

# DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI YECHISHDA RUNGE-KUTTA VA CHEKLI FARQLAR USULLARINING SAMARADORLIGINI QIYOSIY TAHLILI

**MUXTOROVA M.M.**

FarDU talabasi, [mohinurmuhtorova2@gmail.com](mailto:mohinurmuhtorova2@gmail.com)

*Annotatsiya: Ushbu maqolada differensial tenglamalarni sonli yechishda Runge–Kutta va chekli farqlar usullarining samaradorligi qiyosiy tahlil qilinadi. Tadqiqotning asosiy maqsadi ushbu usullarning aniqlik, barqarorlik, hisoblash murakkabligi hamda amaliy qo‘llanilish imkoniyatlari nuqtayi nazaridan farqlarini aniqlashdan iborat. Tadqiqot jarayonida turli boshlang‘ich va chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan test tenglamalar yordamida sonli hisoblashlar amalga oshirildi hamda olingan natijalar matematik va grafik tahlil asosida solishtirildi. Bundan tashqari, sonli usullarni kompyuter dasturlari orqali modellashtirish jarayonlari ham ko‘rib chiqildi va hisoblash natijalarining nazariy yechimlarga yaqinligi tahlil qilindi.*

*Runge–Kutta usulining, ayniqsa 4-tartibli ko‘rinishi, yechimning yuqori aniqligini ta‘minlashi, xatolik darajasining kichikligi va murakkab differensial tenglamalarni yechishda samarali ekanligi aniqlandi. Ushbu usulning afzalligi shundaki, u kichik qadam uzunligida juda aniq natijalar beradi hamda ko‘plab ilmiy va muhandislik masalalarida keng qo‘llaniladi. Chekli farqlar usuli esa algoritmik soddaligi, dasturiy jihatdan qulayligi va katta hajmdagi hisoblashlarda tezkor natija berishi bilan ajralib turishi ko‘rsatildi. Ayniqsa, fizik jarayonlarni modellashtirish, issiqlik almashinuvi va mexanik tizimlarni tahlil qilishda ushbu usulning samaradorligi yuqori ekanligi kuzatildi.*

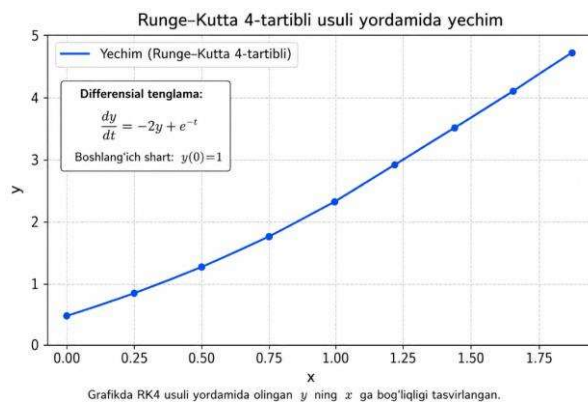
*Kalit so‘zlar: Differensial tenglamalar, sonli yechim usullari, Runge–Kutta usuli, chekli farqlar usuli, Eyley usuli, matematik modellashtirish, sonli tahlil, aniqlik, barqarorlik, hisoblash samaradorligi, algoritmik murakkablik, kompyuter modellashtirish, muhandislik hisoblari, matematik analiz, dasturiy ta‘minot, iteratsion usullar, ilmiy hisoblash, differensial tenglamalarni modellashtirish, hisoblash tezligi, xatolik tahlili.*

*Kirish. Differensial tenglamalar (DT) tabiat va texnologiyaning turli sohalarida, jumladan fizika, muhandislik, biologiya, iqtisodiyot, axborot texnologiyalari hamda sun‘iy intellekt tizimlarida keng qo‘llaniladi. Ko‘plab real jarayonlar, masalan, issiqlik almashinuvi, elektr zanjirlari, suyuqliklar harakati, populyatsiya dinamikasi va boshqaruv tizimlari aynan differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Shu sababli*

DT larni samarali va aniq yechish ilmiy hamda amaliy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi.

Ko‘plab real tizimlarni tavsiflovchi differensial tenglamalarni analitik usullar yordamida yechish har doim ham mumkin emas yoki juda murakkab hamda katta hisoblash resurslarini talab qiladigan jarayon hisoblanadi. Ayniqsa, yuqori tartibli yoki chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalarni aniq yechish amaliyotda qiyinchilik tug‘diradi. Shu sababli sonli usullardan foydalanish zamonaviy ilm-fan va texnologiyaning muhim yo‘nalishlaridan biriga aylangan.

