LUCAS TIPIDAGI KUCHLI BO‘LINUVCHAN REKURRENT KETMA-KETLIKLAR

ABDUMITALIPOVA M.A.

FarDU talabasi, moxira875@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada Fibonachchi sonlari uchun ma’lum bo‘lgan $EKUB(F_m, F_n) = F_{EKUB(m,n)}$ *xossasining Lucas tipidagi rekurrent ketma-ketliklarga umumlashishi bayon qilinadi. Asosiy e’tibor ikkinchi tartibli chiziqli rekurrent ketma-ketliklar, ayniqsa birinchi tur Lucas ketma-ketligi* $U_n(P, Q)$ *ga qaratiladi. Kuchli bo‘linuvchan ketma-ketlik tushunchasi, Lucas ketma-ketliklarining bo‘linuvchanlik xossasi, asosiy teorema va sodda misollar keltiriladi.*

Kalit so‘zlar: Fibonachchi sonlari, Lucas ketma-ketligi, rekurrent ketma-ketlik, EKUB, kuchli bo‘linuvchanlik, bo‘linuvchan ketma-ketlik.

Kirish. Rekurrent ketma-ketliklar sonlar nazariyasida muhim o‘rin tutadi. Ular sodda boshlang‘ich shartlar va rekurrent munosabatlar orqali aniqlansa-da, ko‘pincha chuqur arifmetik xossalarga ega bo‘ladi. Buning eng mashhur namunasi Fibonachchi ketma-ketligidir:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Fibonachchi sonlarining muhim xossalaridan biri quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\mathrm{EKUB}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{EKUB}(m,n)}.$$

Masalan, $F_{12} = 144$, $F_{18} = 2584$ va $\gcd(12,18) = 6$ bo‘lgani uchun

$$\mathrm{EKUB}(F_{12}, F_{18}) = \mathrm{EKUB}(144,2584) = 8 = F_6.$$

Bu munosabat shuni ko‘rsatadiki, ketma-ketlik hadlari orasidagi umumiy bo‘luvchi indekslar orasidagi umumiy bo‘luvchi bilan boshqariladi. Mazkur xossa faqat Fibonachchi sonlariga emas, balki ma’lum shartlar ostida Lucas tipidagi rekurrent ketma-ketliklarga ham tegishlidir.

Kuchli bo‘linuvchan ketma-ketlik

Natural sonlardan tuzilgan (a_n) ketma-ketlik uchun agar har qanday musbat butun m va n sonlar uchun

$$\mathrm{EKUB}(a_m, a_n) = a_{\mathrm{EKUB}(m,n)}$$

tenglik bajarilsa, bunday ketma-ketlik *kuchli bo‘linuvchan ketma-ketlik* deyiladi, [1].

Bu tushuncha oddiy bo‘linuvchan ketma-ketlik tushunchasidan kuchliroqdir. Haqiqatan, agar $d \mid n$ bo‘lsa, u holda $\text{EKUB}(d, n) = d$. Demak, kuchli bo‘linuvchanlikdan $\text{EKUB}(a_d, a_n) = a_d$ kelib chiqadi. Bundan esa $a_d \mid a_n$ natija olinadi. Ya’ni kuchli bo‘linuvchan ketma-ketlik, albatta, oddiy bo‘linuvchan ketma-ketlik ham bo‘ladi. Biroq har qanday bo‘linuvchan ketma-ketlik kuchli bo‘linuvchan bo‘lavermaydi. Fibonachchi sonlari ushbu xossaning klassik namunasi hisoblanadi.

Lucas ketma-ketliklari ikkinchi tartibli chiziqli rekurrent ketma-ketliklarning muhim sinfidir. Birinchi tur Lucas ketma-ketligi quyidagicha aniqlanadi:

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 1,$$

$$U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n, \qquad n \geq 0,$$

bu yerda $P, Q \in \mathbb{Z}$. Bu ketma-ketlik odatda $U_n(P, Q)$ orqali belgilanadi.

