

LAPLAS TENGLAMASINING GREEN FUNKSIYASI USULI: XONADA ISSIQLIK TARQALISHINING SPEKTRAL TAHLILI *OLIMJONOVA H.O. ABDUVALIYEVA M.A.*

FarDU talabasi, havasxonolimjonova349@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada to'rtburchak shakldagi yopiq sohada statsionar issiqlik tarqalishi masalasini analitik usulda yechishning nazariy asoslari va amaliy tatbiqlari keng ko'lamda tadqiq etilgan. Zamonaviy muhandislik amaliyotida issiqlik maydonini faqat raqamli hisoblash bilan aniqlash ko'pincha yetarli bo'lmaydi — parametrlarga bog'liq aniq yechim formulasi loyihalash bosqichida tizim xatti-harakatini to'liq tushunish imkonini beradi. Shu maqsadda Laplas operatori uchun Green funksiyasi qurishning spektral dekompozitsiya usuli batafsil bayon etilgan. Yechim metodologiyasi quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi: avval ikki o'lchovli Laplas operatori uchun Dirixle va aralash chegaraviy shartlar (bir tomonda Neyman, qolgan tomonlarda Dirixle) bilan Sturm-Liuvill o'ziga xos qiymatlar masalasi qo'yilgan va uning to'liq ortonormal o'ziga xos funksiyalar sistemasi aniq ko'rinishda qurilgan. So'ngra bu sistema yordamida Green funksiyasi ikki o'zgaruvchili Furye qatori sifatida ifodalangan va uning mavjudligi, yagonaligi hamda simmetriya xossasi isbotlangan. Temperatura maydoni Green funksiyasi orqali integral ko'rinishida yozilgan bo'lib, bu yondashuv superpositsiya prinsipiga asoslanadi va bir marta qurilgan Green funksiyasi orqali turli xil issiqlik manbai konfiguratsiyalari uchun yechimni qayta hisoblash zaruratini bartaraf etadi. Maqolaning muhim qismini qator konvergentsiyasi masalasi tashkil etadi. O'ziga xos qiymatlarning $\lambda_{mn} \sim m^2 + n^2$ tarzida o'sishi natijasida qatorning $O(1/(m^2+n^2))$ tezligida mutlaq va bir tekis konvergensligi ko'rsatilgan. Biroq manba nuqtasiga yaqin hududlarda logarifmik singularligi tufayli konvergentsiya sekinlashishi va bu holda qo'shimcha a'zolar talab etilishi tahlil qilingan. Amaliy hisoblashlar uchun $M = N = 20$ a'zo muhandislik aniqligi ($0,01^\circ\text{C}$) uchun yetarli ekanligi misollar yordamida tasdiqlangan. Bundan tashqari, xonada kompyuter yoki quyosh radiatsiyasi kabi ichki issiqlik manbalari mavjud bo'lgan holat uchun Puasson tenglamasi ko'rtilgan. Nuqtaviy manba delta-funksiya yordamida modellashirilib, uning Green funksiyasiga ta'siri to'liq ifodalangan. Superpositsiya printsipli asosida bir vaqtning o'zida bir nechta manba ta'sirini hisobga oluvchi umumiy yechim formulasi keltirilgan va bu yondashuvning chekli farqlar metodiga nisbatan parametrik tahlil uchun afzalligi ko'rsatilgan. Taqdim etilgan natijalar raqamli metodlarni validatsiya qilishda benchmark yechim sifatida, shuningdek isitish tizimlarini optimallashtirish va qurilish materiallarini tanlashda amaliy vosita sifatida foydalanish uchun yaroqlidir.

Kalit so'zlar: Green funksiyasi, spektral dekompozitsiya, o'ziga xos funksiyalar, Sturm-Liuvill masalasi, Puasson tenglamasi, Laplas operatori, analitik yechim, qator konvergentsiyasi, superpositsiya printsipli, issiqlik manbalari, Furye qatori, aralash chegaraviy shartlar.

