

YOPIQ XONADA ISSIQLIKNING STATSIONAR TARQALISHI: LAPLAS TENGLAMASI VA CHEKLI FARQLAR METODI YOQUBJONOVA X.G'., MUROJIDDINOVA S.Z.

FarDU talabalari,

yoqubjonovahayotxon0@gmail.com, murojiddinovasaodatxon@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada yopiq to'rtburchak xonada statsionar issiqlik tarqalishining matematik modeli Laplas tenglamasi asosida qurilgan va chekli farqlar metodi (CFM) yordamida raqamli yechim olingan. Zamonaviy qurilish muhandisligida binolarning isitish va sovitish tizimlarini loyihalashda ichki muhit temperaturasini oldindan aniq bashorat qilish muhim ahamiyat kasb etadi. Aynan shu ehtiyojdan kelib chiqib, ikki o'lchovli statsionar issiqlik o'tkazuvchanlik masalasi to'liq matematik qo'yilish bilan taqdim etilgan: soha, chegaraviy shartlar va fizikaviy parametrlar aniq belgilangan. Masalada to'rtburchak xona uchun turli xil chegaraviy shartlar qo'llanilgan — chap va o'ng devorlarda Dirixle sharti (berilgan temperatura), pastki devor uchun Dirixle sharti, yuqori devor (shift) uchun esa Neyman sharti (issiqlik oqimi nolga teng, ya'ni adiabatik yuza). Bunday aralash chegaraviy shartlar real qurilish holatini to'liq aks ettiradi. Laplas operatorining garmonik funksiyalarga oid fundamental xossalari — maksimum-minimum tamoyili, o'rtacha qiymat xossasi va yechimning yagonaligi — batafsil muhokama qilingan hamda fizikaviy talqin berilgan. Differensial masalani diskretlashtirish uchun ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan markaziy chekli farqlar sxemasi qo'llanilgan. Natijada hosil bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi Gauss-Zeidel iteratsion usuli yordamida yechilgan. To'rt parametrining yechim aniqligiga ta'siri o'rganilgan va to'rt qadami ikki marta kichiklashtirilganda xatoning to'rt marta kamayishi — ya'ni $O(h^2)$ aniqlik tartibi — eksperimental tarzda tasdiqlangan. CFM natijalari Sturm-Liuvill masalasidan olinadigan aniq yechim bilan solishtirilib, maksimal mutlaq xato 0.34% tashkil etishi aniqlangan. Olingan temperatura taqsimoti jadvali tahlil qilingan: garmonik funksiyalar nazariyasiga mos ravishda eng issiq va eng sovuq nuqtalar faqat chegarada joylashganligi, xona ichida esa temperatura tekis va monoton taqsimlanganligi ko'rsatilgan. Shu asosda qo'shimcha isitish yoki sovitish qurilmalarini joylashtirishga oid amaliy tavsiyalar berilgan.

Kalit so'zlar: Laplas tenglamasi, statsionar issiqlik o'tkazuvchanlik, chekli farqlar metodi, Dirixle masalasi, Neyman sharti, Gauss-Zeidel iteratsiyasi, garmonik funksiyalar, temperatura taqsimoti, ikkinchi tartibli aniqlik, qurilish muhandisligi.

KIRISH. Binolar va yashash xonalarida issiqlik muhitini boshqarish zamonaviy energetika muhandisligining dolzarb muammolaridan biridir. Xonada issiqlik manbai bo'lgan (masalan, radiator, kompyuter, quyosh nurlari kiradigan deraza) holatlarda temperatura qanday taqsimlanishini aniq bilish muhimdir — bu konditsioner va isitish tizimlarini optimal loyihalash imkonini beradi.

Statsionar holat — ya'ni temperatura vaqt o'tishi bilan o'zgarmay qolgan rejim Laplas tenglamasi bilan tavsiflanadi. Bu tenglama matematik fizikaning asosiy tenglamalaridan biri bo'lib, uning yechimlari garmonik funksiyalar deb ataladi. Garmonik funksiyalarning o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, ular o'z sohasida maksimum va minimumga faqat chegarada erishadi (maksimum-minimum tamoyili).

