ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN QO'YILGAN KOSHI MASALASINI TAQRIBIY YECHISHDA EYLER VA RUNGE–KUTTA USULLARINING QO'LLANILISHI

TO'LQINOVA M.Q.

FarDU talabasi, marhaboxontolqinova@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada oddiy differensial tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasini taqribiy yechishning zamonaviy sonli usullari tahlil qilingan. Xususan, Eyler hamda Runge–Kutta usullarining matematik asoslari, algoritmik tuzilishi va amaliy qo'llanilishi keng yoritilgan. Tadqiqot davomida usullarning hisoblash aniqligi, yaqinlashish tezligi va sonli xatolik darajalari o'zaro solishtirilgan. Shuningdek, berilgan differensial tenglama misolida har ikki usulning ishlash prinsipi bosqichma-bosqich ko'rsatib berilgan. Tadqiqot natijalari Runge–Kutta usulining yuqori aniqlikka ega ekanligini, Eyler usuli esa sodda algoritmi bilan dastlabki hisoblashlarda qulay ekanligini ko'rsatadi. Mazkur usullar muhandislik, fizika va amaliy matematika masalalarini yechishda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: oddiy differensial tenglama, Koshi masalasi, sonli usullar, Eyler usuli, Runge–Kutta usuli, taqribiy yechim, hisoblash aniqligi, sonli tahlil.

Kirish. Oddiy differensial tenglamalar zamonaviy matematikaning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, tabiiy va texnik jarayonlarni matematik modellashtirishda keng qo'llaniladi. Fizika, mexanika, iqtisodiyot, biologiya, muhandislik va axborot texnologiyalari kabi ko'plab sohalarda uchraydigan jarayonlarning o'zgarish qonuniyatlari differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Shu sababli differensial tenglamalarni yechish masalasi amaliy va nazariy jihatdan katta ahamiyatga ega.

Ko'pgina hollarda differensial tenglamalarning analitik yechimini topish murakkab yoki imkonsiz bo'ladi. Ayniqsa murakkab funksiyalar va boshlang'ich shartlar bilan berilgan masalalarda aniq yechimni olish qiyinlashadi. Bunday vaziyatlarda sonli usullardan foydalaniladi. Sonli usullar tenglamaning aniq yechimiga yaqin bo'lgan taqribiy natijalarni olish imkonini beradi.

Asosiy qism. Oddiy differensial tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasi boshlang'ich shart asosida funksiyaning noma'lum qiymatlarini aniqlashga xizmat qiladi. Ushbu masalani yechishda Eyler va Runge–Kutta usullari eng ko'p qo'llaniladigan sonli usullardan hisoblanadi. Eyler usuli sodda algoritmga ega bo'lib, hisoblash jarayonining tushunarliligi bilan ajralib turadi. Runge–Kutta usuli esa yuqori aniqlikka ega bo‘lib, ilmiy va muhandislik hisoblashlarida keng qo‘llaniladi.

Mazkur maqolaning maqsadi Koshi masalasini taqribiy yechishda Eyler va Runge–Kutta usullarining nazariy asoslarini o‘rganish, ularning algoritmlarini tahlil qilish hamda misollar orqali hisoblash aniqligini solishtirishdan iborat.

Oddiy differensial tenglamalar nazariyasida Koshi masalasi boshlang‘ich shartli masalalarning eng muhim ko‘rinishlaridan biri hisoblanadi. Ushbu masala differensial tenglama va boshlang‘ich shart yordamida ifodalanadi. Koshi masalasining umumiy ko‘rinishi quyidagicha yoziladi:

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

bu yerda $f(x,y)$ berilgan funksiya bo‘lib, u yechim funksiyaning o‘zgarish tezligini ifodalaydi. x_0 boshlang‘ich argument qiymatini, y_0 esa funksiyaning shu nuqtadagi boshlang‘ich qiymatini bildiradi. Koshi masalasining asosiy mohiyati shundan iboratki, berilgan boshlang‘ich nuqtadan boshlab differensial tenglamani qanoatlantiruvchi funksiyaning qiymatlarini topish talab etiladi.