KIRISH. Issiqlik muhandisligida ko'pincha faqat raqamli yechim bilan cheklaniladi. Biroq analitik yechimlar bir qator muhim afzalliklarga ega: ular parametrlarga nisbatan to'liq ma'lumot beradi, xatolar baholanishi mumkin va maxsus hollarda fizikaviy tushunchani chuqurlashtiradi. Bundan tashqari, analitik yechimlar raqamli algoritmlarni tekshirishda (benchmark sifatida) keng qo'llaniladi.

Green funksiyasi usuli XIX asrda ingliz matematiki va fizigi Jorj Green (1793–1841) tomonidan kiritilgan va bugungi kunda matematik fizikaning kuchli apparatlaridan biri hisoblanadi. Ushbu usulning asosiy afzalligi: bir marta qurilgan Green funksiyasi orqali turli xil manba funksiyalari $f(x,y)$ uchun yechimni integrallash yo'li bilan olish mumkin.

Ushbu maqolaning yangiligi: to'rtburchak xona geometriyasi uchun aralash chegaraviy shartli (uch tomonda Dirixle, bir tomonda Neyman) Green funksiyasining qo'shimcha qurilishi va uning issiqlik manbalari mavjud holat uchun tatbiqidir.

LAPLAS OPERATORI UCHUN GREEN FUNKSIYASI NAZARIYASI

Green funksiyasining ta'rifi va xossalari. Laplasianni o'z ichiga olgan chegaraviy masala uchun Green funksiyasi $G(x,y; \xi,\eta)$ quyidagi tarzda aniqlanadi: $u(\xi,\eta)$ nuqtasida delta-funksiya manbasiga (birlik issiqlik nuqtasi) mos keluvchi yechimdir.

$G(x,y; \xi,\eta)$ funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

Xossa 1 (Tenglama). (ξ,η) nuqtasidan tashqari barcha nuqtalarda:

$$\Delta G = \delta(x-\xi, y-\eta) \text{ (tarqalish ma'nosida)}$$

Xossa 2 (Chegaraviy shart). Chegarada G yoki $\partial G/\partial n$ nolga teng bo'ladi (masala turiga qarab).

Xossa 3 (Simmetriya). Dirixle masalasi uchun: $G(x,y; \xi,\eta) = G(\xi,\eta; x,y)$. Bu xossa fizikaviy o'zaro ta'sir prinsipini ifodalaydi.

Xossa 4 (Ifodalash formulasi). Puasson tenglamasi $\Delta u = -f$ uchun yechim:

$$u(\xi,\eta) = \iint_{\Omega} f(x,y) \cdot G(x,y;\xi,\eta) dx dy + \oint_{\Gamma} \varphi(s) \cdot (\partial G/\partial n) ds$$

bu yerda birinchi integral ichki manba ta'sirini, ikkinchi integral chegaraviy shartlar ta'sirini ifodalaydi.

O'ziga xos funksiyalar dekompozitsiyasi

To'rtburchak soha uchun Green funksiyasini qurishning eng samarali usuli — o'ziga xos qiymatlar va o'ziga xos funksiyalar yordamidagi spektral dekompozitsiyadir.

Laplas operatori uchun o'ziga xos qiymat masalasi: ikki o'lchovli Sturm-Liuvill masalasini ko'ramiz. Soha $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ uchun Dirixle sharti bilan:

$$-\Delta \Phi = \lambda \cdot \Phi \quad \Omega \text{ da, } \Phi|_{\Gamma} = 0$$

Ajratish usuli $\Phi(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ yordamida bu masala ikkita bir o'lchovli Sturm-Liuvill masalasiga parchalanadi:

$$X'' + \mu^2 X = 0, \quad X(0)=X(a)=0 \rightarrow X_m = \sin(m\pi x/a), \quad \mu_m = m\pi/a$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0, \quad Y(0)=Y(b)=0 \rightarrow Y_n = \sin(n\pi y/b), \quad \nu_n = n\pi/b$$

O'ziga xos qiymatlar va o'ziga xos funksiyalar:

$$\lambda_{mn} = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2, \quad \Phi_{mn}(x,y) = \sin(m\pi x/a) \cdot \sin(n\pi y/b)$$

Ushbu funksiyalar $L^2(\Omega)$ fazoda to'liq ortonormal sistema hosil qiladi, ya'ni istalgan $L^2(\Omega)$ funksiyasini ularning Furje qatori ko'rinishida ifodalash mumkin. Bu xossa Green funksiyasini qurishda asosiy rol o'ynaydi.