Maqolaning asosiy maqsadi: (1) Laplas tenglamasining fizikaviy ma'nosini izohlab berish, (2) to'rtburchak xona uchun Dirixle masalasini to'liq qo'yish va (3) chekli farqlar metodi bilan raqamli yechim olish hamda uni tahlil qilish.

LAPLAS TENGLAMASI VA UNING TATBIQLARI

Umumiy shakl va fizikaviy kelib chiqishi. Issiqlik o'tkazuvchanlik jarayoni uchun vaqtga bog'liq umumiy tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + f(x, y, t)$$

bu yerda $u(x, y, t)$ — temperatura ($^{\circ}\text{C}$ yoki K), $\alpha = \lambda / (\rho \cdot c)$ — issiqlik diffuziya koeffitsienti (m^2/s), λ — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti ($\text{Wt}/(\text{m} \cdot \text{K})$), ρ — moddaning zichligi (kg/m^3), c — solishtirma issiqlik sig'imi ($\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$), $f(x, y, t)$ — ichki issiqlik manbalari.

Statsionar rejimda ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) va ichki manbalar yo'q bo'lganda ($f \equiv 0$) bu tenglama Laplas tenglamasiga aylanadi:

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$$

Bu tenglamaning fizikaviy ma'nosi juda chuqur: har bir nuqtadagi temperatura o'sha nuqtaning atrofidagi temperaturalarning o'rtacha qiymatiga teng bo'ladi (o'rtacha qiymat xossasi). Bu xususiyat issiqlik muvozanati holati uchun juda tabiiy — biror nuqta o'z atrofidan issiqroq yoki sovuqroq bo'la olmaydi, aks holda issiqlik oqimi hosil bo'lib, tizim muvozanat holatiga qaytadi.

Chegaraviy masalalar turlari

Laplas tenglamasi uchun quyidagi uch turdagi chegaraviy shartlar muhim ahamiyatga ega:

Tur	Matematik shart	Fizikaviy ma'no
I tur (Dirixle)	$u _{\Gamma} = \varphi(x,y)$	Chegara temperaturasi berilgan
II tur (Neyman)	$\partial u / \partial n _{\Gamma} = \psi(x,y)$	Chegara orqali issiqlik oqimi berilgan
III tur (Robin)	$\partial u / \partial n + \beta u _{\Gamma} = \chi$	Konvektiv issiqlik almashinuvi

Garmonik funksiyalar xossalari. Laplas tenglamasini qanoatlantiradigan funksiyalar (garmonik funksiyalar) bir qator muhim xossalarga ega:

1. O'rtacha qiymat tamoyili: garmonik funksiyaning har qanday nuqtadagi qiymati o'sha nuqtani o'rab turgan doiradagi (yoki sharqdagi) qiymatlarning o'rtacha qiymatiga teng.
2. Maksimum-minimum tamoyili: garmonik funksiya statsionar sohaning ichki nuqtasida maksimumga ham, minimumga ham erisha olmaydi — maksimum va minimum faqat chegarada erishiladi. Bu xossadan muhim fizikaviy xulosa kelib chiqadi: xonaning eng issiq yoki eng sovuq nuqtasi doimo devorlarda (chegarada) joylashadi.
3. Yagona yechim tamoyili: Dirixle masalasi yechimi yagona va barqarordir, ya'ni chegaraviy shartlardagi kichik o'zgarish yechimda kichik o'zgarishga olib keladi.

MASALA QO'YILISHI: TO'RTBURCHAK XONA

Geometrik model va chegaraviy shartlar. Uzunligi $a = 5$ m va kengligi $b = 4$ m bo'lgan to'rtburchak xona ko'rilsin: $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Masala ikki o'lchovli statsionar issiqlik tarqalishini tasvirlaydi — bunday yondashish binoning vertikal kesmasi uchun amaliy ahamiyatga ega.

Chegaraviy shartlar quyidagicha belgilanadi: chap devor ($x = 0$) $T_0 = 20^\circ\text{C}$ temperaturada — bu tashqaridagi havo ta'sirini modellashtiradi; pastki devor ($y = 0$) $T_1 = 18^\circ\text{C}$ — pol osti havo qatlami; o'ng devor ($x = a$) isitish radiatoridir va temperatura $x = a$ da $T_2 = 60^\circ\text{C}$; yuqori devor ($y = b$) — shiftir, Neyman sharti $\partial u / \partial y = 0$ — ya'ni issiqlik oqimi yo'q, shift yaxshi izolyatsiya qilingan.

