BESSEL TENGLAMASI TIIDAGI TENGLAMA UCHUN BOSHLANG'ICH MASALA

AZIZOV M.S., RASULOVA D.S.

FarDU dotsenti, muzaffar.azizov.1988@gmail.com

FarDU talabasi, rasulovadildora0324@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada o'zgaruvchan koeffitsiyentli ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun boshlang'ich masala tadqiq etiladi. Tadqiqot davomida bunday tenglamalarni maxsus almashtirishlar orqali standart ko'rinishga keltirish usullari yoritiladi. Xususan, ushbu ishda berilgan tenglamani Bessel turidagi differensial tenglamaga olib kelish jarayoni ko'rsatilib, uning umumiy yechimi aniqlanadi va bu tenglama uchun boshlang'ich masala o'rganiladi.

Kalit so'zlar: Bessel funksiyasi, differensial tenglama, ikkinchi tartibli tenglama, boshlang'ich shart.

Kirish. Differensial tenglamalar zamonaviy ilm-fan va texnikaning ko'plab yo'nalishlarida asosiy matematik vosita sifatida xizmat qiladi. Ular yordamida turli fizik, mexanik va muhandislik jarayonlari ifodalanadi [1-2]. Ayniqsa, o'zgaruvchan koeffitsiyentli differensial tenglamalar real jarayonlarni aniqroq modellashtirish imkonini beradi [3-4]. Amaliy masalalarda ko'pincha murakkab ko'rinishdagi tenglamalarni bevosita yechish qiyin bo'ladi. Shu sababli ularni sodda yoki oldindan o'rganilgan standart tenglamalarga keltirish muhim ahamiyatga ega [5]. Shunday tenglamalardan biri - Bessel differensial tenglamasi bo'lib, u ko'plab fizik masalalarda uchraydi [6]. Bularni e'tiborga olsak quyidagi Bessel tenglamasiga keltriladigan tenglama uchun boshlang'ich masala tadqiq etish amaliy jihatdan muhim hisoblanadi.

Asosiy qism

Ma'lumki, ko'plab amaliy masalalarni tadqiq etish natijasida buziladigan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar hosil bo'ladi [7]. Shunday tenglamalarning muhim va keng tarqalgan ko'rinishlaridan biri

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishdagi Bessel tenglamasidir. Biz quyida (1) tenglamaning bir xususiy holini qaraymiz, bu yerda $\nu > 0$.

Masala. $[0, +\infty)$ *yarim oraliqda quyidagi*

$$xy''(x)+(1-\nu)y'(x)+\frac{1}{4}y(x)=0 \tag{2}$$

buziladigan tenglamani qanoatlantiradigan va

$$y(0)=k_1, \quad \lim_{x\to 0} x^{1-\nu}y'(x)=k_2 \tag{3}$$

boshlang'ich shartlarni bajaradigan $y(x)$ *funksiya topilsin, bu yerda* $0<\nu<1$, k_1 *va* k_2 *berilgan haqiqiy sonlar.*

Masala yechimining mavjudligi. (2) tenglamaning yechimini

$$y(x)=x^{\nu/2}z(t), \quad t=\sqrt{x}, \tag{4}$$

ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $z(t)$ - yangi noma'lum funksiya.

(4) ifodadan kerakli hosilalarni hisoblab (2) tenglamaga qo'yib ba'zi soddalashtirishlarni bajarsak

$$z''+\frac{1}{t}z'+\left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)=0 \tag{5}$$

(1) ko'rinishdagi Bessel tenglamasiga keladi. Ma'lumki (5) tenglamaning umumiy yechimi

$$z(t)=C_1J_\nu(t)+C_2J_{-\nu}(t) \tag{6}$$

ko'rinishda aniqlanadi [8], bu yerda $J_{\pm\nu}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x/2)^{2n\pm\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1\pm\nu)}$ - birinchi tur Bessel funksiyalari, C_1 va C_2 - ixtiyoriy o'zgarmaslar

(6) funksiyadan (4) ga asosan avvalgi o'zgaruvchilarga qaytsak, (2) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha aniqlanadi:

$$y(x)=x^{\nu/2}\left[C_1J_\nu\left(\sqrt{x}\right)+C_2J_{-\nu}\left(\sqrt{x}\right)\right]. \tag{7}$$

Endi (7) umumiy yechimda $0<\nu<1$ ekanligini e'tiborga olib uni (3) boshlang'ich shartlarga bo'ysundirib qo'yilgan masalaning yechimini

$$y(x)=x^{\nu/2}\left[AJ_\nu\left(\sqrt{x}\right)+BJ_{-\nu}\left(\sqrt{x}\right)\right]$$

ko'rinishda aniqlaymiz, bu yerda $A=2^{\nu-1}k_1\Gamma(1)\Gamma(1-\nu)$, $B=2^{-\nu}k_1\Gamma(1)\Gamma(1-\nu)$.

Masala yechimining yagonaligi.

Teorema. *Qo'yilgan masalaning yechimi yagonadir.*

Isbot. Faraz qilamiz qo'yilgan masala $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlarga ega bo'lsin. U holda bularning ayirmasi

$$y_1(x)-y_2(x)=g(x), \tag{8}$$

bo'ladi.

$g(x)$ funksiya qo'yilgan masalaga mos bir jinsli

$$xg''(x)+(1-\nu)g'(x)+\frac{1}{4}g(x)=0, \tag{9}$$

$$g(0)=0, \quad \lim_{x\to 0} x^{1-\nu}g'(x)=0 \tag{10}$$

masalani qanoatlantiradi.

(9) tenglamaning umumiy yechimi (7) ko'rinishdagi kabi aniqlanadi ya'ni

$$g(x)=x^{\nu/2}\left[C_1 J_\nu\left(\sqrt{x}\right)+C_2 J_{-\nu}\left(\sqrt{x}\right)\right]. \tag{11}$$

(11) umumiy yechimni (10) bir jinsli shartlarga bo'ysundirsak $C_1=0$, $C_2=0$ bo'lishi kelib chiqadi bundan $g(x)=0$. (8) ga asosan esa $y_1(x)=y_2(x)$. Demak, teorama sharti to'g'ri farazimiz noto'g'ri. Teorema isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Salohiddinov M. S. *Matematik fizika tenglamalari*. – Toshkent: "O'zbekiston" nashriyoti, 2002. – 448 b.

2. Fayzullayev B. A., & Rahmatov, A. S. *Matematik fizika metodlari*. – Toshkent: "O'qituvchi" nashriyoti, 2010. – 344 b.

3. Mamatov Sh.S. *Differensial tenglamalar*. – Toshkent: "Fan va texnologiya", 2015. – 256 b.

4. Toshov J.B. *Oddiy differensial tenglamalar kursi*. – Toshkent: "Innovatsiya-Ziyo", 2021. – 230 b.

5. Ismoilov Sh.I. *Oddiy differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar to'plami*. – Toshkent: "Universitet", 2012. – 180 b.

6. Ўринов А.Қ. *Махсус функциялар ва махсус операторлар*. – Фарғона: “Фарғона” нашриёти, 2011. – 108 б.

7. Лебедев Н.Н. *Специальные функции и их приложения*. – Москва: “Физматлит”, 1963. – 358 с.

8. Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 804 p.