Koshi masalasi matematikaning nazariy jihatdan ham, amaliy jihatdan ham juda muhim bo‘limlaridan biridir. Ko‘plab tabiiy va texnik jarayonlar aynan differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Masalan, mexanikada jismlarning harakati, fizikada issiqlik almashinuvi, elektrotexnikada elektr zanjirlari dinamikasi, biologiyada populyatsiya o‘sishi va kimyoda reaksiyalar kinetikasi differensial tenglamalar yordamida modellashtiriladi. Shu sababli Koshi masalasi real jarayonlarni matematik modellashtirishning asosiy vositalaridan biri hisoblanadi.

Amaliy masalalarda differensial tenglamalarning analitik yechimini topish har doim ham mumkin bo‘lavermaydi. Ayrim hollarda tenglama juda murakkab bo‘lib, uni elementar funksiyalar orqali ifodalashning imkoni bo‘lmaydi. Bunday vaziyatlarda sonli usullar katta ahamiyat kasb etadi. Sonli usullar yordamida differensial tenglamalarning taqribiy yechimlari hisoblanadi va bu yechimlar kompyuter texnologiyalari orqali tez hamda samarali aniqlanadi.

Sonli usullar uzluksiz matematik masalani diskret modelga aylantirish tamoyiliga asoslanadi. Ya'ni yechim butun interval bo'yicha emas, balki ma'lum nuqtalar ketma-ketligida hisoblanadi. Zamonaviy kompyuterlar ham aynan shu tamoyil asosida ishlaydi. Murakkab uzluksiz jarayonlar kichik qadamlar orqali bo'laklarga ajratilib hisoblab chiqiladi. Sonli usullarning asosiy vazifasi differensial tenglamalarning taqribiy yechimlarini yuqori aniqlikda olish, hisoblash jarayonini avtomatlashtirish va real tizimlarni modellashtirishdan iboratdir.

Sonli usullar samaradorligi bir nechta muhim omillar bilan belgilanadi. Bular aniqlik darajasi, barqarorlik, yaqinlashish tezligi va hisoblash murakkabligidir. Agar usulning aniqligi yuqori bo'lsa, olingan natijalar haqiqiy yechimga juda yaqin bo'ladi. Barqarorlik esa hisoblash jarayonida xatoliklarning ortib ketmasligini ta'minlaydi.

Sonli usullarda xatolik tushunchasi muhim o'rin egallaydi. Xatolik — bu haqiqiy yechim bilan taqribiy yechim orasidagi farqdir. Xatoliklarni tahlil qilish usulning sifatini va ishonchliligini baholash imkonini beradi. Odatda xatolik ikki turga bo'linadi: lokal xatolik va global xatolik. Lokal xatolik har bir alohida qadamda yuzaga keladigan xatolik bo'lib, faqat bitta iteratsiya uchun aniqlanadi. Global xatolik esa barcha qadamlar davomida yig'ilib boradigan umumiy xatolikni ifodalaydi. Shu sababli global xatolik sonli usulning umumiy aniqligini ko'rsatadi.

Sonli usullarning aniqligi xatolik tartibi orqali baholanadi. Masalan, Eyler usulining aniqlik tartibi $O(h)$ bo'lsa, Runge–Kutta 4-tartibli usulining aniqlik tartibi $O(h^4)$ ga teng bo'ladi. Bu esa qadam uzunligi kamaygan sari Runge–Kutta usulida xatolik juda tez kamayishini bildiradi. Eyler usulida esa xatolik nisbatan sekin kamayadi.