Laplas tenglamasi va chegaraviy shartlarni birlashtirgan to'liq matematik model:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \Omega \\ u(0,y) &= 20^\circ\text{C}, \quad 0 \leq y \leq b \\ u(a,y) &= 60^\circ\text{C}, \quad 0 \leq y \leq b \\ u(x,0) &= 18^\circ\text{C}, \quad 0 \leq x \leq a \\ \partial u / \partial y(x,b) &= 0, \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

Masalaning fizikaviy talqini

Ushbu model real qurilish holatini aks ettiradi: xonaning chap devori tashqi sovuq havo bilan tutashgan (20°C), o'ng devorga yopishtirilgan radiator xonani isitadi (60°C), pol osti bo'shliqdan 18°C

da havo kirib keladi, shift esa adiabatik — ya'ni issiqlik oqimini o'tkazmaydi. Bunday model, masalan, bir tomonlama isitish tizimi o'rnatilgan yotoqxonalar yoki ofis xonalari uchun tipikdir. Masalaning yechimi bizga xonaning har qanday nuqtasidagi statsionar temperaturani aniqlash imkonini beradi va bu ma'lumot asosida konditsioner o'rnatish joyi, termometr o'rnatish nuqtasi yoki qo'shimcha issiqlik manbai zarurligini belgilash mumkin.

CHEKLI FARQLAR METODI BILAN YECHISH

Diskretlashtirish sxemasi

Chekli farqlar metodi (CFM) differensial tenglamani algebraik tenglamalar sistemasiga almashtirish g'oyasiga asoslangan. Sohani to'r bilan qoplab, har bir to'r nuqtasida hosilalarni chekli farqlar orqali ifodalash mumkin.

Soha to'rini quyidagicha kiritamiz: x bo'yicha N ta oraliq, y bo'yicha M ta oraliq, mos ravishda $h = a/N$ va $k = b/M$ qadam; to'r nuqtalari $(x_i, y_j) = (i \cdot h, j \cdot k)$, $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$.

Ikkinchi tartibli hosilalar uchun markaziy chekli farqlar formulasi:

$$\partial^2 u / \partial x^2 \approx (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) / h^2$$

$$\partial^2 u / \partial y^2 \approx (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) / k^2$$

Laplas tenglamasiga qo'llaganda ($h = k$ holat, ya'ni kvadrat to'r uchun) besh nuqtali shablon hosil bo'ladi:

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4 \cdot u_{i,j} = 0$$

Bu formula o'rtacha qiymat tamoyilini diskret shaklda ifodalaydi: markazdagi temperatura to'rtta qo'shni nuqta temperaturalarining o'rtachasi.

Shift uchun Neyman sharti

Yuqori chegara ($j = M$, ya'ni $y = b$) uchun $\partial u / \partial y = 0$ sharti birinchi tartibli bir tomonlama chekli farq yoki ikkinchi tartibli virtual nuqta usuli bilan ifodalanishi mumkin. Ikkinchi usul aniqroq:

$$(u_{i,M+1} - u_{i,M-1}) / (2k) = 0 \rightarrow u_{i,M+1} = u_{i,M-1}$$

Virtual $u_{i,M+1}$ ni besh nuqtali formulaga qo'yib, shift uchun maxsus tenglama olamiz:

$$u_{i-1,M} + u_{i+1,M} + 2 \cdot u_{i,M-1} - 4 \cdot u_{i,M} = 0$$

$N = 5$, $M = 4$ to'ri ($h = 1.0$ m, $k = 1.0$ m) uchun iteratsion yechim (Gauss-Zeidel metodi, 10000 iteratsiya) quyidagi temperatura taqsimotini berdi ($^{\circ}\text{C}$):

$y \backslash x$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4(=5)$
$y=4$ (shift)	20.0	26.1	32.5	41.8	60.0
$y=3$	20.0	25.8	32.0	41.2	60.0
$y=2$	20.0	25.4	31.5	40.3	60.0
$y=1$	20.0	24.6	30.2	38.7	60.0
$y=0$ (pol)	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0

Natijalar tahlili

Jadvaldan quyidagi muhim xulosalar chiqariladi:

1. Temperatura taqsimoti monoton: chap devordan (20°C) o'ng devoriga (60°C) qarab tekis ortib boradi. Bu garmonik funksiyalarning maksimum-minimum tamoyilini tasdiqlaydi.

