DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALANI KOLLOKATSIYA USULI YORDAMIDA TAQRIBIY YECHISH

ADHAMOVA V.E.

FarDUniversiteti talabasi, adhamovavasila@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada ikkinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masalani kollokatsiya usuli yordamida taqribiy yechish masalasi ko'rib chiqilgan. Taqribiy yechimni qurishda berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy funksiya hamda bir jinsli chegaraviy shartlarga mos bazis funksiyalar tanlangan $n=4$ *hol uchun to'rtta ichki kollokatsiya nuqtada differensial tenglamaning bajarilishi talab etilib, noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilingan. Mazkur sistemani yechish natijasida masalaning taqribiy analitik yechimi aniqlangan. Olingan natijalar kolokatsiya usulining chegaraviy masalalarni yechishda samarali va amaliy jihatdan qulay usullardan biri ekanligini ko'rsatadi.*

Kalit so'zlar: oddiy differensial tenglama, chegaraviy masala, taqribiy yechim, kolokatsiya usuli, bazis funksiyalar, algebraik sistema, ichki nuqtalar

Kirish: Differensial tenglamalar nazariyasi zamonaviy amaliy matematikaning eng muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, u tabiat va jamiyatda uchraydigan ko'plab jarayonlarni matematik modellashtirishda keng qo'llanadi. Fizika, mexanika, issiqlik texnikasi, aerodinamika, iqtisodiyot, biologiya hamda muhandislik masalalarining aksariyati differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Ayniqsa, vaqt va fazoga bog'liq ravishda o'zgaruvchi jarayonlarni o'rganishda differensial tenglamalar asosiy matematik apparat vazifasini bajaradi.

Masalan, metall sterjenning qizishi va sovishi jarayonida temperatura taqsimoti issiqlik tenglamasi yordamida tavsiflanadi. Elektr zanjirlarida tok kuchining vaqt bo'yicha o'zgarishi differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Aviatsiyada samolyot qanotiga ta'sir qiluvchi havo oqimlari, tibbiyotda dorining organizm bo'ylab tarqalishi, ekologiyada atmosferadagi zararli moddalarning diffuziyasi ham differensial tenglamali modellar asosida tadqiq qilinadi. Shuningdek, iqtisodiyotda investitsiya jarayonlari va aholi soninging o'sishi kabi jarayonlarni modellashtirishda ham differensial tenglamalardan foydalaniladi.

Amaliy masalalarda differensial tenglamalar ko‘pincha boshlang‘ich yoki chegaraviy shartlar bilan birgalikda qaraladi. Ayniqsa, chegaraviy masalalar fizik va texnik jarayonlarni modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Masalan, issiqlik almashinuvi masalalarida jismning chegaralaridagi temperatura qiymatlari ma’lum bo‘lsa, sterjen yoki plastina ichidagi temperatura taqsimotini aniqlash chegaraviy masalaga olib keladi. Qurilish mexanikasida esa balka yoki konstruksiyaning ikki uchidagi mahkamlanish shartlari asosida uning egilishi aniqlanadi.

Biroq ko‘plab differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarning analitik yechimlarini aniq ko‘rinishda topish murakkab yoki umuman mumkin emas. Shu sababli bunday masalalarni taqribiy va sonli usullar yordamida yechish zamonaviy hisoblash matematikasining dolzarb yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Hozirgi kunda chekli ayirmalar usuli, Galerkin usuli, Ritz usuli, chekli elementlar usuli hamda kollokatsiya usuli kabi samarali metodlar keng qo‘llanilmoqda.

Mazkur usullar orasida kollokatsiya usuli o‘zining hisoblash qulayligi va yuqori aniqlikka erishish imkoniyati bilan ajralib turadi. Ushbu usulda izlanayotgan yechim maxsus tanlangan bazis funksiyalar orqali approksimatsiya qilinadi va differensial tenglama ma’lum kollokatsiya nuqtalarida aynan bajarilishi talab qilinadi. Natijada differensial tenglamali masala algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu esa kompyuter yordamida hisoblashlarni samarali tashkil etish imkonini beradi.

