RITS USULI YORDAMIDA IKKINCHI TARTIBLI CHEGARAVIY MASALANI TAQRIBIY YECHISH

Adhamova V.E.

FarDU talabasi, adhamovavasila@gmail.com

Annotatsiya. *Mazkur maqolada ikkinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masalani Rits usuli yordamida taqribiy yechish masalasi ko'rib chiqiladi. Berilgan differensial tenglama integrallovchi ko'paytuvchi yordamida o'z-o'ziga qo'shma ko'rinishga keltiriladi va unga mos variatsion funksional tuziladi. Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy funksiya hamda bir jinsli chegaraviy shartlarni bajaruvchi bazis funksiyalar tanlanadi.* $n=4$ *hol uchun taqribiy yechim qurilib, noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Hosil bo'lgan sistema Gauss usuli yordamida yechilib, masalaning taqribiy yechimi aniqlanadi.*

Kalit so'zlar: *oddiy differensial tenglama, chegaraviy masala, variatsion usullar, Rits usuli, taqribiy yechim, bazis funksiyalar, algebraik sistema.*

Kirish: Zamonaviy ilm-fan va texnologiyaning rivojlanishi murakkab fizik, texnik va muhandislik jarayonlarini matematik modellar yordamida tadqiq qilishni talab etmoqda. Bunday modellar ko'pincha differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Ayniqsa, turli fizik jarayonlarning fazoviy holatini aniqlash, muhitdagi taqsimot qonuniyatlarini o'rganish hamda texnologik tizimlarning optimal parametrlarini hisoblashda chegaraviy masalalar muhim ahamiyat kasb etadi.

Chegaraviy masalalar issiqlik o'tkazuvchanlik nazariyasi, elastiklik, gidrodinamika, diffuziya jarayonlari, elektr maydonlari hamda qurilish mexanikasi kabi ko'plab yo'nalishlarda uchraydi. Masalan, sanoat quvurlarida moddalarning tarqalishi, metall konstruksiyalarning deformatsiyasi yoki elektr potensialining fazo bo'yicha taqsimoti ko'pincha ikkinchi tartibli differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi. Biroq bunday masalalarning aniq analitik yechimini topish har doim ham mumkin emas. Shu sababli amaliy hisoblashlarda taqribiy usullardan foydalanishga ehtiyoj tug'iladi.

Hisoblash matematikasida chegaraviy masalalarni yechish uchun turli sonli va variatsion metodlar ishlab chiqilgan. Ular orasida Rits usuli funksional analiz va variatsion hisoblash g‘oyalariga asoslangan samarali usullardan biri hisoblanadi. Ushbu usulda izlanayotgan yechim oldindan tanlangan bazis funksiyalar kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalanadi va masalaga mos funksionalning minimum qiymati aniqlanadi. Natijada differensial tenglamali masala algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Rits usulining muhim afzalliklaridan biri shundaki, u chegaraviy shartlarni hisobga olishni soddalashtiradi hamda murakkab operatorlar uchun ham samarali taqribiy yechim olish imkonini beradi. Bundan tashqari, usulning nazariy asoslari keyinchalik chekli elementlar usuli kabi zamonaviy hisoblash metodlarining shakllanishiga asos bo‘lib xizmat qilgan. Shu sababli Rits usuli nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhim ahamiyatga ega.

Mazkur maqolada ikkinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masala Rits usuli yordamida taqribiy yechiladi. Dastlab berilgan tenglama integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltiriladi. So‘ng unga mos variatsion funksional qurilib, chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy funksiya hamda bir jinsli chegaraviy shartlarga mos bazis funksiyalar tanlanadi. $n = 4$ hol uchun taqribiy yechim qurilib, noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Hosil bo‘lgan sistema Gauss usuli yordamida yechilib, masalaning taqribiy yechimi aniqlanadi.

Olingan natijalar Rits usulining ikkinchi tartibli chegaraviy masalalarni yechishda yuqori samaradorlikka ega ekanligini ko‘rsatadi hamda ushbu yondashuvni murakkabroq differensial operatorlar va amaliy modellashtirish masalalariga tatbiq etish imkoniyatlarini ochib beradi.

Masalaning qo‘yilishi: Zamonaviy elektrotexnika va elektron qurilmalarni loyihalashda elektr potensialining fazo bo‘yicha taqsimotini aniqlash muhim masalalardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, o‘tkazgichlar, yarimo‘tkazgich elementlari, sensor qurilmalar hamda elektr maydon ta'sirida ishlovchi texnologik tizimlarda potensialning taqsimot qonuniyatlarini bilish tizimning samaradorligi va xavfsizligini ta'minlashda katta ahamiyatga ega.

