ТЕОРИЯ ИГР И СТРАТЕГИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Худайбердиев Х.М.

Ташкентский государственный экономический университет старший преподаватель, xakim.xudayberdiyev@gmail.com

Аннотация: В статье рассматриваются математические основы теории игр как науки о стратегическом принятии решений. Анализируются ключевые понятия: классификация игр, равновесие Нэша, доминирующие и смешанные стратегии, кооперативные игры и ценность Шепли. Приводятся формальные определения, матричные модели и содержательные примеры из экономики и управления. Показаны пути применения теоретико-игровых методов в современных задачах оптимизации и проектирования механизмов.

Ключевые слова: теория игр, равновесие Нэша, стратегия, принятие решений, кооперативные игры, матрица выигрышей, доминирующая стратегия, смешанные стратегии, ценность Шепли, механизм-дизайн, игры с нулевой суммой, дилемма заключённого.

ВВЕДЕНИЕ (INTRODUCTION)

Теория игр — раздел прикладной математики, исследующий математические модели принятия решений в условиях стратегического взаимодействия нескольких рациональных участников. Каждый участник («игрок») стремится максимизировать собственный выигрыш, осознавая при этом, что итоговый результат определяется совокупностью действий всех сторон. Именно это взаимное влияние выборов делает теорию игр качественно отличным от классической теории оптимизации математическим инструментом.

История теории игр восходит к XIX веку: французский математик Огюстен Курно ещё в 1838 году исследовал дуополию как задачу стратегического выбора объёма производства. Однако как самостоятельная дисциплина теория игр оформилась в 1944 году, когда вышел фундаментальный труд Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». Авторы формализовали понятие конечной игры двух лиц с нулевой суммой и доказали теорему минимакса — первый великий результат новой дисциплины.

Революционный вклад внёс Джон Нэш, предложивший в 1950–1951 годах концепцию равновесия для игр с произвольным числом участников. Это равновесие, получившее имя своего создателя, стало центральным решающим концептом теории игр. В 1994 году Нэш был удостоен Нобелевской премии по экономике совместно с Джоном Харсаньи и Райнхардом Зельтеном за вклад в анализ равновесий в некооперативных играх.

Сегодня теория игр применяется в экономике, политологии, биологии, информатике, военной стратегии и многих других областях. Рост вычислительных мощностей открыл новые горизонты: алгоритмическая теория игр, вычислительный механизм-дизайн и теоретико-игровые подходы к машинному обучению превращаются в активно развивающиеся направления на стыке математики и компьютерных наук.

Цель данной статьи — систематически изложить математические основы теории игр: от формальных определений и классификации игр до ключевых решающих концептов и их практических приложений. Статья адресована читателям, знакомым с основами высшей математики и желающим получить целостное представление о современном состоянии дисциплины.

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ И МЕТОДЫ (LITERATURE REVIEW AND METHODS)

2.1. Классические работы и становление дисциплины. Монография фон Неймана и Моргенштерна (1944) заложила аксиоматический фундамент теории игр. Авторы ввели понятие нормальной и развёрнутой форм представления игры, доказали существование оптимальных смешанных стратегий для игр с нулевой суммой и предложили теорию полезности, позволяющую количественно сравнивать исходы. [1]

Нэш в серии коротких, но исключительно ёмких статей 1950–1951 годов обобщил результаты на некооперативные игры с произвольным числом участников. Теорема о существовании равновесия, доказанная с использованием теоремы Какутани о неподвижной точке, обеспечила концепции Нэша прочную математическую основу. [2]

Работы Ллойда Шепли сформировали кооперативную ветвь теории игр. В 1953 году он предложил аксиоматическое определение справедливого распределения выигрыша в коалиционных играх — «ценность Шепли» — которое стало стандартным инструментом анализа кооперативного взаимодействия. Совместно с Дэвидом Гейлом Шепли также разработал алгоритм устойчивого паросочетания, лежащий в основе современных рынков распределения ресурсов. [3]

2.2. Развитие теории: неполная информация и динамические игры. Джон Харсаньи в 1967–1968 годах разработал теорию байесовских игр — игр с неполной информацией, в которых игроки не знают точно характеристик противников, но располагают вероятностными суждениями о них. Введённое им понятие «типа» игрока позволило свести задачу неполной информации к задаче неполной информированности, поддающейся стандартному анализу. [4]

Райнхард Зельтен предложил концепцию совершенного равновесия в подыграх (1965) и совершенного по дрожащей руке равновесия (1975) как уточнения равновесия Нэша для динамических игр. Эти концепции устраняют «неправдоподобные» угрозы в последовательных играх и обеспечивают более реалистичные предсказания поведения. [5]