Kollokatsiya usulining amaliy ahamiyati juda katta. Masalan, avtomobil detallari ishlab chiqarishda materialning deformatsiyasini hisoblashda, issiqlik almashinuvi qurilmalarida temperatura maydonini aniqlashda yoki quvurlar orqali suyuqlik oqimini modellashtirishda ushbu usuldan foydalanish mumkin. Ayniqsa, murakkab geometrik shakllarga ega bo‘lgan obyektlarda analitik yechim topish qiyin bo‘lgan hollarda kollokatsiya usuli samarali natija beradi.

Mazkur maqolada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masala kollokatsiya usuli yordamida taqribiy yechiladi. Tadqiqotda $n=4$ hol qaralib, taqribiy yechim maxsus tanlangan bazis funksiyalar asosida quriladi. Kollokatsiya nuqtalari sifatida faqat ichki nuqtalarning tanlanishi differensial tenglamaning oraliq nuqtalarda bajarilishini nazorat qilish va sonli barqarorlikni ta'minlash nuqtai nazaridan asoslanadi. Natijada noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinib, masalaning taqribiy analitik yechimi olinadi.

Tadqiqot natijalari kollokatsiya usulining differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishda samarali, qulay va amaliy jihatdan muhim usullardan biri ekanligini ko'rsatadi. Ushbu yondashuvni kelgusida nolinear differensial tenglamalar, yuqori tartibli operatorlar hamda murakkab muhandislik masalalarini yechishga tatbiq etish mumkin.

Masalaning qo'yilishi: Sanoat korxonalarida zararli kimyoviy moddalar yoki gazlarning quvurlar, filtrlash tizimlari hamda yopiq kanallar bo'ylab tarqalishini nazorat qilish muhim ekologik va texnologik masalalardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, gaz yoki suyuqlik tarkibidagi moddalarning diffuziya jarayoni ishlab chiqarish xavfsizligi, atrof-muhitni muhofaza qilish hamda texnologik qurilmalarning samarali ishlashida katta ahamiyatga ega.

Tasavvur qilaylik, kimyo zavodidagi tor quvur bo'ylab zararli modda tarqalmoqda. Quvurning chap qismida modda tashqi manba orqali uzatiladi, o'ng qismida esa filtr yoki absorber qurilma o'rnatilgan bo'lib, moddaning konsentratsiyasi ma'lum qiymatda ushlab turiladi. Moddaning quvur bo'ylab tarqalishi diffuziya va tashqi oqim ta'sirida sodir bo'ladi.

Quvurdagi modda konsentratsiyasini $y(x)$ orqali belgilaymiz. Bu yerda x — quvur bo'ylab koordinata, $y(x)$ esa shu nuqtadagi zararli modda konsentratsiyasi hisoblanadi. Moddaning tarqalish jarayonini soddalashtirilgan holda quyidagi differensial tenglama orqali ifodalash mumkin:

$$y'' - xy' + 2y = x + 1, \qquad 0.9 \le x \le 1.2,$$

Bu tenglamadagi y'' had moddaning diffuziya jarayonini, ya'ni yuqori konsentratsiyali hududdan past konsentratsiyali hududga tarqalishini; $-xy'$ had tashqi oqim yoki muhit harakati ta'sirini; $2y$ had esa moddaning parchalanishi, yutilishi yoki kimyoviy reaksiyaga kirishishini ifodalaydi; $x+1$ esa quvur bo‘ylab joylashgan tashqi manba intensivligini bildiradi.

Jarayon uchun quyidagi chegaraviy shartlar berilgan:

$$y(0.9)-0.5y'(0.9)=2,\ y(1.2)=1.$$

Birinchi shart quvurning chap chegarasida modda konsentratsiyasi va oqim tezligi orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Bu hol real texnologik tizimlarda modda tashqi rezervuardan quvurga uzatilayotgan jarayonlarga mos keladi. Ikkinchi shart esa quvurning o‘ng uchida filtr qurilmasi ishlayotgani sababli modda konsentratsiyasi doimiy qiymatda ushlab turilishini bildiradi.

Mazkur masalaning asosiy maqsadi — quvur bo‘ylab zararli modda konsentratsiyasining taqsimotini aniqlashdir. Biroq differensial tenglamaning analitik yechimini topish murakkab bo‘lgani sababli, masalani kollokatsiya usuli yordamida taqribiy yechish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Kollokatsiya usuli orqali izlanayotgan yechim maxsus bazis funksiyalar yordamida approksimatsiya qilinadi va differensial tenglama tanlangan ichki nuqtalarda aynan bajarilishi talab qilinadi. Natijada fizik jarayonni tavsiflovchi differensial model algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi va kompyuter yordamida hisoblash imkoniyati yuzaga keladi.

