

IKKI O‘LCHAMLI ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK TENGLAMASINING MATEMATIK MODELI VA SONLI YECHISH USULLARI

ISMOILOV A.I., XATAMOVA F.S.

FarDU dotsenti, ismoilovaxrorjon@yandex.com

FarDU talabasi, fotimaxonxatamova28@gmail.com

Annotatsiya .Mazkur maqolada issiqlik almashinuvi jarayonlari, issiqlik uzatish mexanizmlari va ikki o‘lchamli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining matematik modeli ilmiy asosda tahlil qilingan. Furiye qonuni asosida tenglamaning hosil qilinishi, boshlang‘ich va chegaraviy shartlari hamda sonli yechish usullari, xususan chekli ayirmalar usuli ko‘rib chiqilgan. Tadqiqot natijalari sanoat, energetika, qurilish va mikroelektronika sohalorida issiqlik jarayonlarini samarali modellashtirish uchun muhim nazariy asos yaratadi.

Kalit so‘zlar: issiqlik almashinuvi, issiqlik o‘tkazuvchanlik, Furiye qonuni, ikki o‘lchamli model, differensial tenglama, sonli yechish usullari, chekli ayirmalar usuli, matematik modellashtirish.

KIRISH. Tabiat va texnika olamida issiqlik almashinuvi jarayonlari eng ko‘p uchraydigan fundamental hodisalardan biri hisoblanadi. Har qanday moddiy tizimda haroratning fazoviy notekis taqsimlanishi natijasida energiya yuqori temperaturali hududlardan past temperaturali hududlarga uzatiladi. Issiqlik uzatish — haroratlarning farqi mavjud bo‘lganda energiyaning issiqlik shaklida yuqori haroratli qismdan past haroratli qismga o‘tish jarayonidir. Bu jarayon termodinamikaning ikkinchi qonuniga bo‘ysunadi va koinotdagi barcha tabiiy hamda sun‘iy tizimlarda, yulduzlar evolyutsiyasidan tortib, kompyuter mikroprotssessorlarini sovutishgacha fundamental rol o‘ynaydi. Termodinamika tizimning faqat boshlang‘ich va yakuniy muvozanat holatlarini o‘rgansa, issiqlik uzatish fani jarayonning vaqt davomida qanday tezlikda sodir bo‘lishini tadqiq etadi. Ushbu jarayon issiqlik o‘tkazuvchanlik deb ataladi va u klassik matematik fizikaning asosiy tadqiqot obyektlaridan biri sifatida qaraladi. Ayniqsa, ikki o‘lchamli geometrik sohalarda issiqlik tarqalishini o‘rganish sanoat texnologiyalari, elektronika, qurilish konstruksiyalari, metallurgiya, energetika va geofizik modellashtirishda katta ilmiy-amaliy ahamiyatga ega. Issiqlik o‘tkazuvchanlik

jarayonining matematik modeli birinchi navbatda fransuz olimi Jozef Furiye tomonidan ishlab chiqilgan klassik qonunga asoslanadi. Furiye qonuni issiqlik oqimining intensivligi harorat gradientiga to'g'ri proporsional ekanligini ifodalaydi. Issiqlik Uzatishning Uch Ustuni, mexanizmlar va qonunlar tabiatda issiqlik energiyasi uchta fundamental mexanizm orqali uzatiladi: konduksiya, konveksiya va radiatsiya. Konduksiya -Issiqlik o'tkazuvchanlik. Konduksiya — modda zarralarining atomlar, molekular va erkin elektronlar bevosita to'qnashuvi va mikroskopik tebranishi natijasida energiyaning ko'chishi. Bu jarayonda moddaning makroskopik (ko'zga ko'rinadigan) harakati sodir bo'lmaydi. Konduksiya asosan qattiq jismlarda, shuningdek, turg'un suyuqlik va gazlarda kuzatiladi. Fransuz matematigi Jan Batist Furiye tomonidan taklif etilgan qonunga ko'ra, issiqlik oqimining zichligi harorat gradientiga to'g'ri proporsional, lekin issiqlik oqimi harorat kamayishi tomonga yo'nalgani sababli formula oldiga minus ishorasi qo'yiladi. Bir o'lchamli holat uchun Furiye qonuni:

$$q = -k\Delta u$$

bu yerda: q — issiqlik oqimi, k — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti, u — harorat funksiyasi.