2.3. Современные направления. Алгоритмическая теория игр изучает вычислительную сложность нахождения равновесий и разрабатывает эффективные алгоритмы для задач большой размерности. Важным результатом является доказательство PPAD-полноты задачи нахождения равновесия Нэша в общих играх двух лиц, что указывает на принципиальные вычислительные трудности. [6]

Эволюционная теория игр применяет теоретико-игровые методы к анализу биологических популяций, заменяя рациональность механизмом естественного отбора. Концепция эволюционно стабильной стратегии (ESS) стала мостом между теорией игр и эволюционной биологией. [7]

2.4. Методология исследования. Методологической основой настоящей работы служат: аксиоматический метод (формальное определение игры и решающих концептов), матричный анализ (представление игр в нормальной форме), метод обратной индукции (анализ динамических игр), а также сравнительный анализ классов игр и решающих концептов. Примеры и иллюстрации подобраны так, чтобы связать абстрактные математические понятия с конкретными задачами принятия решений.

ОБСУЖДЕНИЕ (DISCUSSION)

3.1. Формальное определение игры. Игра в нормальной форме задаётся тройкой G = (N, $\{S_i\}$ i∈N, $\{u_i\}$i∈N), где:

— N = {1, 2, …, n} — конечное множество игроков;

— S_i — множество чистых стратегий игрока i;

— $u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ → R — функция выигрыша игрока i.

Профиль стратегий s = $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ∈ S = $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ однозначно определяет исход игры. Обозначим через s−i профиль стратегий всех игроков, кроме i-го. Тогда u_i(si, s−i) — выигрыш игрока i при выборе стратегии si в ответ на профиль s−i остальных участников.

3.2. Классификация игр

Теория игр оперирует несколькими важными классификациями, отражающими структуру стратегического взаимодействия.

По сумме выигрышей различают игры с нулевой суммой, в которых сумма выигрышей всех участников равна нулю для любого профиля стратегий: ∑i ui(s) = 0 для всех s ∈ S. В таких играх интересы участников полностью противоположны. Игры с ненулевой суммой допускают ситуации взаимной выгоды или взаимного проигрыша, что существенно расширяет спектр стратегических взаимодействий.

По числу ходов различают игры в нормальной форме (одновременный выбор стратегий) и игры в развёрнутой форме (последовательные ходы, представляемые деревом игры). По наличию информации — игры с полной и неполной информацией, с совершенной и несовершенной информацией. По возможности координации — кооперативные (игроки могут заключать обязывающие соглашения) и некооперативные игры.

3.3. Равновесие Нэша. Профиль стратегий s* = (s1*, s2*, …, sn*) является равновесием Нэша, если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, отклонившись от s* при условии, что остальные придерживаются своих равновесных стратегий. Формально:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall i \in N \tag{1}$$

Фундаментальная теорема Нэша утверждает, что каждая конечная игра имеет хотя бы одно равновесие (возможно, в смешанных стратегиях). Доказательство использует теорему Какутани о неподвижной точке многозначного отображения наилучших ответов BR: S → 2^S, где BRi(s−i) = arg max ui(si, s−i). [2]

Геометрически равновесие Нэша — точка пересечения графиков функций наилучших ответов всех игроков. Множество равновесий может быть пустым в чистых стратегиях, единственным или бесконечным. Множественность равновесий порождает проблему координации: какое из них реализуется на практике?

3.4. Смешанные стратегии. Смешанная стратегия игрока i — вероятностное распределение σi ∈ Δ(Si) над множеством его чистых стратегий, где Δ(Si) обозначает симплекс вероятностных распределений на Si. Ожидаемый выигрыш при профиле смешанных стратегий σ = (σ1, …, σn):

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s) \cdot \prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \tag{2}$$

Равновесие Нэша в смешанных стратегиях определяется аналогично формуле (1), с заменой чистых стратегий смешанными. Ключевое свойство: в равновесии игрок безразличен между всеми чистыми стратегиями, которым он придаёт положительную вероятность — иначе он бы сместил всю вероятность на лучшую.

3.5. Дилемма заключённого и проблема координации. Классическим примером некооперативной игры служит «Дилемма заключённого». Двое подозреваемых независимо выбирают: молчать (C — сотрудничество) или давать показания (D — отступление). Матрица выигрышей (срок заключения с обратным знаком):

	Игрок 2: C	Игрок 2: D
Игрок 1: C	−1, −1	−3, 0
Игрок 1: D	0, −3	−2, −2

Таблица 1. Матрица выигрышей дилеммы заключённого

Стратегия D доминирует стратегию C для обоих игроков: независимо от выбора партнёра, давать показания всегда выгоднее. Единственное равновесие Нэша — (D, D) с выигрышами (−2, −2), хотя исход (C, C) с выигрышами (−1, −1) был бы лучше для обоих. Этот парадокс — рациональное поведение индивидов приводит к коллективно неоптимальному результату — лежит в основе таких явлений, как гонка вооружений, загрязнение окружающей среды и нарушение картельных соглашений.