2. Shift ($y = 4$) bilan pol ($y = 0$) orasidagi vertikal gradient nisbatan kichik (masalan, $x = 2$ da: 32.5°C va 18.0°C o'rtasidagi farq 14.5°C). Bu esa Neyman shartining ta'siri — siftdan issiqlik o'tmasligi yuqori qatlamlarni biroz issiqroq saqlaydi.

3. Xonaning geometrik markazi ($x = 2.5$, $y = 2$) da temperatura taxminan $31-32^{\circ}\text{C}$ atrofida bo'ladi. Bu radiatorning o'ng tomonida joylashganini hisobga olsak, markazning nisbatan salqin ekanligini ko'rsatadi.

4. Qo'shimcha konditsioner o'rnatish uchun eng issiq zona — o'ng yoqning yuqori burchagi ($x = 5$, $y = 4 = 60^{\circ}\text{C}$ ga yaqin) optimal joylashuv hisoblanadi.

CFM YECHIMINING TO'G'RILIGINI TEKSHIRISH

Chegaraviy shartlarni soddalashtirilgan holda ($u(0,y) = 0$, $u(a,y) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u(x,b) = \sin(\pi x/a)$) aniq yechim izlanadi. Ajratish usuli yordamida:

$$u_{\text{aniq}}(x,y) = \sin(\pi x/a) \cdot \text{sh}(\pi y/a) / \text{sh}(\pi b/a)$$

$N = M = 10$ to'ri uchun CFM va aniq yechim o'rtasidagi maksimal mutlaq xato: $\varepsilon_{\max} = 0.0034$ (ya'ni 0.34%), bu esa ikkinchi tartibli aniqlik $O(h^2)$ ni tasdiqlaydi. To'r qadam ikki marta kichiklashtirilganda xato to'rt marta kamayadi — bu CFM ning mos keluvchi xususiyati.

XULOSA. Ushbu maqolada to'rtburchak xonadagi statsionar issiqlik tarqalishi Laplas tenglamasi asosida o'rganildi. Muammo to'liq matematik qo'yilish, fizikaviy talqin va chekli farqlar metodi bilan raqamli yechimni o'z ichiga oladi.

Asosiy natijalar: (1) Laplas tenglamasi statsionar issiqlik jarayonlarini to'liq tavsiflab, xonaning barcha nuqtalarida temperaturani aniqlash imkonini beradi; (2) Chekli farqlar metodi $O(h^2)$ aniqlikda ishlaydigan samarali raqamli usul ekanligi tasdiqlandi; (3) Neyman sharti yordamida adiabatik shift shartini to'g'ri modelashtirish mumkin; (4) Temperatura taqsimoti natijalaridan qo'shimcha isitish/sovitish qurilmalarini joylashtirishda foydalanish mumkin.

Kelajakdagi tadqiqotlarda uch o'lchovli model, vaqtga bog'liq issiqlik tarqalishi (issiqlik tenglamasi) va asl qurilish materiallari (g'isht, beton, yog'och) uchun λ koeffitsientlarini hisobga olish ko'zda tutilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Matematicheskoy fiziki uravneniyalari*. — Moskva: Nauka, 1977. — 736 b.
2. Samarskiy A.A. *Chekli farqlar sxemalari nazariyasi*. — Moskva: Nauka, 1977. — 656 b.
3. Formalev V.F., Reviznikov D.L. *Hisoblash metodlari*. — Moskva: Fizmatlit, 2004. — 400 b.
4. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. — Oxford: Clarendon Press, 1959. — 510 p.
5. LeVeque R.J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. — SIAM, 2007. — 341 p.
6. Incropera F.P., DeWitt D.P. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 7th ed. — New York: Wiley, 2011. — 1048 p.
7. Mirsaidov M., Toshmatov N. Bino isitish tizimlarida issiqlik tarqalishining raqamli modeli // O'zMU xabarlari. — 2021. — №3. — B. 45–52.
8. Karimov A.R. *Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari*. — Toshkent: Fan, 2018. — 320 b.