Fibonachchi ketma-ketligi Lucas ketma-ketligining xususiy holidir. Haqiqatan, $P = 1$ va $Q = -1$ bo‘lsa,

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

hosil bo‘ladi. Demak,

$$U_n(1, -1) = F_n.$$

Lucas ketma-ketligiga mos xarakteristik tenglama

$$x^2 - Px + Q = 0$$

ko‘rinishga ega. Agar uning ildizlari α va β bo‘lsa, u holda

$$\alpha + \beta = P, \qquad \alpha\beta = Q.$$

$\alpha \neq \beta$ bo‘lgan holda Lucas ketma-ketligi Bine tipidagi formula bilan ifodalanadi:

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Bu formula Fibonachchi sonlari uchun ma’lum bo‘lgan Bine formulasining umumiy ko‘rinishi sifatida qaraladi, [2].

Lucas tipidagi $U_n(P, Q)$ ketma-ketliklarda indekslar bo‘yicha bo‘linuvchanlik muhim o‘rin tutadi. Asosiy xossa quyidagicha yoziladi:

$$m \mid n \quad \Rightarrow \quad U_m \mid U_n.$$

Agar $n = mk$ bo‘lsa, Bine formulasiga ko‘ra

$$U_n = \frac{\alpha^{mk} - \beta^{mk}}{\alpha - \beta}$$

tenglik o ‘rinli. Quyidagi

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1})$$

algebraic ayniyatni $x = \alpha^m$, $y = \beta^m$ uchun qo‘llasak, $\alpha^{mk} - \beta^{mk}$ ifoda $\alpha^m - \beta^m$ ga bo‘linishi kelib chiqadi. Shuning uchun $U_m \mid U_n$ bo‘ladi. Bu xossa Lucas ketma-ketliklarida indekslar bo‘yicha bo‘linuvchanlik hadlar bo‘yicha ham saqlanishini bildiradi.

Teorema. *Aytaylik,*

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 1, \qquad U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n$$

Lucas ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. Agar

$$EKUB(P, Q) = 1$$

bo‘lsa, u holda har qanday musbat butun m *va* n *sonlar uchun*

$$EKUB(U_m, U_n) = \left|U_{EKUB(m,n)}\right|$$

tenglik bajariladi.

Agar ketma-ketlik hadlari musbat bo‘lsa, modul belgisi tashlab yoziladi:

$$\mathrm{EKUB}(U_m, U_n) = U_{\mathrm{EKUB}(m,n)}.$$

Teoremaning isboti Yevklid algoritmi yordamida quyidagicha isbotlanadi. Lucas ketma-ketliklari uchun

$$U_{m+n} = U_m U_{n+1} - QU_{m-1}U_n$$

kabi ayniyatlar mavjud. Bu munosabatlar yordamida

$$\mathrm{EKUB}(U_m, U_n) = \mathrm{EKUB}(U_n, U_r), \qquad m = qn + r,$$

ko‘rinishidagi o‘tish amalga oshiriladi. Indekslar uchun Yevklid algoritmi takroran qo‘llanganda $d = \mathrm{EKUB}(m, n)$ hosil bo‘ladi va natijada

$$\mathrm{EKUB}(U_m, U_n) = |U_d| = \left|U_{\mathrm{EKUB}(m,n)}\right|$$

kelib chiqadi.

1-misol. Fibonachchi ketma-ketligi. Fibonachchi sonlari uchun $P = 1$, $Q = -1$ va $\mathrm{EKUB}(P, Q) = 1$. Shuning uchun

$$\mathrm{EKUB}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{EKUB}(m,n)}.$$

Masalan, $m = 10$, $n = 15$ bo‘lsa, $\mathrm{EKUB}(10,15) = 5$. Bu holda

$$F_{10} = 55, \qquad F_{15} = 610, \qquad F_5 = 5,$$

va

$$\mathrm{EKUB}(55,610) = 5 = F_5.$$

2-misol. $U_n(3,2)$ ketma-ketligi. Quyidagi Lucas ketma-ketlikni olaylik:

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 1, \qquad U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n,$$

bu yerda $P = 3$, $Q = 2$ va $\gcd(3,2) = 1$. Dastlabki hadlar quyidagicha:

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_2 = 3, \quad U_3 = 7, \quad U_4 = 15, \quad U_5 = 31, \quad U_6 = 63.$$

Bu ketma-ketlik aslida

$$U_n = 2^n - 1$$

ko‘rinishga ega. Endi $m = 4$, $n = 6$ bo‘lsin. U holda $\gcd(4,6) = 2$. Shuning uchun

$$\mathrm{EKUB}(U_4, U_6) = U_2.$$

Haqiqatan,

$$\mathrm{EKUB}(15,63) = 3 = U_2.$$

3-misol. $U_n(2,1)$ ketma-ketligi. Agar

$$U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$$

bo‘lsa, dastlabki hadlar

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_2 = 2, \quad U_3 = 3, \quad U_4 = 4, \quad \ldots$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Demak, bu holda

$$U_n = n.$$

Shuning uchun asosiy formula oddiy EKUB xossasiga aylanadi:

$$EKUB(U_m, U_n) = EKUB(m, n) = U_{EKUB(m,n)}.$$

Kuchli bo‘linuvchanlikning chegarasi

Har qanday rekurrent ketma-ketlik kuchli bo‘linuvchan bo‘lavermaydi. Masalan, Lucas sonlari

$$L_0 = 2, \qquad L_1 = 1, \qquad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

formula bilan aniqlanadi. Uning dastlabki hadlari

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18, \ldots$$

bo‘ladi. Endi $L_2 = 3$ va $L_4 = 7$. Shunda

$$EKUB(L_2, L_4) = EKUB(3,7) = 1.$$

Lekin $EKUB(2,4) = 2$ va $L_{EKUB(2,4)} = L_2 = 3$. Demak,

$$EKUB(L_2, L_4) \neq L_{EKUB(2,4)}.$$

Bu misol kuchli bo‘linuvchanlik maxsus boshlang‘ich shartlar va rekurrent tuzilishga bog‘liq ekanini ko‘rsatadi, [4].

Xulosa. Lucas tipidagi rekurrent ketma-ketliklar Fibonachchi sonlarining tabiiy umumlashmasi hisoblanadi. Ular

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 1, \qquad U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n$$

formula orqali aniqlanadi. Agar $EKUB(P, Q) = 1$ bo‘lsa, bu ketma-ketliklar kuchli bo‘linuvchan bo‘ladi:

$$EKUB(U_m, U_n) = |U_{EKUB(m,n)}|.$$

Fibonachchi ketma-ketligi $P = 1$, $Q = -1$ qiymatlarda ushbu nazariyaning eng mashhur xususiy holidir. Shuningdek, $U_n(3,2) = 2^n - 1$ va $U_n(2,1) = n$ kabi ketma-ketliklar ham kuchli bo‘linuvchanlik xossasini ko‘rsatadigan sodda misollar hisoblanadi. Shunday qilib, Lucas tipidagi kuchli bo‘linuvchan rekurrent ketma-ketliklar sonlar nazariyasi va rekurrent munosabatlar nazariyasini bog‘lovchi muhim obyektlardandir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Lucas, E. *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*. American Journal of Mathematics, 1878.
2. Ward, M. *The Law of Repetition of Primes in an Elliptic Divisibility Sequence*. Duke Mathematical Journal, 1948.
3. Ribenboim, P. *The New Book of Prime Number Records*. New York: Springer, 1996.
4. Koshy, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: Wiley, 2001.
5. Vajda, S. *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section*. Chichester: Ellis Horwood, 1989.
6. Everest, G., van der Poorten, A., Shparlinski, I., Ward, T. *Recurrence Sequences*. Providence: American Mathematical Society, 2003.