3.6. Доминирующие стратегии. Стратегия si строго доминирует стратегию s'i, если для любых действий остальных игроков выигрыш от si строго выше:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_{i'}, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} \tag{3}$$

Рационально мыслящий игрок никогда не выберет строго доминируемую стратегию. Итеративное исключение строго доминируемых стратегий (IESDS) позволяет сократить игру до более простой, сохраняя все равновесия Нэша. Если в результате IESDS остаётся единственный профиль, игра называется разрешимой доминированием, а этот профиль — единственным рациональным исходом.

3.7. Байесовские игры: неполная информация. В реальных ситуациях участники часто не знают характеристик (типов) противников. Харсаньи формализовал такие ситуации, введя байесовскую игру: каждый игрок i имеет тип ti ∈ Ti, извлечённый из совместного распределения вероятностей p(t). Стратегия игрока i — функция bi: Ti → Si. Равновесие Байеса–Нэша обобщает равновесие Нэша: каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при данных убеждениях о типах остальных. [4]

3.8. Кооперативные игры и ценность Шепли

В кооперативных играх группы игроков могут объединяться в коалиции. Игра задаётся парой (N, v), где характеристическая функция v: 2^N → R определяет максимальный гарантированный выигрыш каждой коалиции S ⊆ N. Центральным вопросом является справедливое распределение суммарного выигрыша v(N) между участниками. [3]

Ценность Шепли φi(v) — единственный способ распределения, удовлетворяющий четырём аксиомам: эффективности, симметрии, линейности и нулевого игрока. Формула:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}\left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] \tag{4}$$

Слагаемое v(S∪{i}) − v(S) — предельный вклад игрока i при вступлении в коалицию S. Ценность Шепли усредняет этот вклад по всем возможным порядкам вступления игроков. Концепция нашла широкое применение в анализе голосования в законодательных органах, распределении затрат в совместных проектах и объяснимом машинном обучении (метод SHAP).

РЕЗУЛЬТАТЫ (RESULTS)

4.1. Сравнительный анализ решающих концептов

Различные решающие концепты отражают разные предположения о рациональности и информированности игроков. Равновесие Нэша предполагает взаимную рациональность и правильность ожиданий о поведении партнёров. Итеративное доминирование требует общего знания о рациональности всех участников. Совершенное равновесие в подыграх добавляет требование последовательной рациональности в каждой точке игрового дерева.

Концепт	Тип игры	Требования	Применение
Равновесие Нэша	Некооперативные, нормальная форма	Взаимная рациональность	Олигополия, аукционы
Совершенное в подыграх	Динамические игры	Последовательная рациональность	Переговоры, торги
Байеса–Нэша	Неполная информация	Байесовские убеждения	Аукционы, сигнализация
Ценность Шепли	Кооперативные	Справедливость, эффективность	Коалиции, SHAP

Таблица 2. Сравнение основных решающих концептов теории игр

4.2. Практические приложения

Экономика и теория отраслевых рынков. Модели Курно (конкуренция по количеству) и Бертрана (конкуренция по цене) — классические игры олигополии с явно вычисляемым равновесием Нэша. В модели Курно n фирм с издержками ci одновременно выбирают объёмы выпуска qi. При линейном спросе P(Q) = a − bQ равновесный выпуск каждой симметричной фирмы:

$$q_i^* = \frac{a-c}{b(n+1)} \tag{5}$$

С ростом числа участников равновесие Курно сходится к конкурентному исходу, что объясняет, почему рынки с большим числом игроков ведут себя более конкурентно.

Аукционный дизайн. Теория аукционов — одно из наиболее практически значимых приложений теории игр. Теорема эквивалентности выручки утверждает, что при определённых условиях все стандартные аукционные форматы (английский, голландский, аукцион второй цены) дают продавцу одинаковую ожидаемую выручку. Работа Пола Милгрома и Роберта Уилсона по дизайну аукционов радиочастотного спектра, удостоенная Нобелевской премии

2020 года, демонстрирует, как теоретико-игровые методы решают задачи колоссального практического масштаба.

