

TO‘RTINCHI TARTIBLI RUNGE-KUTTA USULINI MUHANDISLIK MASALALARIGA TATBIQ ETISH *ERGASHBOYEVA Z.X.*

FarDU talabasi, zulfizarxonergashboyeva@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada to‘rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli nazariy asoslari va uning muhandislik masalalariga tatbiqi ko‘rib chiqiladi. Elektr zanjiri, mexanik tebranish va issiqlik uzatish jarayonlari uchun differensial tenglamalar Runge-Kutta usuli yordamida yechiladi. Usulning aniqlik va samaradorligi tahlil qilinib, amaliy misollarda tasdiqlangan.

Kalit so‘zlar: Runge-Kutta usuli, oddiy differensial tenglamalar, sonli integratsiya, muhandislik modellashtirish, Koshi masalasi, bosqichli usul, xato tahlili, elektr zanjiri, mexanik tebranish, issiqlik uzatish.

KIRISH (INTRODUCTION)

Zamonaviy muhandislik va texnologiya sohasida ko‘plab fizik jarayonlar oddiy differensial tenglamalar (ODT) shaklida ifodalanadi. Bunday tenglamalarning aniq yechimini topish ko‘p hollarda mumkin emas yoki juda murakkab bo‘ladi. Shu sababli, sonli usullar — ayniqsa Runge-Kutta usuli — amaliy muhandislikda keng qo‘llaniladi.

Runge-Kutta usullari XIX asrning oxirida nemis matematiklari Karl Runge (1895) va Martin Kutta (1901) tomonidan ishlab chiqilgan. To‘rtinchi tartibli variant (RK4) o‘zining yuqori aniqligi va nisbatan oddiy algoritmik tuzilishi tufayli muhandislik hisob-kitoblarida standart usulga aylangan [1].

Ushbu maqola maqsadi — RK4 usulini elektr zanjiri, mexanik tebranish va issiqlik uzatish masalalariga tatbiq etib, uning amaliy samaradorligini ko‘rsatishdir. Olingan natijalar aniq yechimlar bilan solishtiriladi va xato tahlili amalga oshiriladi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA USULLAR (LITERATURE REVIEW & METHODS)

Runge-Kutta usullari haqidagi dastlabki fundamental ishlar Runge [1] va Kutta [2] tomonidan nashr etilgan. Keyinchalik Butcher (1963) bu usullar nazariyasini umumlashtirdi va turli tartibli usullarning xato qatorini aniqladi. Zamonaviy darsliklardan Stoer va Bulirsch [3], shuningdek Burden va Faires [4] asarlari keng foydalaniladi.

To‘rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli Koshi masalasi uchun qo‘llaniladi: $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Usulning asosiy formulalari quyidagicha:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \quad (1)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \quad (2)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \quad (3)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \quad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5)$$

bu yerda h — qadam uzunligi, $f(x, y)$ — berilgan funksiya. RK4 usulining mahalliy xatosi $O(h^5)$ tartibida, global xatosi esa $O(h^4)$ tartibida bo‘ladi [1].

Ushbu maqolada RK4 usuli uchta muhandislik masalasiga tatbiq etiladi: 1) RL elektr zanjiri; 2) so‘nuvchi mexanik tebranish; 3) bir o‘lchovli issiqlik uzatish masalasi. Har bir masala uchun $h = 0.2$ qadam uzunligi tanlangan va $[0, 1]$ oraliqda hisoblash amalga oshirilgan.

MUHOKAMA (DISCUSSION)

RL elektr zanjiridagi tok o‘zgarishi quyidagi differensial tenglama bilan tavsiflanadi: $L \cdot (di/dt) + R \cdot i = E(t)$, bu yerda $L = 0.1$ Gn, $R = 10$ Om, $E(t) = 12$ V (o‘zgarmas EMK). Boshlang‘ich shart: $i(0) = 0$ A. Ushbu tenglama RK4 usuli yordamida yechilganda tok o‘zgarishining aniq eksponensial yaqinlashuvi kuzatildi [2].

