РЯД ФУРЬЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В КОМПЮТЕРНОЙ НАУКЕ

АДИЗОВ А.А.

Доцент Ташкентского государственного экономического университета,

akbaradizov0603@gmail.com.

Annotatsiya. Tezisda iqtisod sohasidagi mutaxassis kadrlarni tayyorlashda «chiziqli algebra» faninig roli ko'rsatilgan.

Kalit sozlar. iqtisodiy masalalar, chiziqli algebra elementlari, kasbiy yo'naltirilgan misollar.

Задача замены произвольной сложной или неудобной для вычислений функции давно занимала умы математиков. Частично она была решена с помощью интерполяции и аппроксимации функций и регрессии. Но все эти математические приемы имеют один серьезный недостаток: они плохо подходят для периодических колебаний. А между тем развитие теории колебаний, а в дальнейшем электротехники, радиотехники и компютерные технологии настойчиво требовало нового аппарата приближения периодических функций. Над решением этой задачи бились многие ученые прошлого. Открытие в этой области удалось сделать в 1807 году Фурье, который нашел и обосновал метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, при котором такой ряд был способен приближать любую периодическую функцию (при некоторых ограничениях).

Изучаемая в настоящей работе проблема разложения функции в ряд Фурье является обобщением и развитием идеи вектора по базису. Ряды Фурье представляют собой тригонометрические многочлены, построенные на основе периодической базисной функции - синусоиды (и косинусоиды, представляющей собой синусоиду с фазовым сдвигом в $\pi/2$). Благодаря этому ряды Фурье способны приближать периодические функции. В рядах Фурье используются синусоиды и косинусоиды с кратными частотами, получившие название — гармоники. Сложные колебания разлагаются на отдельные гармонические колебания (гармонические составляющие, или гармоники).

Данная работа в основном посвящена изучению тригонометрических рядов Фурье. Важность рассматриваемой темы обусловлена той большой ролью, которую играют её приложения не только в математике, но и в компьютерных технологиях и других научных дисциплинах.

Определение 1. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a,b]$, если $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Если $f(x) \equiv 0$, ·то это равенство выполняется для каждой функции $g(x)$. Другими словами, функция $f(x) \equiv 0$ ·ортогональна ко всем функциям $g(x)$. В силу известного неравенства Коши-Буняковского для интегралов

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

из условия $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ следует, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Следовательно, функция $f(x)$, для которой $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, играет роль нулевой функции. Поэтому такая функция тоже считается нулевой. В противном случае, когда $\int_a^b f^2(x)dx \neq 0$ функция $f(x)$ по определению считается ненулевой. Очевидно, что нулевая функция не является единственной. Действительно, если изменить значение функции в одной точке, то по-прежнему будем иметь, что $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Однако для непрерывной функции ситуация становится иной, т.е. имеет место следующая лемма:

Лемма. Если $f \in C[a,b]$ *и* $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Определение 2. Система ненулевых функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ (конечная или бесконечная) называется *ортогональной на отрезке* $[a,b]$, если на этом отрезке ортогональны любые две функции этой системы, то есть

$$\int_a^b \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x)dx = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

Определение 3. Если интеграл $\int_a^b f^2(x)dx = 1$; то функция f называется *нормированной* на $[a,b]$.

Определение 4. Если все функции ортогональной системы $\{\varphi_i\}$ нормированы, то такая система $\{\varphi_i\}$ называется *ортонормированной*, то есть

$$\int_a^b \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ 1, & \text{при } i = j \end{cases}.$$

Определение 5. Система $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin kx, \cos kx, ...\}$ функций называется тригонометрической системой.

Нетрудно доказать, что эта тригонометрическая система, является ортогональной на отрезке $[-\pi,\pi]$, но она не является нормированной.

Определение 6. Тригонометрическим многочленом порядка n называют функцию вида: $T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где a_k, b_k – некоторые числа. Если $a_n \neq 0$ или $b_n \neq 0$, то n определяет порядок (степень) тригонометрического многочлена.

Тригонометрический ряд Фурье. Если крутить прикрепленный к веревке камень с постоянной скоростью (числом оборотов в единицу времени), то проекция камня на ось ординат и есть синусоида. Синусоидальные колебания характерны для многих физических объектов, их генерируют, например, электроннные генераторы сигналов. Ввиду их неизменности во времени, симметрии и гладкости синусоидальные колебания получили название гармонических колебаний.

Часто синусоидальная функция в виде сигнала, которая описывает колебательные процессы (гармоники), записывается как функция от времени: $y(t) = A\sin(2\pi \nu t + \varphi)$, где $A > 0$ - амплитуда колебания, ν — её частота выраженная в Гц (Гц — одно полное колебание в одну секунду), φ — фазовый сдвиг (начальная фаза). Нередко используется и понятие круговой частоты синусоиды $w = 2\pi v$, тогда синусоида записывается в виде $y(t) = A\sin(wt + \varphi)$. Поэтому можно определять частоту как величину обратную периоду, то есть период колебания $T = \dfrac{2\pi}{w}$. Используя формулу синуса суммы, имеем $A\sin(wt + \varphi) = a_w \cos wt + b_w \sin wt$.