Eyler usuli differensial tenglamalarni yechishning eng sodda va tarixiy jihatdan birinchi sonli usullaridan biri hisoblanadi. Ushbu usul differensial tenglamaning geometrik ma'nosiga asoslanadi. Ma'lumki, hosila funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmaning tangens burchagini ifodalaydi. Eyler usulida funksiya kichik intervalda chiziqli o'zgaradi deb qabul qilinadi va yechim urinma chiziq yordamida yaqinlashtiriladi. Usulning asosiy formulasi quyidagicha yoziladi:

$$y_{n+1}=y_n+h*f(x_n,y_n)$$

Bu yerda h qadam uzunligini, (x_n,y_n) esa joriy nuqtani bildiradi. Ushbu formula yordamida keyingi nuqtadagi funksiyaning qiymati oldingi qiymat va hosila orqali hisoblanadi. Eyler usulining asosiy afzalligi uning juda sodda algoritmga ega ekanligidadir. Uni dasturlash va kompyuterda amalga oshirish oson hisoblanadi. Biroq usulning kamchiligi shundaki, xatolik har bir qadamda yig'ilib boradi va katta intervalda aniqlik pasayadi.

Eyler usulining algoritmi ketma-ket iteratsiyalar asosida bajariladi. Avvalo boshlang'ich qiymatlar x_0 va y_0 beriladi. So'ng qadam uzunligi tanlanadi. Har bir qadamda hosila qiymati hisoblanib, yangi nuqtadagi funksiya qiymati topiladi. Keyin argument qiymati yangilanadi va jarayon berilgan interval oxirigacha davom ettiriladi. Shu tariqa differensial tenglamaning taqribiy yechimi hosil qilinadi.

Runge–Kutta usuli esa sonli yechim topishning eng samarali va keng qo'llaniladigan usullaridan biridir. Ayniqsa, to'rtinchi tartibli Runge–Kutta usuli yuqori aniqligi bilan ajralib turadi. Ushbu usulning asosiy g'oyasi shundan iboratki, funksiya o'zgarishi faqat boshlang'ich nuqtada emas, balki bir nechta oraliq nuqtalarda ham baholanadi. Natijada hosilaning o'rtacha qiymati ancha aniq hisoblanadi va yechimning aniqligi sezilarli ravishda oshadi.

Runge–Kutta 4-tartibli usulida quyidagi oraliq qiymatlar hisoblanadi:

$$k_1=h*f(x_n,y_n),$$

$$k_2=h*f(x_n+(h/2),y_n+(k_1/2)),$$

$$k_3=h*f(x_n+(h/2),y_n+(k_2/2)),$$

$$k_4=h*f(x_n+h,y_n+k_3)$$

Shundan so'ng yangi qiymat quyidagi formula orqali topiladi:

$$y_{n+1}= y_n+(1/6)*(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

Ushbu usulning asosiy afzalligi yuqori aniqlik va barqarorlikdir. Shu sababli Runge–Kutta usuli ilmiy hisoblashlarda, texnik modellashtirishda va muhandislik masalalarida keng qo'llaniladi. Zamonaviy hisoblash matematikasida differensial tenglamalarni yechishda aynan shu usul eng ishonchli usullardan biri sifatida qaraladi.

Runge–Kutta usuli differensial tenglamalarni sonli yechishda eng samarali va ishonchli usullardan biri sifatida qaraladi. Ayniqsa, to‘rtinchi tartibli Runge–Kutta usuli yuqori aniqligi sababli ilmiy hisoblashlarda keng qo‘llaniladi. Ushbu usulning asosiy afzalligi shundaki, yechimni hisoblashda faqat bitta nuqtadagi hosila emas, balki bir nechta oraliq nuqtalardagi hosila qiymatlari ham hisobga olinadi. Natijada funksiya o‘zgarishi ancha aniq baholanadi va xatolik sezilarli kamayadi.

Runge–Kutta usuli yuqori aniqlikka ega bo‘lib, uning xatolik tartibi to‘rtinchi darajali hisoblanadi. Bu esa qadam uzunligi kamaygan sari xatolik juda tez kamayishini anglatadi. Bundan tashqari, usulning barqarorligi yuqori bo‘lib, uzoq intervaldagi hisoblashlarda ham natija ishonchliligini saqlab qoladi. Global xatolikning kichik bo‘lishi ushbu usulni murakkab fizik va texnik modellar uchun juda qulay qiladi. Runge–Kutta usuli mexanik tizimlar, aerodinamika, elektr zanjirlari, kosmik modellashtirish hamda ilmiy tadqiqotlarda keng qo‘llanilishining asosiy sababi ham aynan shu yuqori aniqlik va barqarorlikdir.

