y o‘zgaruvchilarga qaytsak, hamda $\alpha=\alpha_1-1$ almashtirishni bajarsak, (7) tenglamaning α_0,β_0 nuqta ML kesmaga tegishli, ya’ni $1<\alpha<2$, $\beta=0$, $1<\beta_0<\frac{m}{2}+2$ bo‘lgandagi umumiy yechimini quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$U\ \ \xi,\eta\ =\varphi_1(\xi)+\ \frac{\beta_0-1}{2}\ \ -y^{\ -\beta_0-\frac{m}{2}}\int_0^1 \psi(z)t^{1-\alpha_1}dt+$$

$$+\ -y^{\ 1-\beta_0}\int_0^1 \psi_1(z)t^{1-\alpha_1}\ 1-t\ \ dt\,. \qquad (11)$$

Bu yerda $\varphi_1(z)=\varphi'(z)$, $\psi_1(z)=\psi'(z)$ bo‘lib, $\varphi_1(z),\psi_1(z)\in C^3$ ixtiyoriy funksiyalar.

Endi D sohada quyidagi giperbolik tipdagi singulyar koeffitsientli ushbu

$$-\ -y^{\ m}U_{xx}+U_{yy}+\frac{\alpha_0-\frac{m+2}{2}}{-y^{\ 1-m/2}}U_x+\frac{\beta_0-\frac{m+2}{2}}{y}U_y=0 \qquad (12)$$

tenglamani ham qaraylik. Bu tenglamaning ham xarakteristikalari (2) ko‘rinishda aniqlanadi.

(12) tenglamaning parametrlari quyidagi shartlarni qanoatlantiradi deb faraz qilamiz:

$$m>-2, \qquad -m-1\le\beta_0<-\frac{m}{2}, \qquad -m-2<\alpha_0<0.$$

(12) tenglamada xarakteristik koordinatalarga o‘tsak, u ushbu

$$U_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}U_\xi-\frac{\alpha_2}{\eta-\xi}U_\eta=0 \qquad (13)$$

ko‘rinishni oladi, bu yerda $\alpha_2=\alpha-1$ bo‘lib, α,β parametrlar $\beta=0$, $0<\alpha<1$ ga teng.

(12) tenglamaning umumiy yechimini (3) Eyler - Darbu tenglamasining (6) umumiy yechimiga quyidagi

$$z\ \ \alpha-m,\beta-n\ \ =\ \ \eta-\xi\ \ ^{m+n+1-\alpha-\beta}\ \frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^{n}\partial\eta^{m}}\left[\frac{z\ \ \alpha,\beta}{\eta-\xi\ \ ^{1-\alpha-\beta}}\right] \tag{14}$$

xossani qo‘llab, hosil qilamiz.

(14) dan $m=1, n=0$ bo‘lganda quyidagi formula kelib chiqadi:

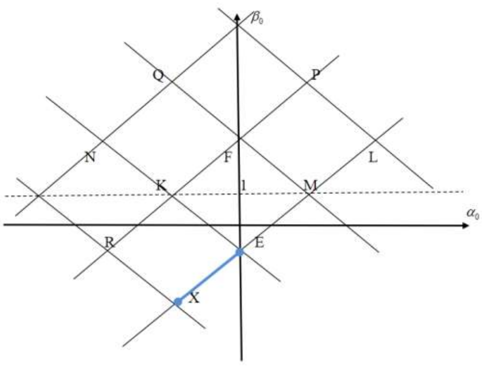
$$z\ \ \alpha-1,\beta\ \ =\ \ \eta-\xi\ \ ^{2-\alpha-\beta}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{z\ \ \alpha,\beta}{\eta-\xi\ \ ^{1-\alpha-\beta}}\right]. \tag{15}$$

Demak (15) xossani qo‘llasak, (3) tenglamaning $\alpha\in\ -1,0$ va $\beta=0$ bo‘lgandagi ya’ni (13) tenglamaning umumiy yechimini topamiz. U holda parametrlar uchun quyidagi tengsizliklar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} -\dfrac{3m}{2}-2<\beta_0+\alpha_0<-\dfrac{m}{2}, \\ \beta_0-\alpha_0=-\dfrac{m}{2}. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimlar to‘plami

$KE:\beta_0+\alpha_0=-\dfrac{m}{2}$ va $RX:\beta_0+\alpha_0=-\dfrac{3m}{2}-2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi $XE:\beta_0-\alpha_0=\dfrac{m}{2}+2$ kesmadan iborat (3-chizma).