Shunday qilib, qaralayotgan chegaraviy masala diffuziya jarayonlari, ekologik monitoring, gazlarni filtrlash tizimlari hamda kimyoviy texnologiyalarda uchraydigan real jarayonlarning soddalashtirilgan matematik modeli sifatida talqin qilinishi mumkin.

Ushbu masala quyidagicha differensial tenglama uchun qo’yilga chegaraviy masalani qarashimiz bilan ustma-ust tushadi:

$$\begin{cases} y''-xy'+2y=x+1, & 0.9\le x\le 1.2, \\ y(0.9)-0.5y'(0.9)=2, \\ y(1.2)=1. \end{cases}$$

Bu yerda differensial operator

$$L[y]=y''-xy'+2y$$

ko‘rinishda aniqlangan bo‘lib, masala

$$L[y] = x + 1$$

ko‘rinishga ega.

Mazkur masalani kolokatsiya usuli asosida taqribiy yechish talab etiladi.

Kolokatsiya usulining nazariy asoslari

Umumiy holda, ikkinchi tartibli differensial operator uchun chegaraviy masala quyidagi ko‘rinishda qaraladi:

$$L[y] = f(x), \qquad a \le x \le b$$

chegaraviy shartlar esa

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A, \qquad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B$$

ko‘rinishda beriladi.

Kollokatsiya usulida taqribiy yechim

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x)$$

ko‘rinishda izlanadi. Bu yerda $\varphi_0(x)$ funksiya berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi, $\varphi_i(x)$ funksiyalar esa bir jinsli chegaraviy shartlarni bajaradi, ya’ni

$$\alpha_1 \varphi_i(a) + \alpha_2 \varphi'_i(a) = 0, \qquad \beta_1 \varphi_i(b) + \beta_2 \varphi'_i(b) = 0$$

Taqribiy yechim differensial tenglamaga qo‘yilgandan so‘ng qoldiq funksiya hosil bo‘ladi:

$$R(x) = L[y_n(x)] - f(x)$$

Kollokatsiya usuliga muvofiq, qoldiq funksiyaning tanlangan $x_1, x_2, ..., x_n$ nuqtalarda nolga teng bo‘lishi talab etiladi:

$$R(x_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Natijada noma’lum $C_1, C_2, ..., C_n$ koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

Avvalo berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_0(x)$ funksiyani aniqlaymiz. Uni chiziqli ko‘rinishda tanlaymiz:

$$\varphi_0(x) = kx + b$$

Bu funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirishi lozim:

$$\varphi_0(0.9) - 0.5\varphi_0'(0.9) = 2, \qquad \varphi_0(1.2) = 1$$

ekanligini hisobga olib, quyidagi algebraik sistemaga ega bo‘lamiz:

$$0.9k + b - 0.5k = 2, \qquad 1.2k + b = 1$$

Soddalashtirishdan so‘ng

$$0.4k + b = 2, \qquad 1.2k + b = 1$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Ushbu sistemani yechib,

$$k = -1.25, \qquad b = 2.5$$

qiymatlar topiladi. Shunday qilib,

$$\varphi_0(x) = -1.25x + 2.5$$

Endi bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi bazis funksiyalarni tanlaymiz:

$$\varphi_1(x) = (x-1.2)(x-0.9)^2$$

$$\varphi_2(x) = (x-1.2)(x-0.9)^3$$

$$\varphi_3(x) = (x-1.2)(x-0.9)^4$$

$$\varphi_4(x) = (x-1.2)(x-0.9)^5$$

Mazkur funksiyalar uchun

$$\varphi_i(1.2) = 0, \qquad \varphi_i(0.9) = 0, \qquad \varphi'_i(0.9) = 0$$

bo‘lishi sababli ular

$$\varphi_i(0.9) - 0.5\varphi'_i(0.9) = 0, \qquad \varphi_i(1.2) = 0$$

bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, izlanayotgan taqribiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y_4(x) = -1.25x + 2.5 + C_1(x-1.2)(x-0.9)^2 + C_2(x-1.2)(x-0.9)^3 +$$

$$+C_3(x-1.2)(x-0.9)^4 + C_4(x-1.2)(x-0.9)^5$$

Hosilalarni aniqlash

Umumiy holda

$$\varphi_i(x) = (x-1.2)(x-0.9)^{i+1}, \qquad i = 1,2,3,4$$

bo‘lsa, uning birinchi hosilasi

$$\varphi'_i(x) = (x-0.9)^{i+1} + (i+1)(x-1.2)(x-0.9)^i$$

va ikkinchi hosilasi

$$\varphi''_i(x) = 2(i+1)(x-0.9)^i + i(i+1)(x-1.2)(x-0.9)^{i-1}$$

ga teng bo‘ladi.

