

BUZILADIGAN IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN BOSHLANG'ICH MASALA

Azizov M.S., Usmonova Y.J.

FarDU dotsenti, muzaffar.azizov.1988@gmail.com

FarDU talabasi, yulduzxonusmonova4@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada buziladigan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun boshlang'ich masala tadqiq qilinadi. Tadqiqot davomida buziladigan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamani maxsus almashtirish hamda soddalashtirishlar orqali standart ko'rinishdagi Bessel tenglamasiga keltiriladi. Hamda bu tenglamaning boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi aniqlanadi. Olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: ikkinchi tartibli tenglama, boshlang'ich shart, Bessel funksiyasi, umumiy yechim, differensial tenglama.

Kirish. Differensial tenglamalar zamonaviy ilm-fan va texnikaning ko'plab yo'nalishlarida asosiy matematik apparat sifatida xizmat qiladi. Ular yordamida turli fizik, mexanik va muhandislik jarayonlari ifodalanadi.[1-2] Ayniqsa, o'zgaruvchan koeffitsiyentli differensial tenglamalar real jarayonlarni aniqroq modellashtirish imkonini beradi. Amaliy masalalarda ko'pincha murakkab ko'rinishdagi tenglamalarni bevosita yechish qiyin bo'ladi [3-4]. Shu sababli ularni sodda yoki oldindan o'rganilgan standart tenglamalarga keltirish muhim ahamiyatga ega [5]. Shunday tenglamalardan biri - Bessel differensial tenglamasi bo'lib, u ko'plab fizik masalalarda uchraydi.

Asosiy qism. Ma'lumki, ko'plab amaliy masalalar natijasida o'zgaruvchilarni ajratish yoki maxsus almashtirishlar yordamida buziladigan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar hosil bo'ladi. Shunday tenglamalarning muhim va keng tarqalgan ko'rinishlaridan biri

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi Bessel tenglamasidir. Biz quyida (1) tenglamaning bir xususiy holini qaraymiz, bu yerda $\nu > 0$

Masala. $[0, +\infty)$ oraliqda quyidagi

$$y'' + \frac{1}{x}y' + 4\left(x^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (2)$$

buziladigan tenglamani qanoatlantiradigan va

$$y(0) = k_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^\nu y)' = k_2 \quad (3)$$

boshlang'ich shartlarni bajaradigan $y(x)$ funksiya topilsin, bu yerda $0 < \nu < 1$, k_1 va k_2 berilgan haqiqiy sonlar.

Masala yechimining mavjudligi. (2) tenglamaning yechimini

$$y(x) = z(t), \quad t = x^2 \quad (4)$$

ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $z(t)$ - yangi noma'lum funksiya.

(4) ifodadan kerakli hosilalarni hisoblab (2) tenglamaga qo'yib ba'zi soddalashtirishlarni bajarsak

$$z_{tt} + \frac{1}{t}z_t + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)z = 0 \quad (5)$$

(1) ko'rinishdagi Bessel tenglamasiga keladi. Ma'lumki (5) tenglamaning umumiy yechimi

$$z(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t) \quad (6)$$

ko'rinishda aniqlanadi [6], bu yerda $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+\nu}$,

$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$ - birinchi tur Bessel funksiyalari, C_1 va C_2 - ixtiyoriy

o'zgarmlar.

(6) funksiyadan (4) ga asosan avvalgi o'zgaruvchilarga qaytsak, (2) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha aniqlanadi:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x^2) + C_2 Y_\nu(x^2). \quad (7)$$

(7) umumiy yechimni (3) boshlang'ich shartlarga bo'ysindirib

$$C_2 = -k_1 2^{-\nu} \Gamma(1)\Gamma(1-\nu), \quad C_1 = k_2 2^\nu \Gamma(\nu+1) + k_1 2^{-\nu} \Gamma(1-\nu)\cos\nu\pi$$

tengliklarni topamiz. Buni (7) ga qo'yib (2) tenglamaning (3) boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini ko'rinishda topamiz.

$$y(x) = k_2 2^\nu \Gamma(\nu + 1) + k_1 \Gamma(1 - \nu) \cos \nu\pi 2^{-\nu} J_\nu(x^2) - k_1 2^{-\nu} \Gamma(1) \Gamma(1 - \nu) Y_\nu(x^2). \quad (8)$$

