International Scientific Journal

SCIENTIFIC RESEARCH, INNOVATIONS, AND MODERN APPROACHES

SRI&MA

SCIENTIFIC RESEARCH, INNOVATION AND MODERN APPROACHES

- Articles in all scientific fields
- VOLUME 1.
- Issue 1. 2026

- Indexed in international databases
- DOI assigned
- Certificate & online link
- IMRAD Standard

scientists21.org

t.me/SRIMA_Journal

“SCIENTIFIC RESEARCH, INNOVATIONS AND MODERN APPROACHES” xalqaro ilmiy jurnali Farg‘ona davlat universiteti kengashi ruxsati bilan tashkil etilgan.

2025-yil 27-dekabr. 5-sonli yigilishi.

BOSH MUHARRIR

Tojiboyev I.T. – Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

MAS’UL MUXARRIR

Ismoilov A.I. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori(PhD).

TAXRIRIYAT A’ZOLARI

1. Karimov K.T. – Fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent.
2. Rasulov V.R. – Fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent.
3. Jurayev V.T. –Pedagogika fanlari doktori (DSc), dotsent.
4. Sharofutdinova R.Sh – Pedagogika fanlari doktori (DSc), dotsent.
5. Qayimov A. – Filologiya fanlari fanlari doktori (DSc), dotsent.
6. Mamatqulova S.A. – Kimyo fanlari bo‘yicha fan doktori (DSc), professor.
7. Xaydarov I.U.– Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.
8. Raximov Q.O. – Texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent
9. Zaynolobidinova S.M. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
10. Ro‘zaliyev Sh. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
11. Onarqulov M.K. – Fizika– matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
12. Umarov Sh.A. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
13. Mamatova Z.X. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD),dotsent.
14. Sharofutdinov I.U. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
15. Oripov Sh.A. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
16. Toshboltayev F.O‘. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
17. Abduraximova F.B. – Filologiya fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
18. Tojaliyev A.A. – Falsafa fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
19. Oripov A.A. – Iqtisodiyot fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.

MUNDARIJA

1. **РАСУЛОВ Р.Я., РАСУЛОВ В.Р., МУМИНОВ И.А., ФАРМАНОВ И. ДВУХ И ТРЕХ ФОТОННЫЙ ЛИНЕЙНО-ЦИРКУЛЯРНЫЙ ДИХРОИЗМ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ** **7**
2. **IBRAGIMOV SH.M. PERSONALIZED LEARNING SYSTEMS BASED ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE: MODELS, METHODS AND APPLICATIONS.** **19**
3. **MIRZARABJONOVA O.I. ODDIY NYUTON USULI VA MODIFIKATSIYALANGAN NYUTON USULINING TAQQOSLANISHI.** **29**
4. **SHAROFUTDINOV I.U., SHOVKATJONOV K.Q., SHOVKATJONOVA N.J. MURAKKAB MASALALARNI MODELLASHTIRISHGA DOIR MASALALAR** **37**
5. **MO‘YDINJONOV S.O‘. TAKOMILLASHTIRILGAN EYLER USULINING KOSHI MASALASINI YECHISHDAGI AFZALLIKLARI** **44**
6. **ROJIBOYEVA M.A. ENERGIYA SAQLANISH SHARTINI QANOATLANTIRUVCHI BARQAROR SONLI SXEMALAR QURISH** **52**
7. **SHAROFUTDINOV I.U., MUHAMMADVALIYEVA M.Z. MUVOZANAT VA TURG‘UNLIK MASALALARIGA DOIR MASALALARNI MODELLASHTIRISH** **60**
8. **MUHAMMADVALIYEVA M.Z. ISSIQLIK ALMASHINUVI JARAYONLARINI AYNIGAN YADROLI INTEGRAL TENGLAMALAR ASOSIDA HIBRID ANALITIK–SONLI MODELLASHTIRISH** **69**
9. **TOJIMATOV I.I. CHEGARAVIY MASALALARNI SONLI YECHISHNING FARQLASH USULLARI.** **76**
10. **TOJIMAMATOV I. N., SHOVKATJONOVA N.J. MA`LUMOTLARNI KIRITISH UCHUN SHAKLLAR YARATISH** **81**
11. **ISMOILOV A.I., XUDOYBERDIYEV N.Z. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMALARINI SONLI INTEGRALLASH USULLARI** **84**

12. **YO‘LDOSHEV N.G. KVADRATUR FORMULALARI ASOSIDA INTEGRAL TENGLAMALARNING APROKSIMATSIYASI** **88**
13. **ISMOILOV A.I., ABDULLAYEVA D.D. VATARLAR USULI VA UNING NYUTON USULIGA NISBATAN AFZALLIKLARI** **99**
14. **O‘KTAMJONOVA N.A. FIZIK JARAYONLARNI (ISSIQLIK, DIFFUZIYA, TO‘LQIN) VARIATSION USUL YORDAMIDA SONLI MODELLASHTIRISH.** **109**
15. **SHOVKATJONOV K. TENG ORALIQLI TUGUNLARDA NYUTON INTERPOLYATSION FORMULASI YORDAMIDA YAQINLASHTIRISH** **117**
16. **SHOVKATJONOVA N.J. NYUTON INTERPOLYATSION FORMULASI VA AYIRMALAR NISBATI YORDAMIDA INTERPOLYATSIYANI HISOBLASH.** **121**
17. **TOJIMAMATOV I.N. SHOVKATJONOVA N.J. MA`LUMOTLAMI KIRITISH UCHUN SHAKLLAR YARATISH.** **125**
18. **XAFIZOVA M.R. LU–AJRATISH (DEKOMPOZITSIYA) USULI YORDAMIDA CHIZIQLI SISTEMALARNI SAMARALI YECHISH** **128**
19. **ADHAMOVA V.E. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHNING ANIQ (TO‘LIQ ELIMINATSIYA) USULLARI VA ULARNING ALGORITMIK TAHLILI** **139**
20. **ISMOILOV A.I., ARABOVA F.A. LAGRANJ VA NYUTON INTERPOLYATSION FORMULALARINING ANIQ MISOLLARDA TAQQOSLANISHI.** **148**
21. **TOJIMAMATOV I.N. HABIJONOV B.B. SQL SERVEMING ODDIY INSTRUMENTAL VOSITALARI** **156**
22. **MADAMINOVA K.B. VARIATSION PRINSIPLAR ASOSIDA INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISHNING SONLI TAHLILI** **160**
23. **G‘AFFOROVA Z.I. INTERPOLYASION MASALANING YAGONALIGI VA YECHIMNING BARQARORLIGI SHARTLARI** **165**

24. BUZURUKOVA X. PYTHON VA MATLAB MUHITIDA TRAPETSIYA VA SIMPSON FORMULARINI AMALIY SINOVDAN O‘TKAZISH 180
25. MASHRABOV I.B. RUNGE-KUTTA USULI YORDAMIDA DIFFERENSIAL TENGLAMA YECHIMI 183
26. TURSUNALIEVA M.Z. CREATING ARTIFICIAL IMAGES AND VIDEO USING GENERATIVE NEURON NETWORKS (GAN, DIFFUSION MODELS) 187
27. SHUHRATJONOVA G.SH. LAPLAS TENGLAMASINI CHEKLANGAN FARQLAR USULI YORDAMIDA SONLI YECHISH VA BARQARORLIK TAHLILI 195
28. MAMATOVA Z.X., MASHRABOV I.B. TA’LIM MUASSASALARIDA MATEMATIKA O‘QITISHDA GURUHLI VA AN’ANAVIY O‘QITISH TEXNOLOGIYALARINI QO‘LLASH SAMARADORLIGINI QIYOSIY O‘RGANISH 202
29. BURXONOV A.A. INTEGRAL TENGLAMALAR UCHUN INTERATSION YONDASHUVLARNING KOVERGENSIYA SHARTLARI 209
30. TOSHBOLTAYEV F.O‘., MO‘MINJONOVA S.I., XAYDAROVA O.T. TALABALAR UCHUN MOBIL ELEKTRON KUTUBXONA ILOVASINI ISHLAB CHIQISH 217
31. RAHIMOV Q.O., NO’MONOVA M.A. O‘ZBEKISTON IQLIMINING OXIRGI 5 YILDAGI O‘ZGARISHLARI: AMALIY MATEMATIK TAHLIL 223
32. RO‘ZALIYEV SH.A. TOSHBOLTAYEV F.O‘., XAYDAROVA O.T., MO‘MINJONOVA S.I. JARAYON MODELLARINI HODISALAR JURNALI ASOSIDA TAKOMILLASHTIRISH 226
33. TURSUNALIYEVA O.E. RITS USULI YORDAMIDA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLI CHEGARAVIY MASALANI TAQRIBIY YECHISH 231
34. TOJIMAMATOVA SH.M. NUTQIY USLUBLARDA DEYKSISNINIG LINGVOHRAGMATIK XUSUSIYATLARI. 237
35. ABDUSALAMOVA N.M. TILSHUNOSLIKDA DEYKSIS TUSHUNCHASI HAQIDA MULOHAZALAR. 241
36. RO‘ZIKULOVA B.M. O‘ZBEK TILINING LEKSIKASIDAGI NOFAOL O‘ZLASHMA ARABCHA SO‘ZLAR XUSUSIDA 245

37. AXMEDOV A.A., FAZLIDDINOV X.D. CHIZIQLISIZ ALGEBRIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHIMINI TOPISHNING ITERATSION USULLARI. 249

ДВУХ И ТРЕХ ФОТОННЫЙ ЛИНЕЙНО-ЦИРКУЛЯРНЫЙ ДИХРОИЗМ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ.

Расулов Р.Я[1]., Расулов В.Р[2]., Муминов И.А[3]., Фарманов И[4].

[1]ФерГУ, д.ф.-м., профессор, [2]ФерГУ, д.ф.-м., доцент, [3]ФерГУ, д.ф.ф.-м.н.

[4]ФерГУ, докторант, r_rasulov51@mail.ru

Аннотация: Теоретически исследован линейно-циркулярный дихроизм двух и трех фотонного поглощения света в полупроводниках кубической симметрии дырочной проводимости. Рассчитаны матричные элементы двух и трехфотонных оптических переходов, протекающих между подзонами валентной зоны полупроводника. При этом учтены переходы, связанные как с неодновременным поглощением отдельных фотонов, так и одновременным поглощением двух фотонов, а также определена спектральная и температурная зависимость коэффициента двух и трехфотонного поглощения поляризованного излучения.

Ключевые слова: линейно и циркулярно поляризованный свет, матричный элемент, оптический переход, вероятность перехода, носители тока, валентная зона, полупроводник.

ВЕДЕНИЕ

Создание лазеров и мазеров дает возможность провести исследования выстраивания по импульсу и оптической ориентации моментов носителей тока при одно- многофотонном поглощении поляризованного излучения в полупроводниках, дающие информации о природе электрон-фотонного взаимодействия и спин-зависимой релаксации импульса электронов [1-4].

В настоящее время многофотонный линейно-циркулярный и циркулярно-циркулярный дихроизм исследован в полупроводниках при поглощении света различной частоты и поляризации [2], обусловленный междузонными оптическими переходами, т.е. оптическим переходами между валентной зоной и зоной проводимсоти полупроводника. В частности, в [2] построена теория линейно-циркулярного дихроизма многофотонного межзонного поглощения света в полупроводниках в области развитой нелинейности, т.е. в области интенсивности, когда удовлетворяется условие

$\frac{2\pi e^2 I\left|\vec{e}\vec{p}_{cv}\right|^2}{cn_\omega\omega^2 m_0^2\left(\hbar\omega\right)^2}\langle\langle 1$, где $\vec{e}$ и I - вектор поляризации и интенсивность света, $p_{cv}=p_{c\vec{k},v\vec{k}}=\vec{e}\vec{p}_{c\vec{k},v\vec{k}}$ – межзонный матричный элемент оператора импульса, n_ω - показатель преломления света среды на частоте ω, m_0-масса свободного электрона.