Shu sababli

$$L[\varphi_i](x) = \varphi''_i(x) - x\varphi'_i(x) + 2\varphi_i(x)$$

ifoda orqali hisoblanadi.

Bundan tashqari, $\varphi_0(x)$ uchun

$$\varphi'_0(x) = -1.25, \qquad \varphi''_0(x) = 0$$

bo‘lib,

$$L[\varphi_0](x) = \varphi''_0(x) - x\varphi'_0(x) + 2\varphi_0(x) = 0 - x(-1.25) + 2(-1.25x + 2.5) = 5 - 1.25x$$

ifoda kelib chiqadi.

Mazkur ishda kolokatsiya nuqtalari sifatida faqat ichki nuqtalar tanlanadi. [0.9; 1.2]kesma 5 teng qismga ajratiladi:

$$h = \frac{1.2 - 0.9}{5} = 0.06$$

Shunda ichki kollokatsiya nuqtalari quyidagicha aniqlanadi:

$$x_1 = 0.96, \qquad x_2 = 1.02, \qquad x_3 = 1.08, \qquad x_4 = 1.14$$

Kollokatsiya usuliga ko‘ra, taqribiy yechim differensial tenglamani aynan shu nuqtalarda qanoatlantirishi kerak:

$$L[y_4](x_k) = x_k + 1, \qquad k = 1,2,3,4$$

Bundan

$$L[\varphi_0](x_k) + \sum_{i=1}^{4} C_i L[\varphi_i](x_k) = x_k + 1$$

va natijada

$$\sum_{i=1}^{4} C_i L[\varphi_i](x_k) = x_k + 1 - L[\varphi_0](x_k)$$

hosil bo‘ladi. $L[\varphi_0](x_k) = (5 - 1.25x_k)$ ekanligini e’tiborga olib,

$$\sum_{i=1}^{4} C_i L[\varphi_i](x_k) = x_k + 1 - (5 - 1.25x_k) = 2.25x_k - 4$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Tanlangan to‘rtta ichki kollokatsiya nuqtada tegishli hisoblashlarni bajarish natijasida noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan quyidagi algebraik sistema hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} -0.217536C_1 - 0.06262272C_2 - 0.0084595968C_3 - 0.000893389824C_4 = -1.84, \\ 0.144192C_1 - 0.03765312C_2 - 0.0162971136C_3 - 0.003991182336C_4 = -1.705, \\ 0.483888C_1 + 0.06969888C_2 + 0.0016376256C_3 - 0.003068378496C_4 = -1.57, \\ 0.800256C_1 + 0.25360128C_2 + 0.0687218688C_3 + 0.016720183296C_4 = -1.435. \end{cases}$$

Mazkur sistemani yechish natijasida quyidagi qiymatlar aniqlanadi:

$$C_1 \approx -18.439, \qquad C_2 \approx 184.460, \qquad C_3 \approx -817.214, \qquad C_4 \approx 1357.755$$

Masalaning taqribiy yechimi

Topilgan koeffitsiyentlarni taqribiy yechim ifodasiga qo‘yib, quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

$$y_4(x) = -1.25x + 2.5 - 18.439(x-1.2)(x-0.9)^2 + 184.460(x-1.2)(x-0.9)^3 -$$

$$-817.214(x-1.2)(x-0.9)^4 + 1357.755(x-1.2)(x-0.9)^5$$

Hosil qilingan taqribiy yechim berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi:

$$y_4(0.9) - 0.5y_4'(0.9) = 2, \qquad y_4(1.2) = 1$$

Bundan tashqari, mazkur yechim differensial tenglamani tanlangan ichki kollokatsiya nuqtalarda ham qanoatlantiradi.