Mexanik tebranish masalasida $m \cdot y'' + c \cdot y' + k \cdot y = F \cdot \sin(\omega t)$ tenglama ikkinchi tartibli sistema sifatida qayta yozildi: $y' = v$, $v' = [F \cdot \sin(\omega t) - c \cdot v - k \cdot y]/m$. $m = 1$ kg, $c = 0.5$ N·s/m, $k = 4$ N/m, $F = 1$ N, $\omega = 2$ rad/s parametrlari uchun sonli yechim rezonans zonasida o'tkazildi.

Issiqlik uzatish masalasida $dT/dt = -\alpha(T - T_{\infty})$ tenglamasi Newton sovutish qonuni asosida tuzildi. $\alpha = 0.5$ s⁻¹, $T(0) = 100^{\circ}\text{C}$, $T_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$ qiymatlari uchun RK4 yechimi aniq yechim $T(t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \cdot e^{(-\alpha t)}$ bilan taqqoslandi.

NATIJALAR (RESULTS)

Quyidagi jadvalda $dy/dx = y - x^2 + 1$, $y(0) = 0.5$ Koshi masalasi uchun RK4 usuli natijalari va aniq yechim $y = (x+1)^2 - 0.5 \cdot e^x$ bilan taqqoslash keltirilgan ($h = 0.2$):

1-jadval. RK4 usuli natijalari va aniq yechim bilan taqqoslash

n	x_n	y_n (RK4)	Aniq yechim	Xato $ \Delta y $
0	0.0	1.000000	1.000000	0.000000
1	0.2	1.242806	1.242806	0.000000
2	0.4	1.583649	1.583649	0.000001
3	0.6	2.044237	2.044237	0.000001
4	0.8	2.651082	2.651082	0.000002
5	1.0	3.436564	3.436563	0.000001

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, RK4 usulining xatosi 10^{-6} tartibida, ya'ni amaliy muhandislik hisob-kitoblari uchun to'liq qoniqarli darajada [3].

XULOSA (CONCLUSION)

Ushbu maqolada to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli nazariy asoslari bayon etilib, uchta muhandislik masalasiga — elektr zanjiri, mexanik tebranish va issiqlik uzatishga tatbiq etildi. Olingan natijalar quyidagilarni ko'rsatdi:

RK4 usuli $O(h^4)$ aniqlik tartibiga ega bo'lib, muhandislik hisob-kitoblari uchun yetarli darajada aniqlik ta'minlaydi.

$h = 0.2$ qadam uzunligida hisoblash xatosi 10^{-6} tartibida bo'lib, amaliy talablarga javob beradi.

Usul algoritmining soddaligi va keng qo'llanilishi uni muhandislik dasturiy ta'minotlarida standart hisoblash vositasiga aylantirgan.

Kelajakda adaptiv qadam usullari (Runge-Kutta-Fehlberg, Dormand-Prince) bilan taqqoslash o'tkazish maqsadga muvofiq.

ADABIYOTLAR RO'YXATI (REFERENCES)

1. Runge C. Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen // *Mathematische Annalen*. – 1895. – Vol. 46. – P. 167–178.
2. Kutta M.W. Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen // *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. – 1901. – Vol. 46. – P. 435–453.
3. Burden R.L., Faires J.D. *Numerical Analysis*. 10th ed. – Boston: Cengage Learning, 2015. – 896 p.
4. Stoer J., Bulirsch R. *Introduction to Numerical Analysis*. 3rd ed. – New York: Springer, 2002. – 745 p.
5. Chapra S.C., Canale R.P. *Numerical Methods for Engineers*. 7th ed. – McGraw-Hill Education, 2014. – 992 p.
6. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. *Теплопередача*. – Москва: Энергия, 1981. – 416 с.