ЛИТЕРАТУРА И МЕТОД

В вышеуказанных работах открытыми остались процессы поглощения света, обусловленные двух и трехфотонными оптическими переходами между подзонами одной, например, валентной зоны или зоны проводимости полупроводника, а также не учтены одновременное поглощение двух фотонов [10-12], к чему посвящено данное сообщение. Ниже проведем квантово-механический анализ двух и трехфотонного линейно-циркулярного дихроизма в полупроводниках кубической симметрии со сложной валентной зоной.

Хотя однофотонное (линейное по интенсивности) поглощение поляризованного излучения в полупроводниках, обусловленное оптическими переходами между подзонами легких и тяжелых дырок валентной зоны, исследуется как теоретически, так и экспериментально уже довольно давно ([5] и ее ссылки), но вопрос о линейно-циркулярном дихроизме (см., например, [10-12]) двух и трех фотонного поглощения света с учетом одновременного поглощения света остается открытым.

Поэтому ниже рассмотрим двух и трех фотонное поглощение поляризованного излучения в полупроводниках кубической симметрии, обусловленное прямыми оптическими переходами между подзонами легких и тяжелых дырок.

ОБСУЖДЕНИЕ

В пространственно-однородном случае матричные элементы оператора как междузонных, так и внутризонных оптических переходов состоят из двух составляющих, одна из которых описывает однофотонное взаимодействие, а вторая описывает взаимодействия электронов с двумя одновременно

поглощающимися фотонами [10-16]. Тогда следуя по [10-16] с учетом вклада эффекта когерентного насыщения в коэффициент N фотонного поглощения света $K^{(N)}(\omega,T)$ имеем

$$K^{(N)}(\omega,T)=2\pi N\frac{\omega}{I}\rho(N\hbar\omega)F(\beta,N,\omega)\sum_{m=\mp1/2;m'=\mp3/2;}\left\langle\frac{\left|M^{(N)}_{m',m}(\vec{k})\right|^2}{\sqrt{1+4\frac{\alpha_\omega}{\hbar^2\omega^2}\left|M^{(N)}_{m',m}(\vec{k})\right|^2}}\right\rangle, \quad (1)$$

где $M^{(N)}_{m;m'}(k)-$ составной матричный элемент оптического перехода из состояния $\left|m'\vec{k}\right\rangle$ в $\left|m\vec{k}\right\rangle$, $F(\beta,N,\omega)=\left[1-\exp\left(N\hbar\omega/\left(k_BT\right)\right)\right]\exp\left[\left(E_F-E_1^{(N)}\right)/k_BT\right]$, $E_1^*=m_2\hbar\omega\left(m_2-m_1\right)$, $I=\frac{n_\omega\omega^2A_0^2}{2\pi c}$ (A_0)- интенсивность (амплитуда вектора потенциала) света, $E_{l\vec{k}}$-энергетический спектр дырок в подзоне l $(l=1(l=2)$- для тяжелых (легких) дырок), $n_\omega-$коэффициент преломления на частоте ω, $\hbar\omega-$энергия фотона, $\rho(N\hbar\omega)=\mu_k_\omega^{(N)}/(\pi^2\hbar^2)$ - приведенная плотность состояний фотовозбужденных дырок, $k^{(N)}=\left(2\mu_N\omega/\hbar\right)^{1/2}$, $\alpha_\omega=6\omega^2T_1^{(1)}T_2^{(1)}\frac{I}{I_0}$, $I_0=\frac{cn_\omega\hbar^3\omega^3}{2\pi|B|}$, знак $\langle...\rangle$ означает усреднение по телесному углу волнового вектора дырок $\vec{k}$. Остальные величины общеизвестные. Здесь электронам в подзоне $l=1$ (тяжелые дырки) соответствуют состояния с проекцией $m=\pm3/2$ углового момента на направление $\vec{k}$, а электронам в подзоне $l=2$ (легкие дырки) - состояния с $m=\pm1/2$. Например, для *p-GaAs* и $I_0=13420\frac{kWt}{cm^2}$ при $\hbar\omega=17\ meV$, $m_2=0{,}045\,m_0$, $E_1^{(N)}=NE_1^*$.

Закон сохранения энергии, описывающий $\delta\left(E_{2\vec{k}}-E_{1\vec{k}}-N\hbar\omega\right)$ функцией надо учитывать в конечных результатах. Как указано в [10-16], использование этого соотношения в начальных или промежуточных этапах расчета, например, спектральной или температурной зависимости многофотонного

коэффициента поглощения света или поляризационно-зависимого фототока [14-16], может привести к ошибочным результатам.

Из (1) видно, что для определения спектральной или температурной зависимости коэффициента многофотонного поглощения света $K^{(N)}$, надо рассчитать матричные элементы многофотонных переходов, которых будем анализировать ниже для конкретных случаев.

Следуя по [12] матричный элемент двух и трех фотонного оптического перехода представим в виде

$$M^{(2)}_{m\vec{k},m'\vec{k}} = M^{(2)}_{m,m'} = \sum_{m''=\pm1/2,\pm3/2} \frac{M^{(1)}_{m,m''} M^{(1)}_{m'',m'}}{\left(E_{m''\vec{k}} - E_{m'\vec{k}} - \hbar\omega\right)} - \left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^2 \left[H^{(2)}_{\Gamma_6}(\vec{e}')\right]_{m,m'}, \tag{2а}$$

$$M^{(3)}_{m\vec{k},m'\vec{k}} = M^{(3)}_{m,m'} = \sum_{m''',m''=\pm1/2,\pm3/2} \left(\frac{M^{(1)}_{m,m'''} M^{(1)}_{m''',m''} M^{(1)}_{m'',m'}}{\left(E_{m'''\vec{k}} - E_{m'\vec{k}} - \hbar\omega\right)\left(E_{m''\vec{k}} - E_{m'\vec{k}} - \hbar\omega\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{M^{(1)}_{m,m''} M^{(2)}_{m'',m'}}{\left(E_{m''\vec{k}} - E_{m'\vec{k}} - 2\hbar\omega\right)} + \frac{M^{(2)}_{m,m''} M^{(1)}_{m'',m'}}{\left(E_{m''\vec{k}} - E_{m'\vec{k}} - \hbar\omega\right)} + \left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^3 \left[H^{(3)}_{\Gamma_6}(\vec{e}')\right]_{m,m'} \right) \tag{2б}$$

где $H^{(N)}_{\Gamma_6}(\vec{e}') = H^{(N)}_{\Gamma_6}\left(\vec{k} \to \vec{e}'\right)$, $H^{(N)}_{\Gamma_6}\left(\vec{k}\right)$ – эффектив гамильтониан дырок в представлении Латтинжера-Кона [17, 18], N=2,3, $e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}$ -компоненты вектора $\vec{e}'$, где $e_{x'}, e_{y'}$ – проекции $\vec{e}$ вектора поляризации света на оси x', y', перпендикулярные к волновому вектору дырок ($\vec{k}$). Первое слагаемое (2а) ((2б)) описывает двух (трех) квантовый межподзонный оптический переход, протекающий поглощением двух (трех) одинарных фотонов, а второе слагамое (2а) ((2б)) характеризует вклад двух (трех) фотонных оптических переходов, протекающих через виртуальные состояния, находящихся вдали от валентной зоны, в составной матричный элмент $M^{(2)}_{m\vec{k},m'\vec{k}}$ ($M^{(3)}_{m\vec{k},m'\vec{k}}$) Поэтому второе слагаемое (2а) ((2б)) описывает одновременное поглощение двух (трех) фотонов. В (2а, б) $H^{(2)}_{\Gamma_6}\left(\vec{k}\right)$ -гамильтониан Латинжера -Кона, а $H^{(3)}_{\Gamma_6}\left(\vec{k}\right)$ кубический по волновому вектору дырок $\left(\vec{k}\right)$ слагаемое в $H^{(N)}_{\Gamma_6}\left(\vec{k}\right)$. В частности для полупроводников кубической симметрии $H^{(3)} = D'\vec{J}\cdot\vec{K}$, $K_\alpha = k_\alpha\left(k^2_{\alpha+1} + k^2_{\alpha+2}\right)$,

J_α-матрицы оператора углового момента в представлении Γ_8 [17, 18], D'– зонный параметр полупроводника, например, для *p-GaAs* $D' = 3{,}9 \times 10^{-23}\, eV \cdot sm^3$.

Поскольку нас интересуют оптические переходы типа $|\pm 3/2\rangle \to |\pm 1/2\rangle$ и $|\pm 3/2\rangle \to |\mp 1/2\rangle$ поэтому приведем выражения для матричных элементов N фотонных оптических переходов $\left(\left\|M^{(N)}_{m,m'}\right\|\right)$, происходящих между подзонами валентной зоны полупроводника. При расчетах $\left\|M^{(N)}_{m,m'}\right\|$ обратим внимание на многофотонные оптические переходы, изображенные следующими фейнмановскими диаграммами; для $N=2$ рис.1 *a,b*, для $N=3$ рис.1 c-f, где диаграмма рис.1*a* описывает однофотонное поглощение света, диаграммs рис.1 *b* и *f* описывают одновременное поглощение двух и трех фотонов. Отметим здесь, что одновременное поглощение трех фотонов не исследовано в [12-17]

Далее проанализируем матричные элементы для различного типа двух и трехфотонных оптических переходов в зависимости от степени поляризации света. Сначала сгруппируем оптические переходы по их физической природе, т.е. рассмотрим как и последовательное поглощение двух или трех фотонов, так и одновременное поглощение двух фотонов. Расчеты показывают, что матричный элемент двух фотонного оптического перехода типа $|\pm 3/2\rangle \to |m\rangle \to |\pm 1/2\rangle$, описываемого диаграммой рис.1 *a*, равен $3\sqrt{3}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^2 Be'_{\pm}e_{z'}$, а для $|\pm 3/2\rangle \to |m\rangle \to |\mp 1/2\rangle$ равен $-\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^2 B\frac{\sqrt{3}}{2}e'^2_{\mp}$; матричный элемент двух фотонного оптического перехода типа $|\pm 3/2\rangle \Rightarrow |\pm 1/2\rangle$, описываемого диаграммой рис.1*a*, равен $-\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^2 B\sqrt{3}e'_z e'_{\mp}$, а для $|\mp 3/2\rangle \Rightarrow |\pm 1/2\rangle$ равен $-\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^2 B\frac{\sqrt{3}}{2}e'^2_{\mp}$. В результате получим выражение для квадрат модуля

матричного элемента двух фотонного оптического перехода, описываемого суммой фейнмановских диаграмм рис.1 *a, b*, в виде

$$\left|M^{(N=2)}_{\pm 3/2,\pm 1/2}(\vec{k})\right|^2 = 75\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^4 B^2 \left|e'_{\pm}e_{z'}\right|^2, \qquad (3)$$

а квадрат модуля матричного элемента двух фотонного оптического перехода типа $|\pm 3/2\rangle \to |m\rangle \to |\mp 1/2\rangle$, $|\mp 3/2\rangle \Rightarrow |\pm 1/2\rangle$ определяется как

$$\left|M^{(N=2)}_{\pm 3/2,\mp 1/2}(\vec{k})\right|^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^4 B^2 \left|e'^2_{\mp}\right|^2, \qquad (4)$$

и после углового усреднения имеем

$$\left\langle \left|M^{(N=2)}_{\pm 3/2,\mp 1/2}(\vec{k})\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{20}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^4 B^2 \begin{cases} 8 \text{ для линейной поляризации}, \\ 7 \text{ для линейной поляризации}, \end{cases}$$

Тогда коэффициент линейно-циркулярного дихроизма, рассчитанный для вышеуказанных оптических переходов равен 8/7. Эти результаты совпадают с результатами [14-16].