Механизм-дизайн («обратная теория игр»). Если теория игр анализирует равновесие при заданных правилах, то механизм-дизайн решает обратную задачу: проектирует правила взаимодействия так, чтобы равновесное поведение агентов реализовывало желаемый социальный результат. Теорема Гиббарда–Саттертуэйта устанавливает фундаментальные ограничения на манипулируемость механизмов голосования, а механизм Викри–Кларка–Гровса обеспечивает эффективное распределение ресурсов при доминирующей стратегии правдивого сообщения предпочтений. [6]

Информатика и многоагентные системы. В компьютерных науках теория игр используется для анализа протоколов маршрутизации трафика, проектирования криптографических протоколов, а также в области многоагентного обучения с подкреплением. Понятие «цены анархии» количественно оценивает потерю эффективности из-за эгоистичного поведения агентов в сетевых играх: отношение социального оптимума к наихудшему равновесию Нэша.

Международные отношения и ядерное сдерживание. Игра «Куриные гонки» моделирует ситуацию взаимного ядерного сдерживания: оба игрока предпочитают, чтобы уступил другой, однако взаимная несговорчивость ведёт к катастрофическому исходу. Теоретико-игровой анализ политики взаимного гарантированного уничтожения объясняет стабильность ядерного мира как равновесие Нэша, в котором ни одна из сторон не имеет стимула к первому удару.

4.3. Ограничения и поведенческие расширения

Классическая теория игр строится на предпосылке полной рациональности — игроки точно вычисляют оптимальные стратегии и имеют согласованные ожидания. Экспериментальные данные систематически опровергают эти предпосылки. В экспериментах с дилеммой заключённого значительная доля участников выбирает кооперацию; в ультиматумных играх люди отвергают «несправедливые» предложения, жертвуя материальной выгодой.

Поведенческая теория игр интегрирует психологические факторы — ограниченную рациональность, социальные предпочтения, принципы справедливости — в формальные модели. Концепция квантального ответа заменяет детерминированный наилучший ответ стохастическим: игрок выбирает лучшую стратегию с большей, но не стопроцентной вероятностью. Это позволяет лучше описывать экспериментальные данные, сохраняя математическую строгость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ (CONCLUSION)

Теория игр представляет собой зрелую математическую дисциплину с богатым арсеналом инструментов анализа стратегического взаимодействия. От простых матричных игр до сложных динамических моделей с неполной информацией — она предоставляет единый формальный язык для описания и анализа широчайшего класса явлений, объединённых общей чертой: результат зависит от действий всех участников.

Центральным достижением теории является концепция равновесия Нэша и доказательство его существования в любой конечной игре. Этот результат, опирающийся на глубокие топологические теоремы, обеспечивает теоретическую предсказуемость исходов стратегического взаимодействия. Ценность Шепли решает проблему справедливого распределения в кооперативных играх и нашла неожиданное применение в объяснимом искусственном интеллекте.

Вместе с тем теория игр не лишена ограничений. Множественность равновесий ставит под вопрос однозначность предсказаний. Предпосылка полной рациональности нарушается в экспериментах. Вычислительная сложность нахождения равновесий ограничивает применимость к задачам большой размерности. Эти вызовы определяют направления активных исследований: уточнение равновесий, поведенческие расширения, алгоритмическая теория игр.

Перспективными направлениями развития дисциплины являются: глубокое обучение с подкреплением в многоагентных средах; применение теоретико-игровых методов к задачам кибербезопасности; теория игр с федеративным обучением и дифференциальной приватностью; квантовая теория игр, изучающая эффекты запутанности в стратегическом взаимодействии.

Освоение теории игр становится необходимым условием профессиональной компетентности не только математиков и экономистов, но и специалистов в области искусственного интеллекта, права, политологии и менеджмента — всех, кто принимает решения в условиях стратегической неопределённости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

1. von Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. – Princeton: Princeton University Press, 1944. – 625 p.
2. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. – 1951. – Vol. 54, No. 2. – P. 286–295.
3. Shapley L.S. A Value for n-Person Games // Contributions to the Theory of Games, Vol. II / eds. H.W. Kuhn, A.W. Tucker. – Princeton, 1953. – P. 307–317.

4. Harsanyi J.C. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players // Management Science. – 1967–1968. – Vol. 14, No. 3–5. – P. 159–182, 320–334, 486–502.
5. Selten R. Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games // International Journal of Game Theory. – 1975. – Vol. 4, No. 1. – P. 25–55.
6. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirani V.V. (eds.) Algorithmic Game Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 754 p.
7. Maynard Smith J. Evolution and the Theory of Games. – Cambridge: Cambridge University Press, 1982. – 224 p.
8. Osborne M.J., Rubinstein A. A Course in Game Theory. – Cambridge: MIT Press, 1994. – 352 p.
9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.
10. Камерер К. Поведенческая теория игр: эксперименты в стратегическом взаимодействии. – М.: Издательство Института Гайдара, 2013. – 544 с.