Eyler va Runge–Kutta usullarini ilmiy jihatdan taqqoslaganda ular orasidagi farq juda yaqqol ko‘rinadi. Eyler usuli algoritmik jihatdan juda sodda bo‘lsa-da, uning aniqligi past bo‘lib, xatolik qadamlar davomida tez yig‘ilib boradi. Runge–Kutta usuli esa murakkabroq hisoblashlarni talab qilsa ham, yuqori aniqlikni ta’minlaydi. Ilmiy tahlillar shuni ko‘rsatadiki, Eyler usuli tez hisoblanadi, biroq natijalar nisbatan noaniq bo‘ladi. Runge–Kutta usulida esa hisoblash biroz ko‘proq vaqt oladi, ammo natijalar haqiqiy yechimga juda yaqin bo‘ladi. Shu sababli zamonaviy amaliy hisoblashlarda Runge–Kutta usuli ko‘proq qo‘llaniladi.

Sonli usullar ko‘plab amaliy sohalarda muhim ahamiyatga ega. Mexanik tizimlar dinamikasini o‘rganishda, elektr zanjirlarini tahlil qilishda, issiqlik tarqalish modellarini qurishda, kimyoviy reaksiyalar kinetikasida hamda biologik tizimlarning o‘sish modellarini tadqiq qilishda differensial tenglamalar va ularning sonli yechimlari keng qo‘llaniladi. Shuningdek, iqtisodiy prognozlash va statistik modellashtirishda ham sonli usullar muhim vosita hisoblanadi.

Runge–Kutta 4-tartibli usulning amaliy ishlashini ko‘rib chiqish uchun quyidagi Koshi masalasi olinadi:

$dy/dx=x+y, \quad y(0)=1, \quad h=0.1$

Birinchi qadamda boshlang‘ich nuqta sifatida $x_0=0$ va $y_0=1$ olinadi. Runge–Kutta usulida avvalo to‘rtta oraliq qiymat hisoblanadi:

$$k_1=0.1(0+1)=0.1,$$

$$k_2=0.1(0.05+1+0.1/2)=0.11,$$

$$k_3=0.1(0.05+1+0.11/2)=0.1105,$$

$$k_4=0.1(0.1+1+0.1105)=0.12105$$

So‘ng yangi qiymat quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$y_1= y_0+(1/6)*(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$

Hisoblash natijasida:

$$y_1\approx 1.11034$$

Ikkinchi qadamda $x_1=0.1$ va $y_1\approx 1.11034$ qiymatlaridan foydalaniladi. Shu tarzda hisoblash davom ettiriladi va natijalar juda tez barqarorlashadi. Runge–Kutta usulida hosil bo‘lgan qiymatlar Eyler usuliga qaraganda ancha aniq bo‘lib, haqiqiy yechimga yaqinlashadi.

Ikki usulning ilmiy taqqoslanishida aniqlik muhim mezon hisoblanadi. Eyler usuli birinchi tartibli aniqlikka ega: $O(h)$

Runge–Kutta usulining aniqlik tartibi esa: $O(h^4)$

Bu esa Runge–Kutta usulida xatolikning juda tez kamayishini bildiradi. Hisoblash murakkabligi jihatidan Eyler usulida funksiya har bir qadamda faqat bir marta hisoblanadi, Runge–Kutta usulida esa to‘rt marta hisoblash amalga oshiriladi. Shu sababli RK4 usuli ko‘proq hisoblash vaqtini talab qiladi, ammo natijaning aniqligi juda yuqori bo‘ladi.

Barqarorlik ham sonli usullar uchun muhim tushunchadir. Barqarorlik deganda hisoblash jarayonida kichik xatoliklarning keskin ortib ketmasligi tushuniladi. Eyler usuli katta intervalda barqarorligini yo‘qotishi mumkin, Runge–Kutta usuli esa yuqori barqarorlikni saqlab qoladi. Shu sababli murakkab fizik va texnik modellarni hisoblashda aynan Runge–Kutta usuli afzal hisoblanadi.