Если учтем эффект когерентного насыщения [5, 10-12], тогда вклад этого эффекта в матричный элемент вышеуказанных оптических переходов определяетмя как

$$\sum_{m'=\pm 1/2,\ m=\pm 3/2} \delta\left|M^{(N)}_{m'm}(\vec{k})\right|^2 = \sum_{m'=\pm 1/2,\ m=\pm 3/2} \frac{\left|M^{(N)}_{m'm}(\vec{k})\right|^2}{\sqrt{1+4\frac{\alpha_\omega}{\hbar^2\omega^2}\left|M^{(N)}_{m'm}(\vec{k})\right|^2}} - \left|M^{(N)}_{m'm}(\vec{k})\right|^2 . \qquad (5)$$

Для определения вероятностей многофотонных оптических переходов (или коэффициента поглощения света) требуется провести угловое усреднение выражений (3, 4, 5) по телесным углам волнового вектора дырок. Эти угловые усреднения для $N = 2,3,...$ с учетом эффекта когерентного насыщения (с учетом (5)) аналитически не решается. Учитывая, что для экспериментально интересуемой области интенсивности света выполняется условие $1 >> 4\frac{\alpha_\omega}{\hbar^2\omega^2}\left|M^{(N)}_{m'm}(\vec{k})\right|^2$, поэтому удобно произвести интегрирование по телесным

углам волнового векторы дырок разлагая радикал (5) в ряд. В частности для одно и двухфотонных оптических переходов имеем

$$\sum_{m'=\pm1/2,\ m=\pm3/2} \delta\left|M_{m'm}^{(N=1)}(\vec{k})\right|^2 = -12\alpha_\omega\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\sqrt{B}\right)^4\left(\frac{B^2k^2}{\hbar\omega}\right)^2\left|e'_-\right|^4, \qquad (6а)$$

$$\sum_{m'=\pm1/2,\ m=\pm3/2} \delta\left|M_{m'm}^{(N=2)}(\vec{k})\right|^2 = -\frac{9}{4}\frac{\alpha_\omega}{\hbar^2\omega^2}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^8 B^4\left[1296\left|e'_\pm e_{z'}\right|^4 + \left(36e_{z'}{}^2\left|e'_+\right|^2 + \left|e'^2_-\right|^2\right)^2\right] \qquad (6б)$$

и проведя угловое интегрирование получим следующие соотношения

$$\left\langle \sum_{m'=\pm1/2,\ m=\pm3/2} \delta\left|M_{m'm}^{(N=1)}(\vec{k})\right|^2 \right\rangle = -\frac{4}{5}\alpha_\omega\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\sqrt{B}\right)^4\left(\frac{B^2k^2}{\hbar\omega}\right)^2 \begin{cases} 8 \text{ для линейной поляризации,} \\ 7 \text{ для циркулярной поляризации.} \end{cases}$$

(7а)

$$\left\langle \sum_{m'=\pm1/2,\ m=\pm3/2} \delta\left|M_{m'm}^{(N=1)}(\vec{k})\right|^2 \right\rangle = -\frac{9}{4}\frac{\alpha_\omega}{\hbar^2\omega^2}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^8 B^4\frac{1}{315}\begin{cases} 29792 \text{ для линейной поляризации,} \\ 30395 \text{ для циркулярной поляризации.} \end{cases}$$

(7б)

где , откуда видно, что вклад эффекта когерентного насыщения в коэффициент одно и двух фотонного линейно-циркулярного дихроизма в полупроводниках кубической симметрии соответственно равен 1,1 и 0,98.

Теперь переходим к анализу трехфотонных оптических переходв между подзонами тяжелых и легких дырок. Если рассмотрим оптические переходы, происходящие поглощением трех отдельных фотонов, описываемых диаграммой рис.1*c*, тогда поляризационная зависимость матричного элемента оптического перехода типа $|+3/2\rangle \to |m\rangle \to |m'\rangle \to |+1/2\rangle$ выражается как $2\sqrt{3}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^3\frac{(Bk)^3}{(\hbar\omega)^2}e'_+\left(4\left|e_{z'}\right|^2 - \frac{3}{8}\left|e'_+\right|^2\right)$, где по номерам промежуточных состояний $|m\rangle, |m'\rangle$ проводится суммирование. Матричный элемент трехфотонного оптического перехода типа рис.1*d*, где сначала поглощается один фотон, а далее одновременно поглощаются два фотона,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^3\frac{B^2k}{\hbar\omega}e'_+ \times \times \left\{\left[2\left(\frac{A}{B}-1\right)+2e'^2_z+\frac{1}{2}e'^2_\perp\right]-4\left(\frac{A}{B}-1\right)e'^2_z\right\},$$

матричный элемент оптического перехода типа рис.1*e*, где сначала одновременно поглощаются два фотона, матричный элемент оптического перехода типа рис.1*f*, а далее поглощается один фотон, определяется аналогичным образом. Сумма матричных элементов последних двух переходов выражается как

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^3\frac{B^2k}{\hbar\omega}e'_+\left(10e'^2_z-e'^2_\perp\right).$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате поляризационная зависимость суммы всех трехфотонных оптических переходов, описываемых диаграммами рис.1 *c, d, e* выражается как $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^3\frac{B^2k}{\hbar\omega}e'_+\left[\left(-10e'^2_z+e'^2_\perp\right)+4\frac{Bk^2}{\hbar\omega}\left(4\left|e_{z'}\right|^2-\frac{3}{8}\left|e'_+\right|^2\right)\right]$. Если учтем закон сохранения энергии в трехфотонных оптических переходах и $e'^2_\perp=\left|e'_+\right|^2$, тогда последнее выражение принимает вид $-\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^3\frac{B^2k}{\hbar\omega}e'_+\left(136e'^2_z-13e'^2_\perp\right)$. Тогда квадрат модуля трехфотонных оптичнских переходов типа рис.1 *a* имеет вид

$$\left\{\left|M^{(1-1-1)}_{+1/2;+3/2}\right|^2+\left|M^{(1-1-1)}_{-1/2;-3/2}\right|^2\right\}=\left(\frac{eA_0}{c\hbar}Bk\right)^3\frac{24}{(\hbar\omega)^4}\left\{\left|e'_+\left(4\left|e_{z'}\right|^2-\frac{3}{8}\left|e'_+\right|^2\right)\right|^2+\left|e'_-\left(4\left|e_{z'}\right|^2-\frac{3}{8}\left|e'_-\right|^2\right)\right|^2\right\}. \quad (8)$$

После проведения углового усреднения по телесному углу волнового вектора дырок имеем: $\left\langle\left\{\left|M^{(1-1-1)}_{+1/2;+3/2}\right|^2+\left|M^{(1-1-1)}_{-1/2;-3/2}\right|^2\right\}\right\rangle_{linear\ pol}=\frac{297}{4}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^6B^3\frac{1}{\hbar\omega}$ -для линейной; $\left\langle\left\{\left|M^{(1-1-1)}_{+1/2;+3/2}\right|^2+\left|M^{(1-1-1)}_{-1/2;-3/2}\right|^2\right\}\right\rangle_{circ.pol.}=\frac{405}{16}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^6\frac{B^3}{\hbar\omega}$ - для циркулярной поляризации. Из последних соотношений видно, что коэффициент трехфотонного линейно-циркулярного дихроизма, когда фотоны поглощаются по отдельности, равен $\eta^{(1-1-1)}_{\pm1/2;\pm3/2}=44/15.$

Квадрат модуля поляризационной зависимости суммарных матричных элементов оптических переходов типа рис.1 *c, d, e, f* принимает вид

$$\sum_{m=\pm3/2;m'=\pm1/2}\left|M^{(3)}_{m,m'}\right|^2=\frac{3}{4}\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^6\left(\frac{B^2k}{\hbar\omega}\right)^2\left\{e'^2_\perp\left[\left(-10e'^2_z+e'^2_\perp\right)-6\left(4\left|e_{z'}\right|^2-\frac{3}{8}\left|e'_\perp\right|^2\right)\right]^2+\right.$$

,

$$\left.+4\frac{\hbar\omega}{B^2k}D'\left(34e'^2_\perp e'^4_z-\frac{13}{4}e'^4_\perp e'^2_z\right)+4\left(\frac{\hbar\omega D'}{B^2k}\right)^2\left(\left|e'_\perp\right|^2e'^4_z+\left|e'_\perp\right|^2e'^2_ye'^2_x\right)\right\}$$

Тогда усредняя последнего соотношения по волновому вектору дырок получим: $\left\langle\sum_{m=\pm3/2;m'=\pm1/2}\left|M^{(3)}_{m,m'}\right|^2\right\rangle_{linear}=\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^6\left(\frac{B^2k}{\hbar\omega}\right)^2\left[21{,}5+4{,}9\frac{\hbar\omega}{B^2k}D'+0{,}5\left(\frac{\hbar\omega D'}{B^2k}\right)^2\right]$,

-для линейной,

$$\left\langle\sum_{m=\pm3/2;m'=\pm1/2}\left|M^{(3)}_{m,m'}\right|^2\right\rangle_{circ}=\left(\frac{eA_0}{c\hbar}\right)^6\left(\frac{B^2k}{\hbar\omega}\right)^2\left[22{,}5+7{,}8\frac{\hbar\omega}{B^2k}D'+0{,}49\left(\frac{\hbar\omega D'}{B^2k}\right)^2\right]$$

-для циркулярной поляризации.

Далее определим спектральную и температурную зависимоть коэффициента двухфотонного поглощения. Следуя по [5, 10-12] определим коэффициент N фотонного поглощения поляризованного света в виде

$$K^{(N)}=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{\hbar\omega}{I}\sum_{\vec{k},m=\pm1/2;m'=\pm3/2}\left(f^{(N)}_{1\vec{k}}-f^{(N)}_{2\vec{k}}\right)\left|M^{(N)}_{m;m'}(k)\right|^2\delta\left(E_{2\vec{k}}-E_{1\vec{k}}-N\hbar\omega\right),\qquad(10)$$

где $f^{(N)}_{l\vec{k}}$ - неравновесная функция распределения дырок, участвующих в N-фотонном оптическом переходе. Тогда коэффициенты двух и трехфотонного поглощения света без учета эффекта когрентного насыщения определяются выражениями

$$K^{(N=2)}=2\sqrt{2}\Xi^{(2,1)}_{m'm}\exp\left[-m_{hh}m_{lh}\hbar\omega/\left(m_{hh}-m_{lh}\right)k_BT\right]K^{(N=1)}\ ,\qquad(11)$$

$$K^{(N=3)}=3\sqrt{3}\Xi^{(3,1)}_{m'm}\exp\left[-2m_{hh}m_{lh}\hbar\omega/\left(m_{hh}-m_{lh}\right)k_BT\right]K^{(N=1)}\ .\qquad(12)$$

где $K^{(N=1)}$-коэффициент однофотонного поглощения света (см. [5, 13]), $E^{(N=2)}_1=2E^*_1$, $E^*_1=\frac{m_{hh}m_{lh}}{m_{hh}-m_{lh}}\hbar\omega$, $\Xi^{(2,1)}_{m'm}=\xi^2$ и $\Xi^{(3,1)}_{m'm}=111\cdot\xi^4$-для линейной, $\Xi^{(2,1)}_{m'm}=0.65\xi^2$ и $\Xi^{(3,1)}_{m'm}=102\cdot\xi^4$-для циркулярной поляризации, $\xi=\frac{eA_0}{c\hbar}\sqrt{B}$.