Energiya saqlanish qonuni bilan birlashtirilganda, ikki o'lchamli vaqtga bog'liq issiqlik tenglamasi hosil bo'ladi: Bu tenglama parabolik turdagi xususiy hosilali differensial tenglama bo'lib, vaqt bo'yicha harorat evolyutsiyasini ifodalaydi. Bu yerda issiqlik oqimi vektori q moddaning birlik yuzasidan o'tuvchi issiqlik energiyasi miqdorini bildiradi, k esa muhitning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti bo'lib, materialning fizik xossalarini tavsiflaydi. $u(x,y,t)$ funksiya esa fazo va vaqt bo'yicha harorat taqsimotini ifodalaydi. Tenglamadagi manfiy ishora issiqlik energiyasining harorat kamayishi yo'nalishida tarqalishini ko'rsatadi. Bu fizik jihatdan termodinamik muvozanatga intilish qonuniyatini ifodalaydi. Ikki o'lchamli koordinatalar sistemasida Furiye qonuni komponent ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$q_x = -k \frac{\partial u}{\partial x}, q_y = -k \frac{\partial u}{\partial y}$$

Bu formulalar x va y yoʻnalishlarida issiqlik oqimining taqsimlanishini tavsiflaydi. Shunday qilib, harorat maydonining oʻzgarishi fazodagi gradient orqali belgilanadi. Issiqlik oʻtkazuvchanlik tenglamasining toʻliq matematik modeli energiya saqlanish qonuni bilan Furrye qonunini birlashtirish orqali hosil qilinadi. Elementar hajm uchun energiya balansini koʻrib chiqamiz: tizimga kirayotgan issiqlik, undan chiqayotgan issiqlik va ichki issiqlik manbalari orasidagi farq ushbu hajmdagi ichki energiya oʻzgarishiga teng boʻladi. Natijada quyidagi umumiy differensial tenglama hosil boʻladi:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Q(x, y, t)$$

bu yerda: ρ — moddaning zichligi, c — solishtirma issiqlik sigʻimi, $Q(x, y, t)$ — ichki issiqlik manbalari funksiyasi.

Agar muhit bir jinsli va izotrop deb faraz qilinsa, yaʼni k oʻzgarmas boʻlsa, issiqlik tarqalish koeffitsienti:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

kiritiladi va tenglama quyidagi klassik koʻrinishga keladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t)$$

Mazkur tenglama ikki oʻlchamli parabolik turdagi xususiy hosilali differensial tenglama boʻlib, vaqt davomida harorat maydonining evolyutsiyasini ifodalaydi. Bu yerda Laplas operatori:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

haroratning fazoviy tarqalish intensivligini belgilaydi.

Parabolik tipdagi ushbu tenglama diffuziya xarakteriga ega bo‘lib, vaqt o‘tishi bilan tizimning termik muvozanatga yaqinlashishini ifodalaydi. Matematik nuqtai nazardan, u boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan birgalikda to‘liq qo‘yiladi. Boshlang‘ich shart jismning dastlabki harorat holatini, chegaraviy shartlar esa tashqi muhit bilan o‘zaro ta‘sirini aniqlaydi. Dirixle shartlari chegaradagi haroratni, Neyman shartlari issiqlik oqimini, Robin shartlari esa konvektiv almashinuvni tavsiflaydi. Ikki o‘lchamli issiqlik o‘tkazuvchanlik modeli real amaliy masalalarda nihoyatda muhimdir. Ikki o‘lchamli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining matematik modeli

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi Furiye qonuni asosida hosil qilinadi. Furiye qonuniga ko‘ra, issiqlik oqimi harorat gradientiga proporsional:

Konveksiya — issiqlikning suyuqlik yoki gaz qatlamlarining makroskopik harakati (oqimi) hisobiga uzatilishidir. Konveksiya ikki turga bo‘linadi:

1. Tabiiy konveksiya: Issiq va sovuq qatlamlar o‘rtasidagi zichliklar farqi (Arximed kuchi) hisobiga yuzaga keladi (masalan, xonadagi isitish batareyasidan havoning ko‘tarilishi).