3- chizma

(15) xossaga asosan $E_{\alpha,\beta}\ \ U\ \ =0$ tenglamaning umumiy yechimidan foydalanib, (13) ya’ni $E_{\alpha-1,\beta}\ \ U\ \ =0$ tenglamaning umumiy yechimi ko‘rinishini aniqlah mumkin. (15) xossani (6) umumiy yechimga qo‘llab, x,y o‘zgaruvchilarga qaytib, $\alpha=\alpha_2+1$

almashtirishni bajarsak, (12) tenglamaning $\alpha_0,\beta_0 \in XE$ bo‘lganda va parametrlari $-1<\alpha<0, \beta=0$, $-m-1<\beta_0<-\frac{m}{2}$ bo‘lgandagi umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$U(x,y) = (\alpha-1)\varphi(\xi)+(-y)^{1-\beta_0}\psi(\eta)+(-y)^{1-\beta_0}(2\alpha+k-2)\int_0^1 \psi(z)t^{-\alpha_2-1}dt, \qquad (16)$$

bu yerda $\varphi(\xi),\psi(z)\in C^2$ ixtiyoriy funksiyalar va $k=\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}$.

D sohada endi singulyar koeffitsiyentli giperbolik tipdagi ushbu

$$-(-y)^m U_{xx}+U_{yy}+\frac{\alpha_0+\frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}}U_x+\frac{\beta_0-\frac{m+2}{2}}{y}U_y=0 \qquad (17)$$

tenglama berilgan bo‘lsin. Ko‘rsatish mumkinki, (17) tenglamaning xarakteristikalari ham (2) ko‘rinishda aniqlanib, tenglamada ishtirok etayotgan parametr quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$m>-2, \qquad -m-1\le\beta_0<-m/2, \qquad 0<\alpha_0<m+2 .$$

(17) tenglama xarakteristik koordinatalarga o‘tganda u

$$U_{\xi\eta}+\frac{\beta_2}{\eta-\xi}U_\xi-\frac{\alpha}{\eta-\xi}U_\eta=0 \qquad (18)$$

ko‘rinishni oladi, bu yerda $\beta_2=\beta-1$, α,β parametrlar (4) tengliklar orqali aniqlanadi.

(17) tenglama yechimini (3) Eyler - Darbu tenglamasining EM kesmadagi (6) umumiy yechimidan va uning (14) xossasidan foydalanib aniqlaymiz.

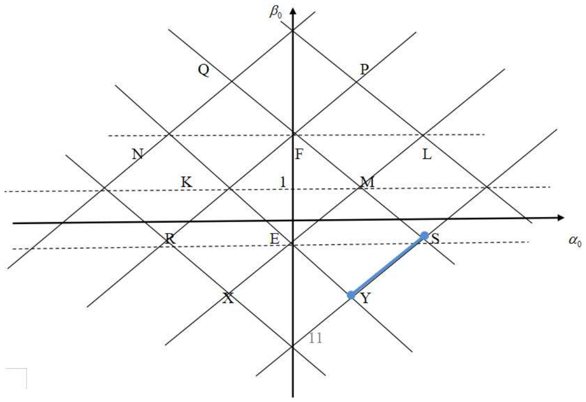
$m=0$, $n=1$ bo‘lgan holini qaraylik:

$$z(\alpha,\beta-1) = (\eta-\xi)^{2-\alpha-\beta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{z(\alpha,\beta)}{(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}\right]. \qquad (19)$$

Demak, (19) xossaga asosan parametrlarni oraliqlari o‘zgaradi, ya’ni $\alpha\in(0,1)$ va $\beta=-1$ bo‘lganda quyidagi sohani ifodalaydi hamda ushbu tengsizliklar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{3m}{2} - 2. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimlar to'plami $EY: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}$ va $MS: \beta_0 + \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2$ chiziqlar orasida joylashgan $YS: \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{3m}{2} - 2$ kesmadan iborat (5-chizma).