В заключении отметим, что поляризационная зависимость вероятности двух, трех и четырех фотонного оптического перехода между валентной зоной

(v) и зоной проводимости (c) полупроводника кубической симметрии определяется, соответственно, тензором четвертого, шестого и восьмого ранга, т.е. $W_{cv}^{(N=2)}\left(\vec{e}\right)=\Xi_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(N=2)}e_{\alpha}e_{\beta}e_{\gamma}^{*}e_{\eta}^{*}$ ($W_{cv}^{(N=3)}\left(\vec{e}\right)=\Xi_{\alpha\beta\gamma\eta\mu\lambda}^{(N=3)}e_{\alpha}e_{\beta}e_{\gamma}^{*}e_{\eta}^{*}e_{\mu}e_{\lambda}^{*}$ и $W_{cv}^{(N=4)}\left(\vec{e}\right)=\Xi_{\alpha\beta\gamma\eta\mu\xi\zeta\chi}^{(N=4)}e_{\alpha}e_{\beta}e_{\gamma}^{*}e_{\eta}^{*}e_{\mu}e_{\xi}e_{\zeta}^{*}e_{\chi}^{*}$), где по повторяешимся индексам подразумывается суммирование, $\alpha,\beta,\gamma,\eta,\mu,\xi,\zeta,\chi=x,y,z..$ Например, для полупроводников тетраэдрической симметрии тензор $\Xi_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(N=2)}$ имеет три линейно независимые компоненты. Поэтому

$$W_{cv}^{(N=2)}\left(\vec{e}\right)=\Xi_{1}^{(N=2)}\left|\vec{e}\vec{e}\right|^{2}+\Xi_{2}^{(N=2)}\left|\vec{e}\vec{e}^{*}\right|^{2}+\Xi_{3}^{(N=2)}\left(\left|e_{x}\right|^{4}+\left|e_{y}\right|^{4}+\left|e_{z}\right|^{4}\right). \quad (13)$$

Здесь параметр $\Xi_{n}^{(N=2)}$ ($\Xi_{\alpha\beta\gamma\eta\mu\lambda}^{(N=3)}$ и $\Xi_{\alpha\beta\gamma\eta\mu\xi\zeta\chi}^{(N=4)}$) пропорционален квадрату (кубичексой и четвертой степени) интенсивности света, где считали, что оси Ox,Oy,Oz направлены по главным осям симметрии полупроводника. Если свет распространяется по оси $[111]$, тогда в полупроводниках тетраэдрической и кубической симметрии имеем

$$W_{cv}^{(N=2)}\left(\vec{e},\vec{q}\uparrow\uparrow[111]\right)=(\Xi_{1}^{(N=2)}+\frac{1}{2}\Xi_{3}^{(N=2)})\left|\vec{e}\vec{e}\right|^{2}+(\Xi_{2}^{(N=2)}+\frac{1}{3}\Xi_{3}^{(N=2)})\left|\vec{e}\vec{e}^{*}\right|^{2}. \quad (14)$$

Здесь $\vec{q}$ - волновой вектор фотона. Тогда коэффициент двух фотонного линейно-циркулярного дихроизма $\chi_{cV}^{(N=2)}=W_{cV}^{(N=2,lin)}/W_{cV}^{(N=2,circ)}$ определяется соотношением $\left(2\Xi_{2}^{(N=2,lin)}+\Xi_{3}^{(N=2,lin)}\right)/\left(3\Xi_{2}^{(N=2,circ)}+\Xi_{3}^{(N=2,circ)}\right)$, где учтены, что для линейной поляризации $\left|\vec{e}\cdot\vec{e}\right|=1,\ \vec{e}\times\vec{e}^{*}=0$ (для циркулярной пояляризации наоборот) и для произвольного комплексного вектора $\vec{a}$ выполняется соотношение $\left|\vec{a}\cdot\vec{a}^{*}\right|^{2}+\left|\vec{a}\times\vec{a}^{*}\right|^{2}=(\vec{a}\times\vec{a}^{*})^{2}$.

Аналогичным образом можно произвести феноменологический анализ величин $\chi_{cV}^{(N=3)}=W_{cV}^{(N=3,lin)}/W_{cV}^{(N=3,\,circ)}$, $\chi_{cV}^{(N=4)}=W_{cV}^{(N=4,lin)}/W_{cV}^{(N=4,\,circ)}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим также, что спектральная и поляризационная зависимости вероятности оптического перехода, происходящего поглощением двух

фотонов с различной частотой (ω_1, ω_2) и поляризацией ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) и обусловленного переходами валентной зоны и зоны проводимости определяется соотношением $\left(\omega_1^{-2}+\omega_2^{-2}+\omega_1^{-1}\omega_2^{-1}\left|\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2^{*}\right|^2\right)$. Тогда проведя угловое усреднение вероятности межподзонного оптического перехода по телесным углам волнового вектора электронов, нетрудно убедиться в том, что для полупроводников со сферической зонной структурой не возникает двух фотонный межзонный линейно-циркулярный дихроизм, поскольку $\left\langle\left|\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2^{*}\right|^2\right\rangle$ величина не зависит от степени поляризации света и она возникает при учете эффекта когерентного насыщения. Микроскопический анализ вышеуказанных между зонных оптических переходов требует отдельного рассмотрения, чему будет посвящена следующая работа.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ivchenko E.L. Optical Spectroscopy of Semiconductor Nanostructures / E.L. Ivchenko. – Harrow: Alpha Science International Ltd., 2005. – XII, 427 p.

2. Ивченко Е.Л. Новые оптические явления в полупроводниках: Дисс. … д-ра физ.-мат. наук. – Ленинград, 1983. – 148 с.

3. Ивченко Е.Л. Двухфотонное поглощение света и оптическая ориентация свободных носителей // ФТТ. – 1972. – Т. 14, № 12. – С. 3489.

4. Dyakonov M.I. (Ed.). Spin Physics in Semiconductors. – Springer-Verlag, Heidelberg, 2008. – 447 p. (ISSN 0171-1873, ISBN 978-3-540-78819-5, e-ISBN 978-3-540-78820-1).

5. Optical Orientation / Eds. F. Meier, B.P. Zakharchenya. – North-Holland, New York–Tokyo, 1984. – 534 p.

6. Шалыгин В.А. Оптические и фотогальванические эффекты в объемных полупроводниках и двумерных структурах: Автореф. дисс. … д-ра физ.-мат. наук. – Санкт-Петербург, 2013. – 34 с.

7. Расулов Р.Я. Поляризационные оптические фотогальванические эффекты в полупроводниках при линейном и нелинейном поглощении света:

Дисс. … д-ра физ.-мат. наук. – ФТИ РАН им. акад. Иоффе, Санкт-Петербург, 1993. – 168 с.

8. Negres R.A., Hales J.M., Kobyakov A., Hagan D.J., Van Stryland E.W. // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 2002. – Vol. 38. – P. 1205–1209.

9. He J., Qu Y., Li H., Mi J., Ji W. // Optical Society of America. – 2005. – Vol. 13. – P. 9235–9241.

10. Hurlbut W.C., Lee Y.-S., Vodopyanov K.L., Kuo P.S., Fejer M.M. // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32. – P. 668–673.

11. Pearl S., Rotenberg N., van Driel H.M. // Applied Physics Letters. – 2008. – Vol. 93. – P. 131102–131109.

12. Rasulov V.R., Rasulov R.Ya., Eshboltaev I. // Physics of the Solid State. – Springer, 2017. – Vol. 59, No. 3. – P. 463–468.

13. Rasulov V.R., Rasulov R.Ya., Eshboltaev I. // Russian Physics Journal. – Springer, 2016. – Vol. 58, No. 12. – P. 1681–1686.

14. Расулов Р.Я. // ФТТ. – 1993. – Т. 35, № 6. – С. 1107.

15. Ганичев С.Д., Ивченко Е.Л., Расулов Р.Я., Ярошецкий И.Д., Авербух Б.Я. // ЖЭТФ. – 1993. – Т. 103, № 1. – С. 198.

16. Rasulov V.R., Rasulov R.Ya., Eshboltaev I. // Semiconductors. – Springer, 2016. – Vol. 50, No. 2. – P. 145–153.

17. Rasulov V.R., Rasulov R.Ya., Eshboltaev I. // Russian Physics Journal. – Springer, 2016. – Vol. 59, No. 1. – P. 92–98.

18. Расулов В.Р., Расулов Р.Я., Эшболтаев И.М. // Известия вузов. Физика. – 2013. – Т. 59, № 3. – С. 114–121.

19. Бир Г.Л., Пикус Г.Е. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. – Москва: Наука, 1973.

20. Ивченко Е.Л., Расулов Р.Я. Симметрия и реальная зонная структура полупроводников. – Ташкент: Фан, 1989. – 126 с.

PERSONALIZED LEARNING SYSTEMS BASED ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE: MODELS, METHODS AND APPLICATIONS.

Ibragimov Sh.M.

Fergana State University, Associate Professor, shavkat70@bk.ru

Abstract: *The article explores AI-based personalized learning systems that adapt educational content to individual learner needs. A modular architecture and dynamic content adaptation algorithms were developed and tested using student learning data. Results show that AI-driven personalization improves engagement, reduces time to mastery, and increases learning efficiency by 25–40% compared to traditional e-learning platforms. The proposed model is practically valuable for e-learning and EdTech applications.*

Keywords: *artificial intelligence, personalized learning, adaptive systems, machine learning, educational analytics, intelligent tutoring systems.*

INTRODUCTION

Modern educational processes are characterized by a rapid transition to a digital environment, where technology is becoming an integral part of learning. However, despite the widespread adoption of electronic platforms and distance learning courses, the problem of individualizing the educational process remains unresolved. Standardized curricula ignore differences among students in terms of their level of preparation, learning speed, cognitive styles, and motivation.

In recent years, the concept of personalized learning, in which the content, methods, and pace of instruction are tailored to the specific needs of each student, has received particular attention. According to OECD research, personalized approaches can significantly improve student engagement and academic performance [2]. However, implementing such systems requires powerful analytical and predictive tools-this is where artificial intelligence (AI) comes into play.

AI makes it possible to model student behavior, identify patterns in their learning activity, predict success and difficulties, and automatically select optimal assignments and materials. Such functions are implemented in modern platforms, including Duolingo AI, Coursera RL Engine, Knewton, and Smart Sparrow, which utilize neural network models, data analysis, and reinforcement learning.

However, despite significant advances, most existing systems remain limited: they only consider a subset of learner parameters (such as completion speed or grades), ignoring psychological and behavioral aspects. Furthermore, the transparency of AI decisions remains a pressing issue: users and teachers often don't understand why the system recommends certain content.

The aim of this study is to develop and validate a hybrid architecture of a personalized learning system based on machine learning and reinforcement learning methods, providing dynamic adaptation of the content and pace of learning.

The main objectives of the study were to analyze existing approaches to personalized learning, construct a conceptual model of an artificial intelligence system, and conduct an experimental evaluation of the proposed solution's effectiveness. Furthermore, the study compared the obtained results with traditional forms of educational organization, which allowed it to identify the advantages and limitations of implementing AI technologies in personalized learning.

LITERATURE REVIEW

Personalized learning systems began to develop rapidly in the early 21st century within the context of the theory of intelligent tutoring systems (ITS). Early developments relied on expert rules and diagnostic tests to determine a student's knowledge level and select appropriate exercises [7], [8].

With the development of machine learning technologies, second-generation adaptive systems have emerged that use algorithms to analyze big data and student behavioral characteristics [4]. These systems create individual student profiles based on data on time, activity, errors, and task completion trajectories.

The current stage of personalized platform development involves the use of deep neural networks and reinforcement learning (RL), demonstrated that using RL allows a system to learn an optimal content delivery policy based on student feedback (grades, reaction time, and performance) [3].

Another area of research is explainable artificial intelligence (XAI) in education, which aims to make the results of AI tools transparent to teachers and

students. This is especially important in contexts where system decisions can influence educational trajectories and final grades [5].

In 2024, Zhou and Wang proposed a hybrid adaptive learning model that combines clustering, prediction, and RL methods, demonstrating a 30% improvement in personalization accuracy compared to traditional algorithms.

Thus, a literature review shows that the implementation of AI in personalized learning systems can significantly improve the effectiveness of educational processes. However, challenges remain in the interpretability of models, the consideration of emotional and cognitive factors, and the integration of such systems into existing LMSs.