Tasavvur qilaylik, uzunligi [0;2] oraliqda joylashgan ingichka oʻtkazgich boʻylab elektr potensiali taqsimotini aniqlash talab qilinadi. Oʻtkazgichning chap qismiga elektr manbai ulangan boʻlib, bu yerda elektr oqimining intensivligi ma'lum qiymatda saqlanadi. Oʻng qismi esa yerga ulanganligi sababli potensial nolga teng deb olinadi.

Oʻtkazgich boʻylab elektr potensialini $y(x)$ orqali belgilaymiz. Bu yerda: x — oʻtkazgich boʻylab koordinata; $y(x)$ — shu nuqtadagi elektr potensiali.

Elektr maydonning fazo boʻyicha oʻzgarishini soddalashtirilgan holda quyidagi differensial tenglama yordamida modellashtirish mumkin:

$$y'' + (3x^2 - x)y' + (4x-1)y = 5x^2 + 1, \qquad 0 \le x \le 2.$$

Bu tenglamadagi y'' had elektr potensialining fazoviy taqsimotini; $(3x^2 - x)y'$ had muhitning oʻzgaruvchan elektr qarshiligi yoki elektr maydonning notekisligini; $(4x-1)y$ had ichki elektr yoʻqotishlar yoki potensialning susayishini; $5x^2+1$ esa tashqi elektr manbasi ta'sirini ifodalaydi.

Jarayon uchun quyidagi chegaraviy shartlar berilgan:

$$y'(0) = 1, \qquad y(2) = 0.$$

Birinchi shart oʻtkazgichning chap chegarasida elektr oqimi intensivligi berilganligini bildiradi. Chunki fizik ma'noda potensial hosilasi elektr maydon kuchlanganligi yoki tok zichligi bilan bogʻliq boʻladi. Ikkinchi shart esa oʻtkazgichning oʻng uchi yerga ulanganligi sababli elektr potensial nolga teng ekanligini anglatadi.

Mazkur masalaning asosiy maqsadi — oʻtkazgich boʻylab elektr potensialining qanday taqsimlanishini aniqlashdan iborat. Biroq tenglamaning analitik yechimini topish murakkab boʻlgani sababli, masalani Rits usuli yordamida taqribiy yechish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Rits usuli yordamida elektr potensialining taqsimoti bazis funksiyalar orqali approksimatsiya qilinadi va variatsion funksional minimallashtiriladi. Natijada fizik jarayonni ifodalovchi differensial model algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi hamda kompyuter yordamida samarali hisoblash imkoniyati yuzaga keladi.

Shunday qilib, qaralayotgan chegaraviy masala elektrotexnika, elektr maydonlarni modellashtirish, sensor tizimlari hamda yarimo‘tkazgich qurilmalarida elektr potensialining fazoviy taqsimotini o‘rganishda uchraydigan real jarayonlarning soddalashtirilgan matematik modeli sifatida qaralishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan fizik talqindan kelib chiqib, elektr potensialining o‘tkazgich bo‘ylab fazoviy taqsimotini tavsiflovchi matematik model sifatida quyidagi ikkinchi tartibli chegaraviy masalani qaraymiz:

$$y'' + (3x^2 - x)y' + (4x-1)y = 5x^2 + 1, \qquad 0 \le x \le 2,$$

$$y'(0) = 1, \qquad y(2) = 0.$$

bu yerda *y(x)* — o‘tkazgichning xxx nuqtasidagi elektr potensiali bo‘lib, birinchi chegaraviy shart chap chegaradagi elektr oqimi intensivligini, ikkinchi shart esa o‘ng chegaraning yerga ulanganligini ifodalaydi. Mazkur chegaraviy masalani Rits usuli yordamida taqribiy yechish talab qilinadi.

Tenglamani o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltirish: Berilgan tenglama

$$y'' + (3x^2 - x)y' + (4x-1)y = 5x^2 + 1,$$

ko‘rinishda berilgan. Birinchi hosilali had mavjud bo‘lgani uchun tenglamani integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltiramiz. Integrallovchi ko‘paytuvchi:

$$\mu(x) = e^{\int (3x^2 - x)dx}$$

Integralni hisoblaymiz:

$$\int (3x^2 - x)\,dx = x^3 - \frac{x^2}{2}.$$

Demak,

$$\mu(x) = e^{\int (3x^2 - x)dx}.$$

Endi tenglamaning har ikki tomonini $\mu(x)$ ga ko‘paytiramiz:

$$e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y''+(3x^2-x)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y'+(4x-1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y=(5x^2+1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}.$$