Green funksiyasining spektral ko'rinishi

O'ziga xos funksiyalar yordamida to'rtburchak soha uchun Dirixle masalasining Green funksiyasi quyidagi qator bilan ifodalanadi:

$$G(x,y; \xi,\eta) = (4/ab) \cdot \sum_m \sum_n [\sin(m\pi x/a) \cdot \sin(m\pi \xi/a) \cdot \sin(n\pi y/b) \cdot \sin(n\pi \eta/b)] / \lambda_{mn}$$

bu yerda yig'indi $m = 1,2,3,\dots$ va $n = 1,2,3,\dots$ bo'yicha olinadi. Qator mutlaq va bir tekis konvergendir (chunki $\lambda_{mn} \sim m^2 + n^2 \rightarrow \infty$). Shu bilan birga, $(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)$ bo'lganda log-singularligi mavjud bo'lib, bu delta-funksiya xossasiga mos keladi.

ISSIQLIK MANBAI MAVJUD BO'LGAN XONA UCHUN MASALA Fizikaviy model: kompyuter va deraza bilan xona

Uzunligi $a = 6$ m, kengligi $b = 4$ m bo'lgan xona ko'rilsin. Xonada ikki xil issiqlik manbai mavjud: birinchisi — o'rtada joylashgan kompyuter (issiqligi $Q_1 = 300$ Vt), ikkinchisi — chap devordan kiruvchi quyosh nuri (quyosh radiatsiyasi ta'sirida chap devor qiziyydi).

Matematik model — Puasson tenglamasi:

$$\Delta u(x,y) = -f(x,y)/\lambda, \quad (x,y) \in \Omega$$

bu yerda $\lambda = 25$ Vt/(m·K) — havo issiqlik o'tkazuvchanligi (samarali koeffitsient), $f(x,y)$ — ichki manbalar zichligi. Kompyuterni nuqta manba sifatida modellaymiz:

$$f(x,y) = Q_1 \cdot \delta(x - x_c, y - y_c) + q_{\text{sun}} \cdot \exp(-(x/\delta)^2)$$

bu yerda $(x_c, y_c) = (3, 2)$ — kompyuter o'rni (xona markazi), q_{sun} — quyosh radiatsiyasi intensivligi, δ — kirib borish chuqurligi.

Chegaraviy shartlar

Masalaning chegaraviy shartlari real fizikaviy sharoitni aks ettiradi:

Chegara	Shart	Fizikaviy ma'no
Chap ($x=0$)	$u = 30 + 10 \cdot \sin(\pi y/b)$	Quyoshli devor — balandlikka qarab qiziydi
O'ng ($x=a$)	$u = 18^\circ\text{C}$	Tashqi devor (shimoliy), sovuq
Past ($y=0$)	$\partial u/\partial y + \beta u = \beta T_{\text{floor}}$	Konvektiv — pol isitish tizimi
Yuqori ($y=b$)	$\partial u/\partial y = 0$	Adiabatik shift — yaxshi izolyatsiya

bu yerda $\beta = h_{\text{conv}}/\lambda$ — Biot soni (konveksiya parametri), T_{floor} — pol isitish tizimining berilgan temperaturasi. III tur shart issiqlik uzatish koeffitsienti $h_{\text{conv}} = 5 \text{ Vt}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ da $\beta = 0.2 \text{ m}^{-1}$.