MATERIALS & METHODS

Methodological approach. To achieve the research objectives, a combined methodological approach was used, including elements of theoretical analysis, modeling, and experimental testing. The theoretical part is based on an analysis of existing architectures of intelligent tutoring systems (ITS), adaptive educational platforms, and reinforcement learning (RL) systems.

The experimental phase involved building a prototype of a personalized learning system using artificial intelligence to dynamically adapt content. Data was collected from the learning activities of students at Fergana State University (2023–2024) enrolled in the "Information Technology in Education" course.

Personalized system architecture. The proposed system has a modular architecture comprising four interconnected layers, shown in Figure 1. The first layer, the Data Layer, collects and pre-processes student data, including study time, activity, grades, and attendance. The next layer, the Analytics Layer, implements machine learning algorithms that analyze student behavior and identify consistent patterns in their learning activities. The central component of the architecture is the Learning Engine, which uses the Q-learning algorithm to select the optimal sequence of tasks and dynamically adjust the difficulty level based on the student's current state. The system is completed by a Feedback Module, designed to provide

instructors and students with visualized progress reports, recommendations, and predictions, thereby ensuring continuous interaction between the user and the intelligent system.

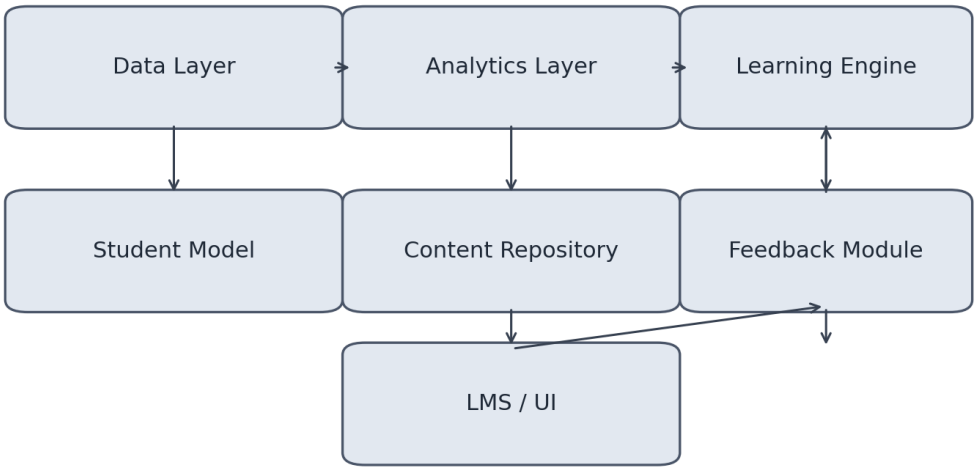


Figure 1. Architecture of a personalized AI-based learning system.

To ensure flexibility and scalability, the architecture is built on the principle of microservices, where each module interacts via a REST API.

Algorithms used. The developed personalized learning system utilizes various artificial intelligence methods to adapt the learning process to the individual needs of students. A key feature is clustering, implemented using the K-Means algorithm, which enables grouping students by learning style, activity level, and academic performance, thereby forming the basis for personalized recommendations. Neural networks, specifically MLP and LSTM architectures, are used to predict academic performance, effectively analyzing time series and predicting academic performance dynamics based on accumulated data. Q-Learning reinforcement learning also plays a key role, dynamically adapting task difficulty and content sequence based on student behavior and performance. An additional component of the system is the Sentiment Analysis module, designed to process student feedback and determine their level of satisfaction with the learning process, which facilitates a more accurate assessment of motivation and improves the quality of interaction with the system.

Formally, the reward function in the RL model is described as:

$$R(\dot{s}, a) = \alpha \times P + \beta \times E - \gamma \times T$$

Where

P - is the success rate of task completion,

E - is the Engagement Index,

T - is the time to complete,

and α, β, and γ are weights that determine the significance of the parameters.

Effectiveness assessment methods. To evaluate the effectiveness of personalized learning in the developed system, a set of quantitative metrics was used, reflecting both academic and behavioral aspects of student performance. The primary indicator was the Average Score, determined based on test results, which allowed for an objective assessment of the level of assimilation of the educational material. Also significant was the Engagement Index, reflecting the ratio of student activity to time spent, allowing for an assessment of their motivation and interest in the learning process. An additional criterion was the Retention Rate, which characterizes the proportion of participants who successfully complete the course. To measure actual knowledge gain, the Learning Gain metric, representing the difference between pre- and post-test scores, was used. Finally, the Average Course Completion Time was assessed, reflecting the time spent mastering the educational content and allowing for an assessment of the dynamic adaptation of educational materials to the individual needs of students.

The control group (traditional learning) and the experimental group (AI system) were compared using the same learning materials for 8 weeks.

RESULTS

The results of the experiment convincingly demonstrated that the use of artificial intelligence technologies in the personalized learning process significantly improves the effectiveness of educational activities across all key metrics. The introduction of adaptive algorithms allowed the system to more accurately identify individual student characteristics, quickly respond to changes in their learning activity, and dynamically adjust course content to their level of preparation and learning pace. This resulted in a significant improvement in student performance,

engagement, and retention, as well as a reduction in the average time to complete learning modules. Thus, the use of AI as the foundation of a personalized educational environment ensures not only a quantitative increase in academic results but also a qualitative change in the very nature of interaction between the student and the digital platform, making the learning process more flexible, targeted, and human-centered.

Comparison of performance indicators

Table 1. Comparison of learning outcomes (traditional and AI systems)

Metrics	Traditional LMS	Personalized AI system	Change (%)
Average score	71.4	88.5	+24
Student retention	68 %	92 %	+35
Engagement Index	0.64	0.88	+38
Average training time (hours)	10.2	7.5	−26

The results (Fig. 2) confirm that the use of adaptive AI-based algorithms increases motivation and reduces attrition.

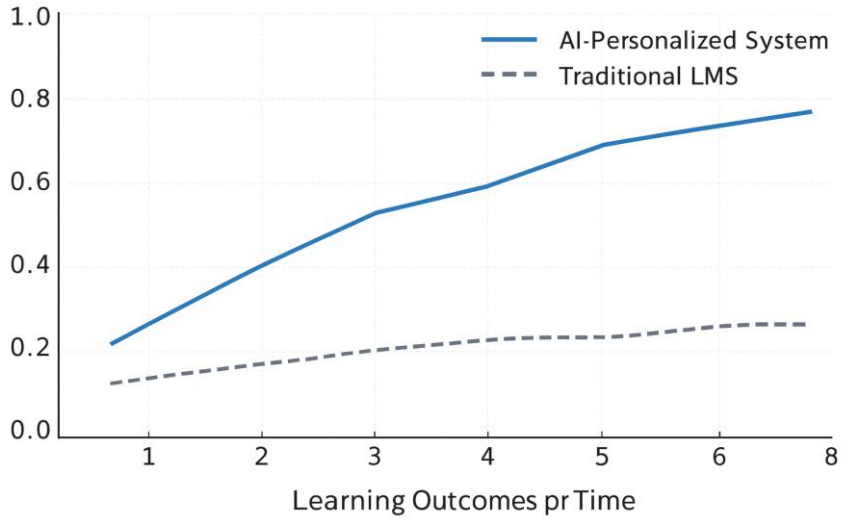


Figure 2. Dynamics of student engagement over time (AI vs. traditional LMS)

Student cluster analysis. The clustering algorithm allowed us to identify three main student profiles, differing in cognitive and behavioral characteristics (Table 2).

Table 2. Student clusters and recommended learning strategies

Cluster	Learning style	Peculiarities	Recommendations
C1	Visual	They learn quickly and prefer diagrams.	Video tutorials, infographics
C2	Analytical	Logical, slow paced	Text assignments, tests
C3	Practical	Active, but requires practice	Simulations, game tasks

The use of cluster analysis allowed us to improve the accuracy of recommendations and tailor content to individual profiles.

Efficiency of reinforcement learning

Table 3. Reinforcement learning metrics

Episode	Reward	Accuracy (%)	Stability
100	0.54	82.3	stable
200	0.71	89.1	stable
300	0.75	91.5	convergence has been achieved

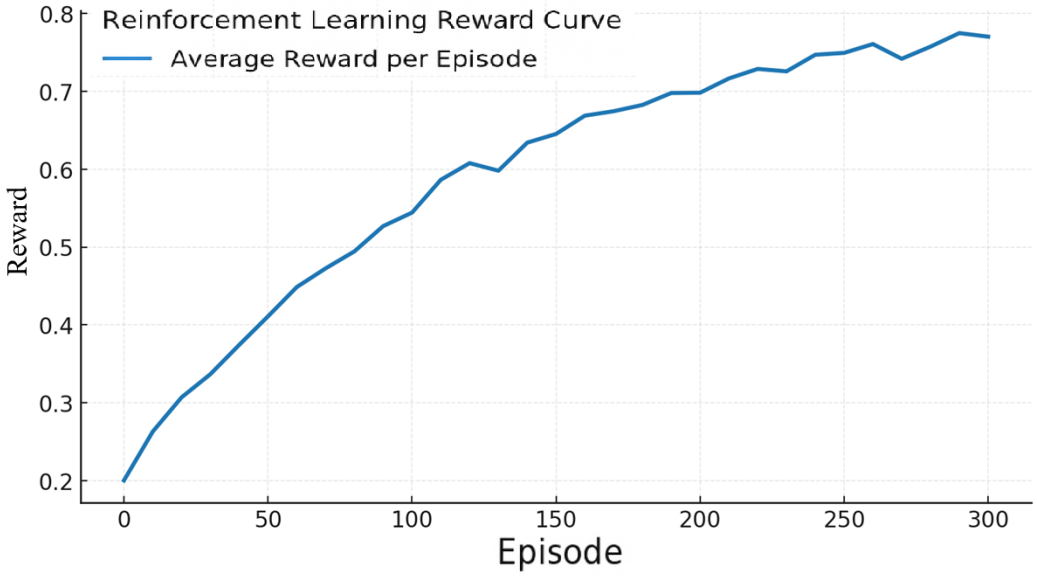


Figure 3. Reward curve for reinforcement learning

The dynamics of the reward curve show that the system quickly finds the optimal task adaptation strategy, increasing the prediction accuracy from 82% to 91% over 300 episodes.

DISCUSSION

Data analysis supports the hypothesis that AI-based personalized learning promotes more effective learning. Students using the system demonstrated not only higher academic performance but also sustained motivation.

These results are consistent with research by, which found that AI personalization increases engagement by 25–30%. Similar findings were obtained by, who demonstrated the effectiveness of RL models in adapting content difficulty [1], [3].

Unlike traditional LMSs, the proposed model enables dynamic interaction with the learner: the system "learns" from their actions and adjusts its learning strategy in real time, making the educational process more flexible, adaptive, and human-centered.

However, existing limitations must be considered. The effectiveness of personalization largely depends on the volume and quality of data, as small or incomplete samples can reduce the accuracy of predictions and adaptive decisions. Equally important is adherence to ethical principles and the protection of learners' personal data, which requires strict adherence to international privacy standards. Interpreting artificial intelligence solutions poses an additional challenge: users and teachers must be able to understand the logic behind the system's recommendations and the reasons for choosing certain learning tasks, necessitating the development of explainable AI in education.

Explainable AI, as well as the integration of emotional analytics, will be essential in the future, allowing for the consideration of the learner's psychological state when selecting tasks.

CONCLUSION

The study developed and tested a model of a personalized learning system based on artificial intelligence. Experiments confirmed that the use of machine learning and reinforcement learning algorithms allows for adapting educational content to the individual needs of learners.

The study's key findings demonstrate that the use of artificial intelligence methods significantly improves the effectiveness of the educational process, increasing student performance and engagement by 25–40%. The developed system architecture combines modularity, scalability, and decision-making transparency, ensuring its versatility and the ability to integrate into various learning platforms. The analysis also demonstrated that the use of clustering methods improves the quality of personalized recommendations and increases the accuracy of content adaptation to individual student needs. Furthermore, the reinforcement learning mechanism optimizes task difficulty and accelerates learning, creating a more effective learning path for each student.