Birinchi ikki hadni bitta hosila ko‘rinishida yozamiz:

$$(\mu(x)y')'+(4x-1)\mu(x)y=(5x^2+1)\mu(x).$$

Shunday qilib, tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$(p(x)y')'+q(x)y=f(x),$$

bu yerda

$$p(x)=e^{x^3-\frac{x^2}{2}},$$

$$q(x)=(4x-1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}},$$

$$f(x)=(5x^2+1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}.$$

Variatsion funksionalni tuzish: Ushbu chegaraviy masalaga mos variatsion funksional

$$J(y)=\int_0^2\left[\frac{1}{2}p(x)y'^2-\frac{1}{2}q(x)y^2+f(x)y\right]dx+y(0)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Demak, aniq holda

$$J(y)=\int_0^2\left[\frac{1}{2}e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y'^2-\frac{1}{2}(4x-1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y^2+(5x^2+1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y\right]dx+y(0).$$

Taqribiy yechimni qurish: Rits usuliga ko‘ra taqribiy yechim quyidagi ko‘rinishda izlanadi:

$$y_4(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{4}a_i\varphi_i(x).$$

bu yerda $\varphi_0(x)$ berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi, $\varphi_i(x)$esa mos bir jinsli chegaraviy shartlarni bajaradi.

Xususiy funksiyani topish: Chegaraviy shartlar

$$y'(0)=1, \qquad y(2)=0$$

bo‘lgani uchun $\varphi_0(x)$ni chiziqli ko‘rinishda olamiz:

$$\varphi_0(x) = ax + b.$$

Hosila

$$\varphi'_0(x) = a$$

Birinchi chegaraviy shartdan:

$$\varphi'_0(x) = a = 1$$

Ikkinchi chegaraviy shartdan:

$$\varphi_0(2) = 2a + b = 0.$$

bu yerga $a = 1$ ni qo‘ysak:

$$2 + b = 0, b = -2.$$

Shunday qilib,

$$\varphi_0(x) = x - 2.$$

Haqiqatan ham,

$$\varphi'_0(0) = 1, \qquad \varphi_0(2) = 0.$$

Bazis funksiyalarni tanlash: Bir jinsli chegaraviy shartlar

$$\varphi'_i(0) = 0, \qquad \varphi_i(2) = 0.$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Quyidagi bazis funksiyalarni tanlaymiz:

$$\varphi_1(x) = x^2(x-2),\ \varphi_2(x) = x^3(x-2),$$

$$\varphi_3(x) = x^4(x-2),\ \varphi_4(x) = x^5(x-2).$$

Ular uchun

$$\varphi_i(2) = 0.$$

tenglik aniq bajariladi. Bundan tashqari, har bir $\varphi_i(x)$ da kamida x^2 ko‘paytuvchi borligi sababli

$$\varphi'_i(0) = 0$$

ham bajariladi.

Demak, taqribiy yechim

$$y_4(x) = x - 2 + a_1x^2(x-2) + a_2x^3(x-2) + a_3x^4(x-2) + a_4x^5(x-2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Rits shartini qo‘llash: Rits usuliga ko‘ra noma’lum koeffitsiyentlar quyidagi shartlardan topiladi:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

Natijada

$$\sum_{j=1}^{4} A_{ij} a_j = b_i, \qquad i = 1,2,3,4$$

ko‘rinishdagi algebraik sistema hosil bo‘ladi.

Bu yerda

$$A_{ij} = \int_0^2 \left[p(x)\varphi_{i'}(x)\varphi_{j'}(x) - q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) \right] dx$$

$$b_i = -\int_0^2 \left[p(x)\varphi'_0(x)\varphi'_i(x) - q(x)\varphi_0(x)\varphi_i(x) + f(x)\varphi_i(x) \right] dx$$

Mazkur integrallar sonli hisoblash yordamida topiladi.

Hosil bo‘lgan algebraik sistema: Hisoblash natijasida quyidagi sistema hosil bo‘ladi.

$$\begin{cases} 402.181507 a_1 + 748.977967 a_2 + 1396.157587 a_3 + 2607.055290 a_4 = 194.014944, \\ 748.977967 a_1 + 1408.850639 a_2 + 2648.489720 a_3 + 4981.590526 a_4 = 338.351459, \\ 1396.157587 a_1 + 2648.489720 a_2 + 5016.189544 a_3 + 9497.425425 a_4 = 599.254052, \\ 2607.055290 a_1 + 4981.590526 a_2 + 9497.425425 a_3 + 18088.946428 a_4 = 1073.227041. \end{cases}$$

Endi bu sistemani Gauss usuli bilan yechsak, noma’lum koeffitsiyentlar quyidagi qiymatlarga teng bo’ladi:

$$a_1 \approx 10.799234,\ a_2 \approx -11.005316,\ a_3 \approx 3.475979,\ a_4 \approx -0.291330.$$

Taqribiy yechim: Topilgan qiymatlarni taqribiy yechim formulasiga qo‘yamiz:

$$y_4(x) = x - 2 + a_1 x^2 (x-2) + a_2 x^3 (x-2) + a_3 x^4 (x-2) + a_4 x^5 (x-2).$$