2. Majburiy konveksiya: Tashqi kuchlar (nasos, ventilyator, shamol) yordamida oqim hosil qilinadi.

Konvektiv issiqlik almashinuvini tavsiflash uchun Nyuton-Rixman qonuni qo‘llaniladi:

$$Q = \alpha A(T_s - T_\infty)$$

Bu yerda: Q - umumiy issiqlik oqimi α - konvektiv issiqlik uzatish koeffitsiyenti. Bu o‘zgarmas kattalik bo‘lmay, oqim tezligi, suyuqlik qovushqoqligi va sirt shakliga bog‘liq. A - issiqlik almashinuv sirtining yuzasi T_s va T_∞ - mos ravishda jism sirti va undan uzoqdagi muhit harorati Radiatsiya -nurli issiqlik uzatish. Radiatsiya — energiyaning elektromagnit to‘lqinlar ko‘rinishida tarqalishidir. Boshqa ikki mexanizmdan farqli o‘laroq, radiatsiya uchun moddiy muhit talab qilinmaydi — u mutloq vakuumda ham tarqaladi ,masalan, Quyosh energiyasining Yerga yetib

kelishi. Har qanday absolyut noldan $0K$ yuqori haroratga ega jism nurlanadi. Real jismlarning nurlanish qobiliyati Stefan-Boltsman qonuni bilan aniqlanadi:

$$Q = \varepsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$

Bu yerda: ε - jismning qoralik darajasi, 0 dan 1 gacha σ - Stefan-Boltsman doimiysi,

$$\sigma \approx 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

T_1, T_2 - nurlantiruvchi va qabul qiluvchi muhitning absolyut haroratlari. Formuladan ko'rinib turibdiki, harorat ortishi bilan radiatsiya effekti keskin, to'rtinchi darajada kuchayadi.

Ikki O'lchamli Issiqlik O'tkazuvchanlik Tenglamasining matematik modeli Amaliy muhandislikda, masalan, binolar devorlari orqali issiqlik yo'qotilishi, metall plitalarni payvandlash yoki mikrosxemalarni loyihalashda, issiqlik faqat bir yo'nalishda emas, balki tekislik bo'ylab x va y o'qlari tarqaladi. Bu jarayonni ifodalash uchun energiya saqlanish qonuniga asoslangan xususiy hosilali differensial tenglama tuziladi.

Doimiy issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti λ va ichki issiqlik manbai q_v mavjud bo'lgan nostatsionar vaqtga bog'liq ikki o'lchamli holat uchun umumiy tenglama quyidagicha: Matematik qulaylik uchun jismning temperatura o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti

$$pc_p \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q_v$$

kiritilsa, tenglama quyidagi klassik ko'rinishga keladi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q_v}{pc_p}$$

Fizik ma'nosi: $\frac{\partial T}{\partial t}$ - haroratning vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ - Laplas operatori, haroratning faza bo'yicha egriligini ko'rsatadi. q_v - ichki issiqlik manbai, masalan, tok o'tganda simning qizishi yoki kimyoviy reaksiya issiqligi.

Ushbu differensial tenglamani aniq bir masala uchun yechishda jarayonning xarakteriga ko‘ra quyidagi xususiy hollar ajratiladi:

1. Puasson tenglamasi statsionar holat. Agar vaqt o‘tishi bilan harorat maydoni o‘zgarmay qolsa $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ muvozanat yuzaga keladi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q_v}{pc_p} = 0$$

2. Laplas tenglamasi: Agar statsionar holatda jism ichida hech qanday qo‘shimcha issiqlik manbayi ham bo‘lmasa $q_v = 0$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

Real hayotdagi masalalarni yechish uchun ushbu tenglamalarga qo‘shimcha ravishda boshlang‘ich shartlar jarayon boshidagi harorat va chegaraviy shartlar jism sirtida atrof-muhit bilan qanday issiqlik almashinuvi ketayotgani — Dirixle, Neyman yoki Riman shartlari berilishi shart.