Topilgan (8) yechim (2) tenglamaning (3) boshlang'ich shartlarni bajaruvchi yechimi ekanligini ko'rsatamiz:

(8) funksiyani quyidagicha sodda ko'rinishda yozib olamiz:

$$y(x) = AJ_\nu(x^2) + B \cos(\nu\pi) J_{-\nu}(x^2) - B \sin(\nu\pi) Y_\nu(x^2), \quad (9)$$

bu yerda,

$$A = k_2 2^\nu \Gamma(\nu + 1)$$

$$B = k_1 2^{-\nu} \Gamma(1 - \nu)$$

(14) tenglamadan birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz

$$\begin{aligned} y'(x) &= AJ'_\nu(x^2) + B \cos(\nu\pi) J'_{-\nu}(x^2) - B \sin(\nu\pi) Y'_\nu(x^2), \\ y''(x) &= AJ''_\nu(x^2) + B \cos(\nu\pi) J''_{-\nu}(x^2) - B \sin(\nu\pi) Y''_\nu(x^2). \end{aligned} \quad (10)$$

(10) funksiyalarni (2) tenglamaga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} &A \left[x^2 J''_\nu(x^2) + x J'_\nu(x^2) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x^2) \right] + \\ &B \cos \nu\pi \left[x^2 J''_{-\nu}(x^2) + x J'_{-\nu}(x^2) + (x^2 - \nu^2) J_{-\nu}(x^2) \right] - \\ &- B \sin(\nu\pi) \left[x^2 Y''_\nu(x^2) + x Y'_\nu(x^2) + (x^2 - \nu^2) Y_\nu(x^2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Bundan ko'rinib turibdiki (11) tenglama (1) tenglamaning yechimi.

Masala yechimining yagonaligi.

Teorema. *Qo'yilgan masalaning yechimi yagonadir.*

Isbot. Faraz qilamiz qo'yilgan masala $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlarga ega bo'lsin.

U holda bularning ayirmasi

$$y_1(x) - y_2(x) = \varphi(x) \quad (12)$$

bo'ladi.

$\varphi(x)$ funksiya qo'yilgan masalaga mos bir jinsli

$$\varphi'' + \frac{1}{x}\varphi' + 4\left(x^2 - \frac{v^2}{x^2}\right)\varphi = 0 \quad (13)$$

$$\varphi(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (x^v y)' = 0 \quad (14)$$

masalani qanoatlantiradi.

(13) tenglamaning umumiy yechimi (7) ko‘rinishdagi kabi aniqlanadi ya’ni

$$\varphi(x) = C_1 J_v(x^2) + C_2 Y_v(x^2) \quad (15)$$

(15) umumiy yechimni (14) bir jinsli shartlarga bo‘ysundirsak $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ bo‘lishi kelib chiqadi bundan $\varphi(x) = 0$. (13) ga asosan esa $y_1(x) = y_2(x)$. Demak, teorema sharti to‘g‘ri farazimiz noto‘g‘ri. Teorema isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Salohiddinov, M. S. *Matematik fizika tenglamalari*. – Toshkent: “O‘zbekiston” nashriyoti, 2002. – 448 b.
2. Fayzullayev, B. A., & Rahmatov, A. S. *Matematik fizika metodlari*. – Toshkent: “O‘qituvchi” nashriyoti, 2010. – 344 b.
3. Mamatov, Sh. S. *Differensial tenglamalar*. – Toshkent: “Fan va texnologiya”, 2015. – 256 b.
4. Toshov, J. B. *Oddiy differensial tenglamalar kursi*. – Toshkent: “Innovatsiya-Ziyo”, 2021. – 230 b.
5. Ismoilov, Sh. I. *Oddiy differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar to‘plami*. – Toshkent: “Universitet”, 2012. – 180 b.
6. O‘rinov, A. Q. *Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar..* – Farg‘ona: “Farg‘ona” nashriyoti, 2011. – 108 b.
7. Лебедев, Н. Н. *Специальные функции и их приложения*. – Москва: “Физматлит”, 1963. – 358 с.
8. Watson, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 804 p.