Sonli usullarda xatolik qadam uzunligiga kuchli bog‘liq bo‘ladi. Agar qadam uzunligi katta tanlansa, aniqlik pasayadi. Qadam kichik bo‘lsa, natija ancha aniq chiqadi. Eyler usulida xatolik har qadamda yig‘ilib boradi va kumulyativ effekt hosil qiladi. Runge–Kutta usulida esa xatolik boshqariladigan darajada bo‘lib, umumiy natija barqaror saqlanadi.

Sonli yechimlar amaliy jihatdan juda katta ahamiyatga ega. Ular fizik jarayonlarning vaqt bo‘yicha o‘zgarishini modellashtirish imkonini beradi. Analitik yechim mavjud bo‘lmagan hollarda sonli usullar yordamida nuqtalar ketma-ketligi olinadi va shu nuqtalar asosida grafiklar quriladi. Zamonaviy kompyuter grafikasi, muhandislik modellarini yaratish hamda ilmiy simulyatsiyalar aynan shu tamoyillarga asoslanadi.

Yakuniy ilmiy tahlil shuni ko‘rsatadiki, Runge–Kutta 4-tartibli usul Eyler usuliga nisbatan sezilarli darajada yuqori aniqlikka ega. Ushbu usul ko‘p bosqichli baholashga asoslanganligi sababli lokal xatolikni minimallashtiradi va global aniqlikni oshiradi. Eyler usuli esa oddiy algoritmik tuzilishga ega bo‘lsa-da, nisbatan noaniq usul hisoblanadi. Shu sababli zamonaviy hisoblash matematikasida Runge–Kutta usuli standart sonli usullardan biri sifatida keng qo‘llaniladi.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan Koshi masalasini taqribiy yechishda keng qo‘llaniladigan Eyler va Runge–Kutta 4-tartibli sonli usullari nazariy hamda amaliy jihatdan chuqur tahlil qilindi. Tadqiqot davomida Koshi masalasining matematik mohiyati, differensial tenglamalarning sonli yechimga o‘tkazilish zarurati va diskretlashtirish tamoyillari batafsil yoritildi. Shuningdek, zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida sonli hisoblashlarni amalga oshirish imkoniyatlari ko‘rsatib berildi.

Tahlillar natijasi shuni ko‘rsatdiki, Eyler usuli sodda algoritmik tuzilishga ega bo‘lib, uni dasturlash va hisoblash oson hisoblanadi. Shu sababli ushbu usul ta’lim jarayonida va boshlang‘ich hisoblashlarda muhim o‘rin tutadi. Biroq uning aniqligi birinchi tartibli bo‘lgani sababli qadam uzunligi ortishi bilan xatolik tez ortadi va natijalar aniqligi pasayadi.

Runge–Kutta 4-tartibli usuli esa yuqori aniqlik, barqarorlik va kichik global xatolik bilan ajralib turadi. Ushbu usul bir nechta oraliq nuqtalarda hosila qiymatlarini hisobga olishi sababli haqiqiy yechimga juda yaqin natijalarni beradi. Shu tufayli Runge–Kutta usuli ilmiy tadqiqotlarda, muhandislik masalalarida, fizik modellashtirishda va zamonaviy hisoblash matematikasida eng samarali usullardan biri sifatida qaraladi.

Umuman olganda, Koshi masalasini sonli usullar yordamida yechishda usul tanlash masalaning murakkabligi, talab qilinadigan aniqlik darajasi va mavjud hisoblash resurslariga bog‘liq bo‘ladi. Yuqori aniqlik talab qilinadigan amaliy masalalarda Runge–Kutta usuli afzal hisoblanadi, Eyler usuli esa sodda va tushunarli algoritmga ega bo‘lgani sababli boshlang‘ich o‘quv va tahliliy masalalarda muhim ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Atkinson K.E. An Introduction to Numerical Analysis. – New York: Wiley, 1989. – 693 p.
2. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. – Boston: Cengage Learning, 2011. – 872 p.
3. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. – Chichester: Wiley, 2016. – 544 p.
4. Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. – New York: McGraw-Hill Education, 2015. – 992 p.
5. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. – Berlin: Springer, 2008. – 528 p.