Issiqlik uzatish jarayonlarini o‘rganish va ularni matematik modellashtirish zamonaviy texnologiyalarning poydevoridir. Furiye, Nyuton-Rixman va Stefan-Boltsman qonunlari fundamental mexanizmlarni ochib bersa, ikki o‘lchamli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi murakkab tizimlardagi harorat maydonlarini aniq bashorat qilish imkonini beradi. Bugungi kunda ushbu tenglamalar kompyuter injiniringida chekli elementlar yoki chekli ayirmalar usuli yordamida sonli yechilib, aerokosmik texnika, energetika va mikroelektronika sohalarida xavfsiz hamda samarali qurilmalar yaratishda keng qo‘llanilmoqda.

Xulosa. Xulosa qilib aytganda, issiqlik uzatish jarayonlari tabiat va texnik tizimlarda eng muhim fizik hodisalardan biri bo‘lib, ular konduksiya, konveksiya va radiatsiya mexanizmlari orqali amalga oshadi. Ushbu jarayonlarning nazariy asoslari Furiye, Nyuton-Rixman va Stefan-Boltsman qonunlari orqali ifodalanadi hamda har bir mexanizm energiya almashinuvining o‘ziga xos shaklini tavsiflaydi. Ayniqsa, konduksiya jarayonini ifodalovchi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi matematik fizikaning fundamental modellaridan biri sifatida katta ilmiy ahamiyatga ega. Ikki

o‘lchamli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi murakkab geometrik sohalarda harorat maydonining fazoviy-vaqt bo‘yicha evolyutsiyasini aniqlash imkonini beradi. Mazkur model energiya saqlanish qonuni va Furrye qonunining birlashtirilishi asosida hosil qilinib, sanoat, energetika, mikroelektronika, qurilish va geofizika kabi ko‘plab sohalarda muhim amaliy qo‘llanmalarga ega. Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar yordamida real fizik jarayonlarni modellashtirish imkoniyati esa ushbu tenglamaning universalligini yanada oshiradi. Shuningdek, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalarining analitik yechimlari ko‘plab hollarda murakkab bo‘lganligi sababli, zamonaviy sonli usullar — chekli ayirmalar, chekli elementlar va iteratsion metodlar orqali yechim olish dolzarb ilmiy yo‘nalish hisoblanadi. Bu esa yuqori aniqlikdagi modellashtirish, texnologik jarayonlarni optimallashtirish hamda energiya samaradorligini oshirishga xizmat qiladi. Demak, ikki o‘lchamli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining matematik modeli nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki zamonaviy muhandislik va texnologiyalar rivojida beqiyos ahamiyat kasb etadi. Uni chuqur o‘rganish va samarali sonli yechish usullarini ishlab chiqish ilm-fan taraqqiyotining ustuvor yo‘nalishlaridan biri bo‘lib qoladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Furrye J. Issiqlikning analitik nazariyasi. — Parij: 1822.
2. Tixonov A.N., Samarskiy A.A. Matematik fizika tenglamalari. — Moskva: Nauka, 1977.
3. Samarskiy A.A. Matematik modellashtirish va sonli usullar. — Moskva: Nauka, 1982.
4. Landau L.D., Lifshits E.M. Nazariy fizika kursi. Issiqlik fizikasi. — Moskva: Fizmatlit, 2001.
5. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. — Oxford University Press, 1959.
6. Özisik M.N. Heat Conduction. — John Wiley & Sons, New York, 1993.
7. Kreith F., Bohn M. Principles of Heat Transfer. — Cengage Learning, 2000.
8. Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. — Taylor & Francis, 2012.