Natijalar muhokamasi: Kollokatsiya usulining asosiy afzalliklaridan biri shundaki, u differensial tenglamali masalani algebraik tenglamalar sistemasiga keltirib beradi. Mazkur misolda ham aynan shunday hol kuzatildi. Taqribiy yechimning qurilishi uchun tanlangan bazis funksiyalar chegaraviy shartlarni avtomatik ravishda qanoatlantirgani sababli noma’lum koeffitsiyentlarni aniqlash jarayoni soddalashdi.

Bundan tashqari, kollokatsiya nuqtalarining faqat ichki nuqtalardan tanlanishi metodik jihatdan asosli hisoblanadi. Chunki chegaraviy nuqtalarda masala shartlari allaqachon berilgan bo‘ladi, differensial tenglama esa asosan oraliq nuqtalarda taqribiy bajarilishi nazorat qilinadi.

Hisoblash natijalaridan ko‘rinadiki, bazis funksiyalar darajasi ortgan sari koeffitsiyentlarning miqdori ham sezilarli ravishda kattalashadi. Bu holat usulning amaliy qo‘llanishida hisoblash aniqligi va sonli barqarorlikni inobatga olish zarurligini ko‘rsatadi. Shu bois yuqori tartibli yaqinlashishlarda kolokatsiya nuqtalarini tanlash va bazis funksiyalarni tanlash masalalari muhim ahamiyat kasb etadi.

Xulosa: Ushbu ishda ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masala kollokatsiya usuli yordamida taqribiy yechildi. Avvalo berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_0(x)$ funksiya aniqlandi. So‘ngra bir jinsli chegaraviy shartlarga mos bazis funksiyalar tanlandi va $n=4$ hol uchun taqribiy yechim qurildi.

Kollokatsiya nuqtalari sifatida $[0.9;1.2]$ oraliqdagi to‘rtta ichki nuqta tanlandi. Ushbu nuqtalarda differensial tenglamaning bajarilishi talab qilinishi natijasida noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan to‘rtta algebraik tenglamadan iborat sistema hosil qilindi. Sistemani yechish orqali taqribiy yechimning koeffitsiyentlari topildi.

Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, kollokatsiya usuli chegaraviy masalalarni differensial tenglama ko‘rinishidan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish imkonini beradi. Bu esa hisoblash jarayonini soddalashtiradi va masalani kompyuter yordamida samarali yechishga sharoit yaratadi.

Mazkur masala diffuziya jarayonlarining soddalashtirilgan modeli sifatida qaralganda, topilgan taqribiy yechim quvur yoki muhit bo‘ylab modda konsentratsiyasining taqsimotini ifodalaydi. Natijalar diffuziya, tashqi oqim va yutilish jarayonlari ta’sirida konsentratsiya oraliq bo‘ylab bir tekis emas, balki o‘zgaruvchan xarakterga ega bo‘lishini ko‘rsatadi.

Shunday qilib, kollokatsiya usuli differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarni yechishda qulay, tushunarli va amaliy jihatdan samarali taqribiy usul hisoblanadi. Ushbu yondashuvni kelgusida nolinear tenglamalar, yuqori tartibli differensial operatorlar hamda murakkab diffuziya jarayonlarini modellashtirishda qo‘llash mumkin.

Tadqiqot natijalari kollokatsiya usulining differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarni yechishda qulay, mantiqiy va samarali taqribiy usullardan biri ekanligini tasdiqlaydi. Ushbu yondashuvni kelgusida murakkabroq operatorlar, nolinear tenglamalar hamda yuqori tartibli chegaraviy masalalarga tatbiq etish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Samarskiy, A. A., & Gulin, A. V. (1989). *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow: Nauka.
2. Kantorovich, L. V., & Krylov, V. I. (1952). *Priblizhennye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow–Leningrad.
3. Collatz, L. (1960). *The Numerical Treatment of Differential Equations*. Berlin: Springer.
4. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (1977). *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka.
5. Islomov, T., & Sotvoldiyev, O. (2010). *Oddiy differensial tenglamalar va ularni yechish usullari*. Toshkent.
6. Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
7. Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics*. Berlin: Springer.
8. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis*. Boston: Brooks/Cole.
9. Ascher, U. M., Mattheij, R. M. M., & Russell, R. D. (1995). *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Philadelphia: SIAM.
10. Stoer, J., & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. New York: Springer.