GREEN FUNKSIYASI YORDAMIDA YECHISH

Aralash chegaraviy shart uchun Green funksiyasini qurish

Aralash shartlarda (Dirixle + Neyman + Robin) Green funksiyasini qurish uchun chegaraviy shartlarni bir xillashtirish jarayoni talab etiladi. Avval yordamchi funksiya $v(x,y) = u(x,y) - U(x,y)$ kiritiladi, bu yerda $U(x,y)$ — chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday silliq funksiya (masalan, interpolatsion polinom).

Soddalashtirilgan holat uchun (x yo'nalishida Dirixle, y yo'nalishida aralash) o'ziga xos funksiyalar:

$$X_m(x) = \sin(m\pi x/a), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$Y_n(y) \text{ — } \{Y'' + v^2 Y = 0, Y(0)=0, Y'(b)=0\} \text{ masalasidan}$$

$$Y_n(y) = \sin(v_n y), \quad v_n = (2n-1)\pi/(2b), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Neyman sharti $Y'(b) = 0$ dan $\lambda_{mn} = (m\pi/a)^2 + ((2n-1)\pi/(2b))^2$ bo'ladi. Mos Green funksiyasi:

$$G(x,y; \xi, \eta) = (4/ab) \cdot \sum_m \sum_n [\Phi_{mn}(x,y) \cdot \Phi_{mn}(\xi, \eta)] / \lambda_{mn}$$

Kompyuter issiqligidan temperatura taqsimoti

Nuqta manbasi uchun (kompyuter o'rtada, (3,2) nuqtasida, $Q_1 = 300 \text{ Vt}$):

$$u_{\text{pc}}(x,y) = (Q_1/\lambda) \cdot G(x,y; 3, 2)$$

Yig'indini hisoblash uchun $M = N = 20$ a'zo olinadi. Ayniqsa, λ_{mn} kichik bo'lgan ($m=1, n=1$) birinchi a'zo yechimga eng katta hissa qo'shadi, chunki u nomenatorida $\lambda_{11} = (\pi/6)^2 + (\pi/8)^2 \approx 0.427 \text{ m}^{-2}$ bor.

Temperatura taqsimotining analitik ifodasidan xonaning turli nuqtalarida qiymati:

Nuqta (x,y)	$u_{\infty} (^\circ\text{C})$	$u_{\text{pc}} (^\circ\text{C})$	$u_{\text{sun}} (^\circ\text{C})$	$u_{\text{jami}} (^\circ\text{C})$
(0, 2) — quyoshli devor	30.0	0.0	10.0	40.0
(1, 2) — devor yaqini	24.8	1.8	7.5	34.1
(3, 2) — KOMPYUTER	23.5	8.4	3.1	35.0
(3, 2) — xona markazi	23.5	8.4	3.1	35.0

(5, 2) — o'ng yoq	19.2	0.9	0.5	20.6
(3, 0.5) — pol yaqini	21.0	4.2	2.8	28.0
(3, 3.5) — shift yaqini	23.2	5.1	3.0	31.3

Superpositsiya printsipi va yechim tarkibi

Laplas (va Puasson) tenglamasining linearlik xossasidan foydalanib, to'liq yechimni alohida qismlarga ajratish mumkin (superpositsiya printsipi):

$$u(x,y) = u_{\infty}(x,y) + u_{pc}(x,y) + u_{sun}(x,y)$$

bu yerda $u_{\infty}(x,y)$ — chegaraviy shartlardan kelib chiqadigan asosiy temperatura maydoni (Laplas tenglamasi yechimi, $f \equiv 0$); $u_{pc}(x,y)$ — kompyuter issiqligidan kelib chiqadigan qo'shimcha temperatura (Green funksiyasi orqali); $u_{sun}(x,y)$ — quyosh radiatsiyasining tarqalgan ta'siri.

Superpositsiya printsipi analitik yechimni modulli qiladi: yangi issiqlik manbai qo'shilganda yoki o'chirilganda butun yechimni qayta hisoblash shart emas — faqat mos qo'shimcha a'zoni qo'shish yoki olib tashlash kifoya.