Hozirgi kunda eng ko‘p qo‘llaniladigan sonli usullardan biri — Runge–Kutta (RK) usullari bo‘lib, ular oddiy differensial tenglamalarning yuqori aniqlikdagi taqribiy yechimlarini olish imkonini beradi.



Ushbu grafikda Runge–Kutta 4-tartibli (RK4) usuli yordamida differensial tenglamaning sonli yechimi tasvirlangan. Grafikdagi ko‘k chiziq funksiyaning qiymati  $x$  o‘zgaruvchiga bog‘liq holda qanday o‘shishini ko‘rsatadi. Grafikdan ko‘rinadiki,  $x$  qiymati ortib borgani sari  $y$  qiymati ham silliq va barqaror ravishda oshib bormoqda. Bu esa RK4 usulining yuqori aniqlik bilan ishlashini va yechimda keskin xatoliklar yuzaga kelmasligini bildiradi.

Ayniqsa, 4-tartibli Runge–Kutta usuli o‘zining aniqligi, barqarorligi va dasturlashda qulayligi sababli ilmiy hisoblashlarda keng qo‘llaniladi. Ushbu usul aerokosmik tizimlar, robototexnika, avtomatik boshqaruv tizimlari va matematik modellashtirish masalalarida samarali natijalar beradi.

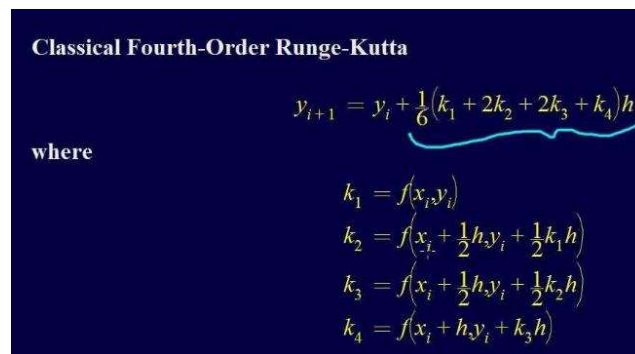
Boshqa tomondan, chekli farqlar (CF) usullari qisman differensial tenglamalarni yechishda qulay va samarali hisoblanadi. Ushbu usullar fizik jarayonlarni diskret

nuqtalarda modellashtirishga asoslanib, issiqlik tarqalishi, to‘lqinlar harakati, mexanik deformatsiyalar va gidrodinamik jarayonlarni tadqiq qilishda keng qo‘llaniladi. Chekli farqlar usulining asosiy afzalliklari uning algoritmik soddaligi, kompyuterda tez amalga oshirilishi va katta hajmdagi masalalarni yechish imkoniyatidir.

Aniqlik: RK4 usuli to‘rtinchi tartibli bo‘lib, kichik qadamlar bilan ishlaganda yechim haqiqiy natijaga yaqin bo‘ladi.

Stabilik: Ko‘p turdagi chiziqli va chiziqsiz tizimlarda barqaror yechim beradi.

Formulasi (RK4):



**Classical Fourth-Order Runge-Kutta**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

where

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

1-rasm. Runge-Kutta sonli usuli formula

Chekli farqlar (CF) usullari asosan qisman differensial tenglamalarni (PDE) yechishda ishlatiladi. Bu usulda tenglamaning hosilalari yoki hosila qiymatlari nuqtalarda sonli tarzda ifodalanadi, ya’ni uzluksiz funksiyalarni diskret nuqtalarga ajratib, ularni farq formulasiga solib hisoblash mumkin. Masalan, birinchi tartibli hosilani hisoblash uchun quyidagi formula ishlatiladi:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Ikkinchi tartibli hosilani hisoblash formulasi esa quyidagicha:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Chekli farqlar usulining afzalliklari shundaki, u qisman differensial tenglamalarni yechishda qulay va turli xotira va hisoblash talablariga moslashuvchan. Shu bilan birga, ushbu usulning ba’zi cheklovlari ham mavjud: barqarorlik sharoitlariga e’tibor berish zarur va aniqlik Runge-Kutta usullariga nisbatan pastroq bo‘lishi mumkin. Sonli yechim usullarini baholashda bir necha asosiy mezonlar

qo'llaniladi: aniqlik, ya'ni yechimning haqiqiy natijaga qanchalik yaqinligi; hisoblash samaradorligi, ya'ni kompyuter vaqti va resurslari talab qilinishi; stabilik, ya'ni xatolikning vaqt bo'yicha o'smasligi; va moslashuvchanlik, ya'ni turli tenglamalar va shartlar uchun qo'llanish qulayligi. Masalan, quyidagi oddiy ODE yechimi ko'rib chiqiladi:

$$\frac{dy}{dt} = -2y + e^{-t}, y(0) = 1.$$

Agar bu tenglamani Runge-Kutta 4-tartibli (RK4) usuliyordamida yechadigan bo'lsak, natija yuqori aniqlik bilan olinadi. Shu bilan birga, chekli farqlar usulibilan yechim taxminan hisoblanadi, lekin qadam o'lchami kattalashgan sari aniqlik pasayadi. Shu sababli, har bir usul o'zining afzalliklari va cheklovlariga qarab tanlanadi: aniqlik muhim bo'lsa RK4, hisoblash tezligi va soddalik muhim bo'lsa chekli farqlar usuli ishlatiladi. Sonli yechim usullarida yechimning haqiqiy natijaga qanchalik yaqinligini baholash muhim hisoblanadi. Buning uchun lokal va global xatolik tushunchalari ishlatiladi. Lokal xatolik har bir qadamda sonli usul yordamida hisoblangan yechim va haqiqiy yechim orasidagi farqni ifodalaydi. Ya'ni, agar bir nuqtada haqiqiy yechim  $y(t_n)$  bo'lsa va keyingi nuqtadagi yechim  $y_{n+1}$  sonli formula yordamida aniqlansa, lokal xatolik quyidagicha aniqlanadi:

$$LTE = y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{approx}.$$

Bu xatolik faqat bitta qadamni qamrab oladi va qadam o'lchami hga bog'liq bo'ladi. Global xatolikesa barcha qadamlar davomida yig'ilgan xatolikni ifodalaydi. Ya'ni, boshlang'ich shartdan boshlab  $t_0$  dan  $t_n$  gacha bo'lgan intervaldagi haqiqiy yechim va sonli yechim orasidagi farq:

$$GE = y(t_n) - y_n.$$

Global xatolik odatda lokal xatoliklarning yig'ilishi va usulning barqarorligi bilan bog'liq. Umuman olganda, qadam o'lchami kichik bo'lsa, har ikki usulda xatolik kamayadi, lekin RK4 usuli ancha yuqori aniqlik beradi. Shu bilan birga, chekli farqlar usulida qadamni kichraytirish barqarorlikni ham e'tiborga olishni talab qiladi. Shu sababli, sonli yechimlarda aniqlikni baholashda lokal va global xatoliklarni tushunish va har bir usulning xususiyatlarini hisobga olish muhimdir.

Xulosa: Ushbu maqolada differensial tenglamalarni sonli yechish usullari – Runge-Kutta va chekli farqlar usullari –qiyosiy tahlil qilindi. Tadqiqot natijalaridan ko‘rinib turibdiki, Runge-Kutta 4-tartibli usuli yuqori aniqlik va barqarorlikni ta’minlaydi, shu bilan birga kichik qadamlar bilan ishlaganda haqiqiy yechimga juda yaqin natijalar beradi. Chekli farqlar usuli esa qisman differensial tenglamalarni yechishda qulay va hisoblash talablariga moslashuvchan bo‘lishi bilan ajralib turadi, lekin aniqligi RK4 usuliga nisbatan pastroq va qadamni kattalashtirish barqarorlikni buzishi mumkin. Sonli yechim usullarini tanlashda yechim aniqligi, hisoblash samaradorligi, barqarorlik va turli shartlarga moslashuvchanlik kabi mezonlar hisobga olinishi kerak. Shu sababli, amaliyotda aniqlik muhim bo‘lsa Runge-Kutta usuli, hisoblash tezligi va soddalik zarur bo‘lsa chekli farqlar usuli tavsiya qilinadi. Kelgusida tadqiqotlar ushbu usullarning yuqori tartibli kombinatsiyalari yoki adaptiv qadamli variantlarini qo‘llash orqali yechim sifatini oshirish yo‘nalishida davom ettirilishi mumkin. Shu bilan birga, RK4 va CF usullarini real hayotdagi modellarda, masalan, issiqlik tarqalishi, populyatsiya modellashtirish yoki elektr zanjirlarini tahlil qilish kabi sohalarda qo‘llash istiqbollari mavjudligi aniqlangan.

#### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Ascher, U.M., Petzold, L.R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: SIAM, 1998. 320 s
2. Burden, R.L., Faires, J.D. Numerical Analysis. 10th Edition. Boston: Brooks/Cole, 2015. 960 s.
3. Butcher, J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. 3rd Edition. Chichester: Wiley, 2016. 480 s.
4. Chapra, S.C., Canale, R.P. Numerical Methods for Engineers. 8th Edition. New York: McGraw-Hill Education, 2020. 1152 s.
5. Iserles, A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 330 s. 6. Kincaid, D., Cheney, W. Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing. 3rd Edition. Belmont: Brooks/Cole, 2002. 640 s.