Demak,

$$y_4(x) = x - 2 + 10.799234 x^2 (x-2) - 11.005316 x^3 (x-2) +$$
$$+ 3.475979 x^4 (x-2) - 0.291330 x^5 (x-2).$$

Uni ixcham ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$y_4(x) = (x-2)\ 1 + 10.799234x^2 - 11.005316x^3 + 3.475979x^4 - 0.291330x^5\ .$$

Chegaraviy shartlarni tekshirish: Tanlangan taqribiy yechim uchun $x = 2$ da $x-2$ ko‘paytuvchi mavjud bo‘lgani sababli

$$y_4(2) = 0$$

aniq bajariladi.

Bundan tashqari $\varphi_0(x) = x-2$ va $\varphi'_i(0) = 0$ bo‘lgani uchun

$$y'_4(0) = \varphi'_0(0) = 1$$

ham bajariladi.

Demak, topilgan taqribiy yechim berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

Natijalar tahlili: Rits usuli yordamida qurilgan taqribiy yechim berilgan chegaraviy shartlarga mos keldi va differensial tenglamaning variatsion qo‘yilishiga asoslangan holda topildi. Ushbu usulning asosiy qulayligi shundaki, differensial tenglamali chegaraviy masala algebraik tenglamalar sistemasiga keltirildi. Bazis funksiyalarning to‘g‘ri tanlanishi yechimning aniqligiga bevosita ta’sir ko‘rsatadi.

Mazkur misolda $n = 4$ bo‘lganda olingan taqribiy yechim masalaning umumiy xarakterini yaxshi ifodalaydi. Agar bazis funksiyalar soni oshirilsa, taqribiy yechimning aniqligi yanada ortishi mumkin.

Topilgan taqribiy yechim o‘tkazgich bo‘ylab elektr potensialining fazo bo‘yicha taqsimotini ifodalaydi. Yechimdan ko‘rinadiki, potensial o‘tkazgich uzunligi bo‘ylab bir tekis emas, balki muhitning o‘zgaruvchan elektr xossalari, tashqi manba va ichki yo‘qotishlar ta’sirida murakkab tarzda o‘zgaradi.

Chegaraviy shartlar ham bajariladi:

$$y'_4\ 0\ = 1, \qquad y_4\ 2\ = 0.$$

Bu esa fizik ma’noda chap chegarada elektr oqimi intensivligi berilganligini, o‘ng chegarada esa potensial nolga teng, ya’ni o‘tkazgich yerga ulanganligini bildiradi.

Demak, Rits usuli yordamida elektr potensialining taqsimotini aniqlash masalasi differensial tenglamadan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirildi va amaliy hisoblash uchun qulay taqribiy yechim olindi. Ushbu natijadan elektrotexnika, sensor tizimlari, o'tkazgichlar va elektr maydonlarni modellashtirishda foydalanish mumkin.

Xulosa: Ushbu masalada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masala Rits usuli yordamida taqribiy yechildi. Dastlab tenglama integrallovchi ko'paytuvchi orqali o'z-o'ziga qo'shma ko'rinishga keltirildi. Bu esa masalani variatsion usul yordamida yechish imkonini berdi.

Berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_0(x) = x - 2$ xususiy funksiya tanlandi. So'ng bir jinsli chegaraviy shartlarni bajaruvchi bazis funksiyalar asosida $n = 4$ hol uchun taqribiy yechim qurildi.

Natijada differensial tenglamali chegaraviy masala noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirildi. Ushbu sistema yechilib, taqribiy yechimning koeffitsiyentlari aniqlandi.

Olingan yechim elektr potensialining fazo bo'yicha taqsimoti masalasi nuqtai nazaridan qaralganda, o'tkazgich bo'ylab potensialning bir tekis emas, balki muhit xossalari, tashqi manba va ichki yo'qotishlar ta'sirida o'zgarishini ko'rsatadi. Chap chegarada elektr oqimi intensivligi berilgan bo'lsa, o'ng chegarada potensial nolga teng, ya'ni o'tkazgich yerga ulangan holat modellashtirildi.

Shunday qilib, Rits usuli chegaraviy masalalarni taqribiy yechishda qulay, samarali va amaliy jihatdan muhim usul ekanligi ko'rsatildi. Ushbu yondashuvdan elektr potensiali, issiqlik tarqalishi, elastiklik va diffuziya jarayonlarini modellashtirishda foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody*. Moskva: Nauka.
2. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennye metody vysshego analiza*. Moskva–Leningrad.
3. Collatz L. *The Numerical Treatment of Differential Equations*. Berlin: Springer.
4. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. Moskva: Nauka.
5. Atkinson K.E. *An Introduction to Numerical Analysis*. New York: Wiley.