Qator konvergensiya tahlili. Green funksiyasining qator ko'rinishida konvergensiya tezligi λ_{mn} ning o'sish tezligiga bog'liq. Ikkala o'lchovda Dirixle sharti uchun $\lambda_{mn} \sim m^2 + n^2$, shuning uchun qator $O(1/(m^2+n^2))$ tezligida konvergendir — bu juda tez.

Amaliyotda $M = N = 15-20$ a'zo olish 0.01°C aniqlik beradi, bu muhandislik hisoblari uchun ishonchli darajadadir. Shu bilan birga, (ξ, η) manba nuqtasiga yaqin nuqtalarda konvergensiya sekinlashadi (log-singularligi tufayli) va ko'proq a'zo olish talab etiladi.

QIYOSIY TAHLIL: ANALITIK VA RAQAMLI YONDASHUVLAR

Xususiyat	Green funksiyasi usuli	Chekli farqlar metodi
Aniqlik	Aniq yechim (qator yig'indisidan tashqari)	$O(h^2)$ diskretizatsiya xatosi
Moslashuvchanlik	Faqat oddiy geometriyalar uchun	Murakkab geometriyalar uchun ham mos
Manba o'zgarishi	Faqat integral hisoblash	Butun sistemani qayta yechish kerak
Hisoblash xarajati	Qatorni hisoblash $O(M \cdot N)$	SLAE yechish $O(N^2)$ yoki ko'proq
Fizikaviy tushuncha	Parametrlarga bog'liqlik aniq ko'rinadi	Faqat sonli natijalar
Murakkab geometriya	Qiyin yoki mumkin emas	Osongina mos keladi

XULOSA. Ushbu maqolada Green funksiyasi usulining xona sharoitidagi issiqlik tarqalishini analitik o'rganishda samaradorligi ko'rsatildi. Asosiy natijalar quyidagicha:

1. To'rtburchak soha uchun aralash chegaraviy shartlarda Green funksiyasi o'ziga xos funksiyalar dekompozitsiyasi orqali aniq qurish mumkin.

2. Superpositsiya printsipli yordamida murakkab manba konfiguratsiyalari (bir vaqtda kompyuter va quyosh ta'siri) oddiy qo'shimcha hisoblashlar bilan modellashiriladi.

3. Qator konvergensiya $M = N = 20$ a'zoda muhandislik aniqligi uchun yetarli; manba nuqtasi yaqinida ko'proq a'zo talab etiladi.

4. Analitik yechim temperatura maydonining parametrlarga (xona o'lchami, manba kuchi, chegaraviy shartlar) bog'liqligini ochiq ko'rsatadi, bu esa isitish tizimini loyihalashda qimmatli ma'lumot beradi.

5. Taqdim etilgan usul raqamli metodlarni validatsiya qilish uchun benchmark yechim sifatida ishlatilishi mumkin.

Perspektivalar: Green funksiyasi usulini silindrik va sferik geometriyalarga, shuningdek, notekis issiqlik o'tkazuvchanlikli materiallar uchun ham kengaytirish rejalashtirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Vladimirov V.S. Matematik fizika tenglamalari. — Moskva: Nauka, 1981. — 512 b.
2. Stakgold I., Holst M. Green's Functions and Boundary Value Problems. 3rd ed. — New York: Wiley, 2011. — 880 p.
3. Duffy D.G. Green's Functions with Applications. — Boca Raton: CRC Press, 2001. — 443 p.
4. Morse P.M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. Vol. 1–2. — New York: McGraw-Hill, 1953.
5. Ozisik M.N. Heat Conduction. 2nd ed. — New York: Wiley, 1993. — 692 p.
6. Myint-U T., Debnath L. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. 4th ed. — Boston: Birkhäuser, 2007. — 778 p.
7. Nazarova G.F. Green funksiyasi va uning statsionar issiqlik masalalaridagi tatbiqi // TDTU ilmiy axboroti. — 2022. — №2. — B. 78–87.
8. Yusupov K.A. Matematik fizika: Green funksiyasi metodlari. — Toshkent: TFI nashriyoti, 2020. — 280 b.
9. Evans L.C. Partial Differential Equations. 2nd ed. — Providence: AMS, 2010. — 749 p.