Определение 7. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \qquad (1)$$

где a_k *и* b_k — некоторые числа, называется *тригонометрическим рядом*.

Теорема 2. Если тригонометрический ряд (1) равномерно сходится на промежутке $[-\pi, \pi]$ и $f(x)$ — сумма этого ряда, то коэффициенты находятся по формулам

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos kx \cdot dx \ \ (n = 0,1,2,...) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin kx \cdot dx \ \ (n = 1,2,...) \end{cases} \qquad (2)$$

Определение 8. Формулы (1) называются формулами Эйлера– Фурье, а числа a_k *и* b_k — коэффициентами Фурье. Тогда тригонометрическим рядом Фурье называется ряд вида $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ с коэффициентами a_k *и* b_k — вычисляемыми по формулам (2). Выражение $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ будем считать *n*-м членом этого ряда, а $S_n = S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

является n-й частичной суммой ряда.

Замечание. Так как $f(x)$, $\cos kx$, $\sin kx$ - 2π -периодические функции, то можно промежуток интегрирования $[-\pi, \pi]$ заменить произвольным промежутком $[a, a + 2\pi]$.

Рассмотрим все функции $f(x)$, для которых $\int_a^b f(x)\cdot dx$ является собственным (не имеет особых точек) или является абсолютно сходящимся, то есть $\int_a^b |f(x)|\cdot dx < \infty$. Класс функций такого типа обозначают $L[a,b]$ или $L_1[a,b]$. Заметим, функции такого вида имеют конечное число особых точек .

Так как $|f(x)\cdot\cos x| \le |f(x)|$ и $|f(x)\cdot\sin x| \le |f(x)|$, то формулы (2) будут определены для всех функций $f \in \overline{L_1}[-\pi,\pi]$.

Взяв произвольную функцию $f(x) \in \overline{L_1}[-\pi,\pi]$, мы можем для неё построить ряд Фурье: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ где a_k *и* b_k выражаются по формулам (2). Но нет никакой гарантии, что этот ряд сходится. А если он сходится, то не обязательно, что он сходится к данной функции $f(x)$. Поэтому будем писать:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Ряды Фурье — это один из самых мощных инструментов математического анализа, который нашел колоссальное применение в области компьютерных наук. Суть метода заключается в возможности разложить любую периодическую функцию в сумму простейших гармонических колебаний (синусов и косинусов). Перечислим некоторые применения Ряды Фурье в компьютерных наук.

1. Цифровая обработка сигналов (DSP). Это, пожалуй, основная сфера применения. Любой звук или радиоволна — это сигнал. С помощью преобразования Фурье компьютер переводит сигнал из временной области в частотную. Это позволяет:

Фильтрация шума: Удаление определенных частот, которые соответствуют помехам.

Эквалайзеры: Усиление басов или высоких частот в аудиоредакторах.

Распознавание речи: Выделение характерных частотных «отпечатков» фонем.

2. Сжатие данных (MP3, JPEG). Алгоритмы сжатия с потерями активно используют принципы Фурье. Например, в формате JPEG используется Дискретное косинусное преобразование (вариация Фурье). Изображение разбивается на блоки, и вместо хранения цвета каждого пикселя компьютер хранит коэффициенты частот. Поскольку человеческий глаз плохо замечает потерю высокочастотных деталей, их можно отсечь, значительно уменьшив размер файла.

3. Компьютерное зрение и обработка изображений. В Computer Science изображение рассматривается как двумерный сигнал. Применение Фурье здесь позволяет:

Размытие и резкость: Манипуляции с частотами позволяют сглаживать переходы или, наоборот, подчеркивать границы объектов.

Распознавание паттернов: Анализ текстур и повторяющихся узоров на изображениях.

Быстрое преобразование Фурье (FFT): Изобретение этого алгоритма в 1965 году стало революцией. Оно сократило сложность вычислений с $O(N^2)$ до $O(N \log N)$, что сделало обработку сигналов в реальном времени возможной на обычных процессорах.

4. Решение дифференциальных уравнений. В компьютерном моделировании (например, симуляция физики воды в играх или распространения тепла) ряды Фурье позволяют упростить решение сложных уравнений, превращая дифференциальные операции в простые алгебраические задачи в частотной области.

Заключение. Без рядов Фурье современный цифровой мир выглядел бы иначе: не было бы потокового видео, качественной цифровой связи и компактных форматов хранения музыки. Для специалиста в Computer Science понимание

Фурье — это ключ к работе с данными любого типа в их самом фундаментальном представлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления (Том 3)*. Издательство «Физматлит», 2008.

2. Толстов Г. П., *Ряды Фурье*. Издательство «Наука», 1980.

3. Смит С., *Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и ученых*. Издательство «Додэка-XXI», 2012.

4. Гонсалес Р., Вудс Р., *Цифровая обработка изображений*. Издательство «Техносфера», 2012.

5. Блейхут Р., *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*. Издательство «Мир», 1989.

6. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К., *Алгоритмы: построение и анализ*. Издательство «Вильямс», 2013.