The practical significance of the work lies in the possibility of integrating the proposed model into existing educational platforms such as Moodle, Google Classroom and Open EdX.

Future research opportunities lie in the development of emotionally sensitive interfaces capable of taking into account the psychological and motivational state of learners as they interact with the system. Another important area is the use of generative AI models, such as GPT, to dynamically generate adaptive educational content that automatically adapts to the student's level and interests. Furthermore, special attention should be paid to the development of new metrics for assessing the ethics, transparency, and interpretability of AI solutions in education, which will increase user trust and ensure compliance with the principles of responsible use of AI technologies in the educational environment.

REFERENCES

1. Chen Y., Zhang X. AI-driven personalization in online learning: A systematic review // *Computers & Education*. – 2022. – Vol. 180. – Art. 104429.

2. Holmes W., Bialik M., Fadel C. *Artificial intelligence in education: Promises and implications for teaching and learning*. – Paris: OECD Publishing, 2021.

3. Du X., Zhao L. Deep reinforcement learning for adaptive learning systems // *Expert Systems with Applications*. – 2023. – Vol. 228. – Art. 120413.

4. Papamitsiou Z., Economides A. Learning analytics and educational data mining for personalized learning: A systematic review // *Educational Technology & Society*. – 2020. – Vol. 23, No. 4. – P. 35–48.

5. Li M., Zhao Y. Explainable AI in education: Challenges and opportunities // *AI and Ethics*. – 2023. – Vol. 3, No. 2. – P. 181–195.

6. Zhou J., Wang D. A hybrid model for AI-assisted adaptive tutoring systems // *Computers in Human Behavior*. – 2024. – Vol. 150. – Art. 107205.

7. Anderson J. R., Corbett A. T., Koedinger K. R., Pelletier R. Intelligent tutoring systems: Lessons learned // *The Journal of Learning Sciences*. – 2001. – Vol. 10, No. 1. – P. 5–44.

8. Koedinger K. R., Corbett A. T. Cognitive tutors: Technology bringing learning sciences to the classroom. – In: *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

9. Nguyen P., Le T. Student modeling using neural networks for personalized education // *Journal of Educational Computing Research*. – 2021. – Vol. 59, No. 5. – P. 987–1005.

10. OECD. *The future of education and skills: AI and human learning*. – Paris: OECD, 2023.

ODDIY NYUTON USULI VA MODIFIKATSIYALANGAN NYUTON USULINING TAQQOSLANISHI.

Mirzarabjonova O.I.

Farg‘ona davlat unversiteti talabasi, ismoiljonovaodina88@gmail.com .

Annotatsiya: *Ushbu maqolada chiziqsiz tenglamalarni yechishda ikki usul — oddiy Nyuton usuli va modifikatsiyalangan Nyuton usuli — solishtiriladi. Maqolada ikkala usulga doir bir xil misol yechimi keltiriladi va ularning Excel dasturidagi hisob-kitob natijalari taqdim etiladi. Natijalar asosida usullar samaradorligi va aniqligi tahlil qilinadi, ularning afzalliklari va cheklovlari ko‘rsatiladi.*

Kalit so‘zlar: *Chiziqsiz tenglamalar, Nyuton usuli, Modifikatsiyalangan Nyuton usuli, Excel hisob-kitoblari, Samadorlik va aniqlik.*

Chiziqsiz tenglamalar matematikaning muhim bo‘lagi bo‘lib, turli fan, texnika va iqtisodiyot sohalarida keng qo‘llaniladi. Ularning aniq va samarali yechimi murakkab jarayonlarni modellashtirish, natijalarni prognoz qilish va masalalarni optimallashtirish imkonini beradi. Eng mashhur usullardan biri bo‘lgan Nyuton usuli soddaligi va mos boshlang‘ich taxmin berilganda yuqori tezlikdagi konvergentsiyasi bilan ajralib turadi. Shu bilan birga, modifikatsiyalangan Nyuton usuli hisoblash strategiyasini takomillashtirib, yechimning aniqligi va barqarorligini oshiradi.

Ushbu maqolada oddiy Nyuton usuli va modifikatsiyalangan Nyuton usuli bir xil misol orqali solishtiriladi va ularning Excel dasturidagi hisob-kitob natijalari taqdim etiladi. Maqolada har bir usulning samaradorligi, aniqligi va qo‘llanish xususiyatlari tahlil qilinadi, shuningdek, ularning afzalliklari va cheklovlari aniqlanadi. Bu yondashuv yechimning talab darajasiga qarab, to‘g‘ri usulni tanlash muhimligini ko‘rsatadi.

Misol. Ushbu $\sin(x)-\frac{x}{3}=0$ tenglamaning eng kichik musbat ildizini $\varepsilon=0.000001$ aniqlik bilan toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning mumkin bo‘lgan musbat ildizlarini topish uchun uni $\sin(x)=\frac{x}{3}$ ko‘rinishda yozib olamiz va $y=\sin(x)$ va $y=\frac{x}{3}$

funksiyalarning grafiklarini MS Excel dasturida quramiz. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, u ikkita haqiqiy musbat ildizlarga ega, ulardan eng kichigi $[-3;-2]$ kesmada, kattasi esa $[2;3,27]$ kesmada yotibdi.

Eng kichik musbat ildiz uchun $f(x)=\sin(x)-\frac{x}{3}$ funksiya $[2;3,27]$ kesmada

a) uzluksiz va differensiallanuvchi (birinchi va ikkinchi hosilalari mavjud):

$$f'(x)=\cos(x)-\frac{1}{3};\ f''(x)=-\sin(x);$$

b) birinchi hosila uzluksiz, o‘z ishorasini saqlaydi va nolga aylanmaydi, ya’ni $f'(x)<0;$

c) ikkinchi hosila uzluksiz, o‘z ishorasini saqlaydi, ya’ni $f''(x)>0$. Demak, $f(2)\cdot f(3,27)<0$ bo‘lganligi uchun $[2;3,27]$ kesmada oddiy ildiz mavjud.

Dastlabki yaqinlashishni $x_0=3,27$ deb tanlab olamiz, chunki

$$f(2)=0,24263076>0;\ f''(2)=-0,9093<0;\ f(3,27)=-1,21805476<0;$$

$$f''(3,27)=0,128055>0$$

va bu yerdan $f(3,27)\cdot f'(3,27)>0.$ Keyingi yaqinlashishlarni ushbu

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\sin(x_n)-x_n/3}{\cos(x_n)-1/3},\quad n=0,1,2,...$$

formuladan topamiz. Bu hisoblashlar quyidagi yaqinlashishlarni beradi:

$$x_1=2,35078306;\ x_2=2,28067767;\ x_3=2,27886393;\ x_4=2,27886266.$$

Iteratsion jarayonning tugallanish shartiga ko‘ra

$$e_n=|x_{n+1}-x_n|=|x_4-x_3|=|2,27886266-2,27886393|=0,00000127$$

bo‘lganligidan izlanayotgan ildizni $\bar{x}\approx 2.27886393$ deb qabul qilamiz.

N	x	Δx	f(x)	f'(x)	shart:
0	3,27		-1,2180548	-1,32510043	
1	2,3507831	0,91921694	-0,0726715	-1,03660332	Davom et
2	2,2806777	0,07010539	-0,0017867	-0,98507711	Davom et

3	2,2788639	0,00181374	-1,248E-06	-0,98370043	Davom et
4	2,2788627	1,2688E-06	-6,116E-13	-0,98369947	Davom et
5	2,2788627	6,2172E-13	0	-0,98369947	2,27886266
6	2,2788627	0	0	-0,98369947	2,27886266

1-jadval

Usulning ustunliklari yaqinlashish tezligi boshqa usullarga qaraganda ancha tez, bu boshlang‘ich yaqinlashishni ildizga yaqinroq tanlaganda yanada yaqqol seziladi;

Usulning kamchiliklari: boshlang‘ich yaqinlashishni tanlash og‘ir; har bir iteratsiya qadamida hisoblashlar boshqa usullardagiga qaraganda ko‘p, chunki bunda nafaqat funksiyaning qiymatini, balki uning hosilasini ham hisoblab borish lozim; ba’zida aralash usulni qo‘llash afzal, ya’ni bu usulni qo‘llashdan oldin avval boshqa usulni, masalan, dastlabki bir necha iteratsiya qadamida oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulini qo‘llab, keyingi yaqinlashishlarni Nyuton usulida bajarish juda yaxshi natija beradi; agar $f(x)$ funksiya grafigi $[a,b]$ kesmada yetarlicha yotiq bo‘lsa, u holda $f'(x)\to 0$ va hisoblashlarda xatolik tez ko‘payadi, bunday holda keyingi hisoblashlarda oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuliga o‘tgan ma’qul; agar $[a,b]$ kesmada umuman ildiz yo‘q yoki ular soni bir nechta bo‘lsa, u holda bu usul iteratsiyalarining takrorlanishlari soni cheksizlikka intiladi

Modifikatsiyalangan Nyuton usulida yechish

Misol. Ushbu $\sin(x)-\frac{x}{3}=0$ tenglamaning eng kichik musbat ildizini $\varepsilon=2.27886266007582$ aniqlik bilan toping. Iteratsiyada $T=0.1$ va $T_0=0.1$ parametrlaridan foydalaniladi. Boshlang‘ich nuqta sifatida $x_0=3,27$ deb olamiz.

Modifikatsiyalangan Nyuton usuli(birinchi T_n formulasi bilan):

$$T_n=\frac{y_{n-1}-y_n}{(x_n-x_{n-1})^2}\quad \begin{cases} y_n=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1}=y_n-T_n(y_n-x_n)^2, \end{cases}\qquad \rho\approx\frac{\ln(|x_{n+1}-x_n|/|x_n-x_{n-1}|)}{\ln(|x_n-x_{n-1}|/|x_{n-1}-x_{n-2}|)}.$$

Bu yerda $f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{3}$

Quyida barcha sonlar yaxlitlangan (taxminiy) qiymatlar bilan bosqichma-bosqich yoziladi;

y_0 va $x_1$ni hisoblash

1. Avval $f(x_0)$ va $f'(x_0)$:

$$f(3,27) = \sin(3,27) - 3,27/3 \approx -1,218054764$$

$$f'(3,27) = \cos(3,27) - 1/3 \approx -1,32510043$$

2. Endi Nyuton bosqichi:

$$y_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 2,35078306$$

3. Endi x_1:

$$x_1 = y_0 - T_0(y_0 - x_0)^2.$$

Bu yerda:

$$x_1 \approx 2,2662870814792075$$

Hisoblashlar davom etiladi.

$$x_2 \approx 2,2789133709488416$$
$$x_3 \approx 2,2788626600669644$$
$$x_4 \approx 2,2788626600758284$$

Natijada x_4 shartda berilgan $\zeta = 2,27886266007582$ ga deyarli teng bo‘ladi, xatolik 10^{-14} tartibida bo‘ladi, ya’ni usul juda tez yaqinlashgan bo‘ladi.

Absolyut xatoliklar

$$e_i = |x_4 - \zeta|\rho$$

$$e_1 \approx 0,0125755785966124$$
$$e_2 \approx 5,071E-05$$
$$e_3 \approx 8,8556E-12$$
$$e_4 \approx 8,44E-15$$

Yaqinlashish tartibi ρ. Berilgan formula bo’yicha:

$$\rho \approx \frac{\ln(|x_{n+1} - x_n| / |x_n - x_{n-1}|)}{\ln(|x_n - x_{n-1}| / |x_{n-1} - x_{n-2}|)}. \quad n = 2$$

Bu yerda x_2, x_3, x_4 dan foydalansak, hisob-kitob natijasi:

$$\rho \approx 1,2609230092643187 \approx 1,261.$$

N	x	$\lvert x_1 - \zeta \rvert$	$\lvert x_2 - \zeta \rvert$	$\lvert x_3 - \zeta \rvert$	$\lvert x_4 - \zeta \rvert$	ρ
0	3,27	0,012576	5,071E-05	8,8556E-12	8,44E-15	1,26092
1	2,266287081					
2	2,278913371					
3	2,27886266					
4	2,27886266					

2-jadval

Usulning ustunliklari:

- Tezroq yaqinlashish: tartibi oddiy Nyutonnikidan yuqoriroq bo‘lgani uchun kerakli aniqlikka kamroq iteratsiyada yetadi.