4-chizma

(19) xossaga asosan $E_{\alpha,\beta} \; U = 0$ tenglamaning umumiy yechimidan foydalanib $E_{\alpha,\beta-1} \; U = 0$ tenglamaning umumiy yechimi ko'rinishini aniqlaymiz hamda x, y o'zgaruvchilarga o'tib, $\beta = \beta_2 + 1$ almashtirish bajarsak (17) tenglamaning α_0, β_0 nuqta YS kesmada yotganda va parametrlari $0 < \alpha < 1, \beta = -1,\; -m-1 < \beta_0 < -\frac{m}{2}$ bo'lgandagi umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$U(x,y) = -(\alpha-1)\varphi(\xi) + \frac{4}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\varphi_1(\xi) + (\alpha-1+k)(-y)^{1-\beta_0}\int_0^1 t^{-\alpha}\psi(z)dt +$$

$$+\frac{4}{m+2}(-y)^{\frac{m+4-4\beta_0}{2}}\int_0^1 (1-t)t^{-\alpha}\psi_1(z)\,dt\,, \qquad (20)$$

bu yerda $\varphi_1(\xi) = \varphi'(\xi), \quad \psi_1(z) = \psi'(z)$ bo'lib, $\varphi_1(\xi), \psi_1(z) \in C^3$ ixtiyoriy funksiyalar

hamda $k = \frac{2\; 1-\beta_0}{m+2}$.

XULOSA. Ushbu ishda giperbolik tipdagi, singulyar koeffitsiyentli differensial tenglamalarning bir sinfi uchun umumiy yechim formulalarini aniqlash masalasi o‘rganildi. Tadqiqot davomida ko‘rib chiqilgan tenglamalar xarakteristik koordinatalarga keltirilib, ular Eyler–Darbu tipidagi tenglama shakliga o‘tkazildi. So‘ngra, Eyler–Darbu tenglamasining ma’lum xossalari va umumiy yechim formulalaridan foydalangan holda, singulyar koeffitsiyentli giperbolik tenglamalarning umumiy yechimlari hosil qilindi. Bundan tashqari, parametrlarning turli qiymatlarida yechimlarning mavjudlik shartlari aniqlanib, bu shartlar parametrlar tekisligida geometrik tarzda tasvirlab berildi. Olingan natijalar qaralayotgan tenglamalar sinfi uchun umumiy yechim formulalarini topish imkonini yaratdi hamda parametrlarga qo‘yiladigan zarur shartlarni belgilashga yordam berdi.

Tadqiqot natijalari giperbolik tipdagi differensial tenglamalar nazariyasining keyingi rivojiga xizmat qiladi hamda gaz dinamikasi, to‘lqinlar nazariyasi va boshqa fizik jarayonlarni matematik modellashtirish masalalarida amaliy jihatdan qo‘llanishi mumkin.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Салохиддинов М.С., Ўринов А.Қ.. Гиперболик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Фарғона давлат университети нашриёти. 2005 й. 72-76 va 130-135 - bet

2. Уринов А.К. Монография. К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу. Фергана: «Фергана» —2015

3. O‘.E. Ergasheva “General solution formulas for a class of hyperbolic equations with singular coefficients. ADU ilmiy xabarnomasi 2026 yil 1-son.

4. O‘rinov A.Q. Telegraf tenglamasi uchun chegaraviy masalalar. Toshkent, «Universitet», 1996.

5. Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. Toshkent, «O‘zbekiston», 2002.

6. Blum E.K. The solutions of the Euler-Darboux equation for negative values of the parameter-Duke Math. J. 1954, V.21, p.257-269.