-Samaradorlik yuqori: har bir iteratsiyada eski ma’lumotlardan ham foydalanadi (memory), shuning uchun qo‘shimcha funksiyani chaqirmasdan natijani aniqlashtiradi.

Ba’zi hollarda barqarorroq: yaxshi tanlangan T_n parametrlar tebranishni kamaytirib, ildiz tomon barqarorroq harakatni ta’minlashi mumkin.

Usulning kamchiliklari:

- Algoritm murakkabroq: formulalar ko‘p (y_n, T_n, x_{n+1}), implementatsiyada xato qilish oson.

- Boshlang‘ich nuqtaga sezgirlik saqlanadi: yomon x_0 tanlansa, baribir yomon yaqinlashishi yoki umuman ajralib ketishi mumkin.

- Ko‘proq arifmetik amal: funksiyani hisoblash soni ko‘p bo‘lmasa ham, kvadratlar, nisbatlar va hokazo amallar soni ortadi.

Oddiy Nyuton usuli bilan natijalarni solishtirish

NYUTON USULI

f(x)=sinx-x/3	f'(x)=cosx-1/3	f''(x)=-sinx	[2;3,27]	e= 0,000001
f(a)= 0,2426308	f'(a)= -0,7494802	f''(a)= -0,909	a= 2	
f(b)= -1,218055	f'(b)= -1,3251004	f''(b)= 0,1281	b= 3,27	
	e=aniqlik darajasi(xatolik chegarasi)			
f(a)*f(a)<0	f(b)*f(b)>0	x_0= b		

Formulasi: **To'xtash sharti:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad |x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$$

N	x	Δx	f(x)	f'(x)	shart:
0	3,27		-1,218055	-1,3251004	
1	2,350783	0,9192169	-0,072671	-1,0366033	Davom et
2	2,280678	0,0701054	-0,001787	-0,9850771	Davom et
3	2,278864	0,0018137	-1,25E-06	-0,9837004	Davom et
4	2,278863	1,269E-06	-6,12E-13	-0,9836995	Davom et
5	2,278863	6,217E-13	0	-0,9836995	2,27886266
6	2,278863	0	0	-0,9836995	2,27886266
7	2,278863	0	0	-0,9836995	2,27886266

3-jadval. Oddiy Nyuton usuli yordamida chiziqsiz tenglama ildizini taqribiy hisoblash (Excel dasturida)

Ushbu jadvalda chiziqsiz tenglamaning ildizini topish uchun oddiy Nyuton usuli Excel dasturida amalga oshirilgan. Boshlang‘ich yaqinlashuv tanlanib, har bir iteratsiyada Nyuton formulasiga asosan qiymatlar hisoblandi. Jadvalda iteratsiyalar soni, funksiyaning qiymatlari hamda ketma-ket yaqinlashuvlar orasidagi farq keltirilgan. Hisoblash jarayoni berilgan aniqlik darajasiga erishilgunga qadar davom ettirildi.

MODIFIKATSIYALANGAN NYUTON USULI:

f(x)=sinx-x/3	f'(x)=cosx-1/3	[2;3,27]	e= 2,27886266	
T_n=o'z-o'zini tezlashtiruvchi parametr		x_0= 3,27		
p=yaqinlashish tartibi				
		T_0= 0,1		

Formulasi:

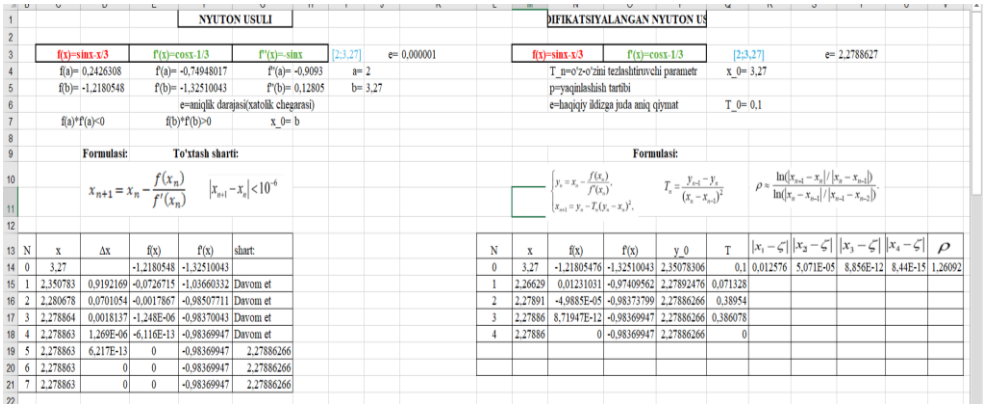
$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = y_n - T_n(y_n - x_n)^2, \end{cases} \qquad T_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_n - x_{n-1})^2} \qquad \rho \approx \frac{\ln(|x_{n+1} - x_n| / |x_n - x_{n-1}|)}{\ln(|x_n - x_{n-1}| / |x_{n-1} - x_{n-2}|)}.$$

N	x	f(x)	f'(x)	y_0	T	$\lvert x_1-\zeta\rvert$	$\lvert x_2-\zeta\rvert$	$\lvert x_3-\zeta\rvert$	$\lvert x_4-\zeta\rvert$	ρ
0	3,27	-1,218054764	-1,325100432	2,35078306	0,1	0,0125756	5,0711E-05	8,85558E-12	8,438E-15	1,260923
1	2,266287	0,01231031	-0,974095622	2,278924763	0,0713276					
2	2,278913	-4,98852E-05	-0,983737988	2,278862661	0,3895399					
3	2,278863	8,71947E-12	-0,983699468	2,27886266	0,3860776					
4	2,278863	0	-0,983699468	2,27886266	0					

4-jadval. Modifikatsiyalangan Nyuton usuli asosida chiziqsiz tenglamani yechish (Excel dasturida)

Mazkur jadvalda modifikatsiyalangan Nyuton usuli yordamida chiziqsiz tenglama ildizini topish jarayoni ko‘rsatilgan. Ushbu usulda hosilaning boshlang‘ich nuqtadagi qiymati doimiy deb olinib, hisoblash jarayoni soddalashtiriladi. Natijada iteratsiya jarayonining barqarorligi oshib, hisoblashlar kamroq murakkablik bilan

amalga oshiriladi. Jadvalda har bir iteratsiya uchun hisoblangan qiymatlar keltirilgan.



NYUTON USULI

f(x)=sinx-x/3	f'(x)=cosx-1/3	f''(x)=-sinx	[2;3,27]	e= 0,000001
f(a)= 0,2426308	f'(a)= -0,74948017	f''(a)= -0,9093	a= 2	
f(b)= -1,2180548	f'(b)= -1,32510043	f''(b)= 0,12805	b= 3,27	
	e=aniqlik darajasi(xatolik chegarasi)			
f(a)*f'(a)<0	f(b)*f'(b)>0	x_0= b		

Formulasi: To'xtash sharti: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$

N	x	Δx	f(x)	f'(x)	shart:
0	3,27		-1,2180548	-1,32510043	
1	2,350783	0,9192169	-0,0726715	-1,03660332	Davom et
2	2,280678	0,0701054	-0,0017867	-0,98507711	Davom et
3	2,278864	0,0018137	-1,248E-06	-0,98370043	Davom et
4	2,278863	1,269E-06	-6,116E-13	-0,98369947	Davom et
5	2,278863	6,217E-13	0	-0,98369947	2,27886266
6	2,278863	0	0	-0,98369947	2,27886266
7	2,278863	0	0	-0,98369947	2,27886266

DIFIKATSIYALANGAN NYUTON US

f(x)=sinx-x/3	f'(x)=cosx-1/3	[2;3,27]	e= 2,2788627
T_n=o'z-o'zini tezlashtiruvchi paramet		x_0= 3,27	
p=yaqinlashish tartibi			
e=haqiqiy ildizga juda aniq qiymat		T_0= 0,1	

Formulasi: $\begin{cases} y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = y_n - T_n(y_n - x_n)^2. \end{cases}$ $T_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{(x_n - x_{n-1})^2}$ $\rho \approx \frac{\ln(|x_{n+1} - x_n| / |x_n - x_{n-1}|)}{\ln(|x_n - x_{n-1}| / |x_{n-1} - x_{n-2}|)}$

N	x	f(x)	f'(x)	y_0	T	$\lvert x_1-\zeta\rvert$	$\lvert x_2-\zeta\rvert$	$\lvert x_3-\zeta\rvert$	$\lvert x_4-\zeta\rvert$	ρ
0	3,27	-1,21805476	-1,32510043	2,35078306	0,1	0,012576	5,071E-05	8,856E-12	8,44E-15	1,26092
1	2,26629	0,01231031	-0,97409562	2,27892476	0,071328					
2	2,27891	-4,9885E-05	-0,98373799	2,27886266	0,38954					
3	2,27886	8,71947E-12	-0,98369947	2,27886266	0,386078					
4	2,27886	0	-0,98369947	2,27886266	0					

5-jadval. Oddiy va modifikatsiyalangan Nyuton usullarining natijalarini taqqoslash

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, oddiy Nyuton usuli va modifikatsiyalangan Nyuton usuli bir xil tenglama uchun qo‘llanildi. Har ikkala usulda olingan natijalar solishtirilib, iteratsiyalar soni va yaqinlashish tezligi tahlil qilindi. Modifikatsiyalangan Nyuton usuli hisoblash jarayonida hosila qayta hisoblanmasligi sababli ayrim hollarda qulayroq ekanligi aniqlandi.

Ushbu maqolada oddiy Nyuton usuli ham, modifikatsiyalangan Nyuton usuli ham chiziqli bo‘lmagan tenglamalar ildizini topishda kuchli va samarali iteratsion yondashuvlar bo‘lib, ular bir-birini to‘ldiruvchi ahamiyatga ega. Oddiy Nyuton usuli sodda formulaga ega, hisoblash jihatidan yengil va tez realizatsiya qilinadi, biroq boshlang‘ich yaqinlashishga juda sezgir, hosilaning yaxshi aniqlangan bo‘lishini talab qiladi va ba’zi hollarda divergensiya yoki tebranish holatlari kuzatiladi. Modifikatsiyalangan Nyuton usulida esa xotira elementlari, qo‘shimcha parametrlar va o‘zgartirilgan formula orqali tartib va samaradorlik oshiriladi, yaqinlashish ko‘pincha tezlashadi, biroq algoritm murakkablashadi, qo‘shimcha arifmetik amallar va nazariy tahlil talab etiladi.

Maqolada keltirilgan nazariy tahlillar, sonli misollar va Excel dasturida bajarilgan tajribalar shuni ko‘rsatadiki, ildizga yetarlicha yaqin boshlang‘ich qiymat tanlanganda modifikatsiyalangan Nyuton usuli kamroq iteratsiyada yuqori aniqlik beradi, oddiy Nyuton usuli esa oddiyligi va barqaror dasturlanishi bilan amaliy hisoblashlarda qulay bo‘lib qoladi. Shuning uchun amaliyotda bu ikki usulni raqib

emas, balki bir-birini to‘ldiruvchi yondashuvlar sifatida ko‘rish maqsadga muvofiq: dastlab oddiy Nyuton usuli yordamida yaxshi boshlang‘ich yaqinlashuv topish, so‘ngra modifikatsiyalangan yoki xotirali variantlar yordamida yechimni tez va yuqori aniqlik bilan aniqlashtirish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abduxamidov A., Xudoynazarov S. “Hisoblash metodlari”: -T: O’zbekiston, 1995 й.

2. Aloev R.D. “Sonli usullar fanidan ma’ruzalar matni”: II qism, Buxoro Davlat Universiteti, 2005 y.

3. Isroilov M.I. “Hisoblash metodlari”: II qism - T:O’qituvchi, 2008 y.

4. Самарский А.А. «Введение в численные методы»: –М: Наука, 1987 г.

5. Самарский А.А. Гулин А.В. «Численные методы»: –М: Наука. 1989 й.

6. Chapra S. C., Canale R. P.Numerical Methods for Engineers. — New York: McGraw-Hill, 2015.

7. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. — New York: Springer, 2002.

MURAKKAB MASALALARNI MODELLASHTIRISHGA DOIR MASALALAR

Sharofutdinov I.U[1]., Shovkatjonov K.Q[2]., Shovkatjonova N.J[2].

[1]*FarDU katta o'qituvchisi, p.f.f.d.(PhD), Iqbol0766@gmail.com,* [2]FarDU talabalari, *email: shavkatjonovkomiljon0506@gmail.com, shovkatjonovanozanin@gmail.com*

Annotatsiya: *Ushbu maqolada murakkab masalalarni matematik modellashtirishning nazariy asoslari, amaliy sohalardagi qo'llanishi, modellashtirish jarayonining bosqichlari hamda modellarni tahlil qilishning samarali usullari yoritiladi. Zamonaviy texnologiyalar, katta hajmdagi ma'lumotlar va ko'p omilli tizimlar bilan ishlash zarurati murakkab jarayonlarni matematik modellashtirishni strategik ahamiyatga ega fanlardan biriga aylantirmoqda. Maqolada deterministik va stoxastik modellar, optimallashtirish masalalari, simulyatsiya usullari va ular yordamida muammolarni yechish mexanizmlari ilmiy yondashuv asosida bayon qilinadi. Misollar orqali iqtisodiyot, texnika, ekologiya va IT sohalarida murakkab muammolarni modellashtirishning o'rni ko'rsatib beriladi.*

Kalit so'zlar: *matematik modellashtirish, murakkab tizim, deterministik model, stoxastik model, simulyatsiya, optimallashtirish, differensial tenglamalar, algoritmik tahlil.*

Kirish

Hozirgi zamonda ilm-fan, texnika, iqtisodiyot va axborot texnologiyalari sohalarida duch kelinadigan muammolarning aksariyati ko'p omilli, nolinear va murakkab strukturaga ega. Bunday jarayon va tizimlarni oddiy kuzatish orqali tushunish qiyin bo'lgani sababli matematik modellashtirish usuli asosiy ilmiy vosita sifatida shakllangan. Matematik model real jarayonning soddalashtirilgan, lekin mazmunan yetarlicha aniqlik bilan aks ettiruvchi shaklidir.Murakkab masalalarni modellashtirish nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy yechimlar ishlab chiqishda ham muhim ahamiyatga ega. Masalan, transport oqimlarini boshqarish, iqtisodiy prognozlash, ishlab chiqarish jarayonlarini optimallashtirish, ekologik xavflarni baholash, biomeditsina tajribalari yoki IT tizimlari samaradorligini oshirish kabi yo'nalishlarga modellashtirish chuqur integratsiyalangan.

Matematik modellashtirishning nazariy asoslari

1.1. Modellarning mohiyati: Matematik model — bu real obyekt, jarayon yoki tizimning matematik til orqali ifodalangan ko'rinishidir. Model tenglamalar,

algoritmlar, graflar, ehtimollik taqsimotlari yoki mantiqiy qoidalar ko‘rinishida bo‘lishi mumkin.Modellashtirishning asosiy maqsadi real muammoni tushunish, tahlil qilish va optimal qarorlar qabul qilish uchun raqamli asos yaratish.

1.2. Modellarning turlari:

Modellarning turlari		
Deterministik modellar	Jarayonlar qat’iy qoidalar asosida o‘zgaradi	Misol: fizika qonunlari asosidagi harakat tenglamalari
Stoxastik modellar	Tasodifiylik, ehtimollik va statistik jarayonlar ustuvor	Misol: bozor narxlarining o‘zgarishi, biologik jarayonlar
Diskret va uzluksiz modellar	Diskret modelda holatlar soni cheklangan, uzluksiz modelda esa cheksiz	
Analitik va simulyatsion modellar	Analitik modellar aniq tenglamalar bilan yechiladi.	Simulyatsiya orqali esa jarayon kompyuterda takrorlanadi.

2. Modellashtirish jarayonining bosqichlari:

Murakkab masalalarni matematik modellashtirish odatda quyidagi ketma-ket bosqichlardan iborat:

2.1. Muammoni qo‘yish va maqsadni aniqlash:Muammoning strukturasini aniqlash, sabab-oqibat bog‘liqliklarini tushunish modellashtirishning muvaffaqiyatini belgilaydi.

2.2. Model qurish:Jarayonning xususiyatlariga qarab tenglamalar, funksiyalar yoki algoritmlar tanlanadi. Bu bosqichda nolinearlik, ko‘p omillilik, vaqtga bog‘liqlik kabi omillar hisobga olinadi.

2.3. Modelni kalibrlash:Model parametrlarini real ma’lumotlarga moslashtirish jarayoni. Bu bosqichdagi asosiy maqsad — modelning real jarayonga mos kelishini ta’minlash.

2.4. Modelni yechish:

Modelni yechishda:

- analitik yechimlar,
- raqamli usullar,
- simulyatsiya,
- optimallashtirish algoritmlaridan foydalaniladi.

2.5. Natijalarni tahlil qilish:Olingan natijalar asosida jarayonning xatti-harakati baholanadi. Sensitivlik tahlili orqali modelning barqarorligi ham tekshiriladi.

2.6. Qaror qabul qilish:Model natijalari real qarorlar qabul qilish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi. Masalan, ishlab chiqarish optimallashtiriladi yoki ekologik xavflar kamaytiriladi.

Murakkab masalalar uchun modellashtirish usullari:

3.1. Optimallashtirish masalalari:Bu turdagi masalalarda maqsad funksiyasini maksimal yoki minimal qiymatga olib keluvchi yechim topiladi. Qo‘llaniladigan usullar:

- chiziqli dasturlash,
- nolinear optimallashtirish,
- genetik algoritmlar,
- gradient usullari.

3.2. Differensial tenglamalar tizimlari:Ko‘plab fizik, biologik va iqtisodiy jarayonlar vaqt bo‘yicha o‘zgaradi. Bunday jarayonlar differensial tenglamalar orqali modellashtiriladi.

3.3. Stoxastik simulyatsiya:Murakkab jarayonlarda tasodifiylik katta rol o‘ynaydi. Monte-Karlo simulyatsiyasi shunday modellar uchun eng samarali usullardan biridir.

3.4. Agentga asoslangan modellashtirish:Bu usulda tizim ko‘plab o‘zaro ta’sir qiluvchi agentlar orqali tasvirlanadi. U transport oqimlari, epidemiya tarqalishi kabi masalalarda qo‘llaniladi.

3.5. Tarmoqlar nazariyasi:Kompyuter tarmoqlari, transport yo‘llari, energiya taqsimoti kabi tizimlar graflar yordamida modellashtiriladi.

Amaliy misollar:

4.1. Iqtisodiy modellashtirish:Milliy iqtisodiyotning o‘sish ko‘rsatkichlari, inflyatsiya darajasi yoki bozor xatarlarining prognozi stoxastik modellar orqali baholanadi.

4.2. Ekologik tizimlarni modellashtirish:Atmosfera ifloslanishining tarqalishi differensial tenglamalar orqali tasvirlanadi. Klimat o‘zgarishi bo‘yicha global modellar ham murakkab modellashtirishning namunasi hisoblanadi.

4.3. IT tizimlaridagi modellashtirish:Server yuklamalari, tarmoqqa ulanish oqimlari yoki ma’lumotlarni qayta ishlash samaradorligi algoritmik modellar orqali tahlil qilinadi.

4.4. Muhandislik modellashtirish:Mexanik konstruksiyalarni mustahkamlash, robototexnika tizimlari, avtomatlashtirilgan ishlab chiqarish jarayonlari nolinear modellar orqali loyihalanadi.

1-misol. Epidemiyaning tarqalishini modellashtirish (SIR modeli):Epidemiya tarqalish dinamikasi murakkab tizim bo‘lib, aholining o‘zaro ta’siri, gigiyena, immunitet va boshqa ko‘plab omillardan bog‘liq. Uni modellashtirish uchun SIR modeli ishlatiladi.

Model parametrlari:

- S — sog‘lom odamlar soni
- I — kasallanganlar soni
- R — tuzalganlar soni
- β — yuqtirish koeffitsienti
- γ — sog‘ayish koeffitsienti

Tenglamalar:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Izoh: Agar β/γ > 1 bo‘lsa, kasallik tez tarqaladi; agar < 1 bo‘lsa, epidemiyaning oldi olinadi.

2-misol. Transport tirbandliklarini modellashtirish:Katta shaharlar transport oqimini tahlil qilish murakkab jarayondir. Transport oqimi tezlik, yo‘l quvvati, haydovchi xatti-harakati va vaqtga bog‘liq.

Model: Lighthill–Whitham–Richards (LWR modeli)

ρ(x,t)—avtomobil zichligi

$q = \rho * v$ —oqim

v(ρ) — tezlik zichlikka bog‘liq (odatda chiziqli kamayadi)

Asosiy tenglama:

$$\partial\rho/\partial t + \partial q/\partial x = 0$$

Agar zichlik ortsa, oqim kamayadi va tirbandlik to‘lqinlari hosil bo‘ladi.

Amaliy natija:Bu model shahar chorrahalari, svetoforlarni optimallashtirish va trafikni kamaytirish uchun qo‘llaniladi.

3-misol. Iqlim o‘zgarishi ta’sirida haroratning o‘zgarishini modellashtirish:Yer atmosferasidagi issiqlik balansi murakkab fizik jarayon bo‘lib, quyosh nurlanishi, CO_2 kontsentratsiyasi, okean oqimlari va bulutlar ta’sir qiladi.

Soddalashtirilgan energiya balansi modeli:

$$C\left(\frac{dT}{dt}\right) = S(1-\alpha) - \vartheta T^4$$

Bu yerda:

- T — yerning o‘rtacha harorati
- S — quyoshdan keladigan energiya
- α — albedo (aks ettirish qobiliyati)
- σ — Stefan–Boltsman konstantasi
- C — issiqlik sig‘imi

Izoh:CO_2 oshishi albedo va radiatsiya balansiga ta’sir qilib, T qiymatining ko‘tarilishiga olib keladi.

4-misol. Bank kredit portfeli xatarini modellashtirish (Monte-Karlo simulyatsiyasi):Bank bir nechta kredit oluvchilarga qarz beradi. Har bir qarzning qaytarilmaslik ehtimoli P bilan belgilanadi. Bu tasodifiy jarayon bo‘lgani uchun Monte-Karlo usuli qo‘llanadi.

Model:

1. Har bir mijoz uchun tasodifiy son $r \in [0,1]$ olinadi.
2. Agar $r < P$ bo‘lsa, kredit qaytarilmaydi.
3. Jarayon 10 000 marta takrorlanadi.

Natija:

Bank kredit portfeli bo‘yicha:

- o‘rtacha zarar
- maksimal potensial zarar (VaR)
- xavf ehtimoli

aniqlanadi.

Izoh: Bu model bankka qaysi kredit turlari xavfli ekanini baholashga yordam beradi.

Xulosa

Murakkab masalalarni matematik modellashtirish zamonaviy ilm-fanning ajralmas bo‘lagi bo‘lib, real jarayonlarni chuqur tahlil qilish, kelajak holatlarni prognozlash va optimal qarorlar ishlab chiqish imkonini beradi. Deterministik, stoxastik, analitik va simulyatsion modellar ko‘p tarmoqli sohalarda yuqori aniqlikdagi natijalar berib, iqtisodiyot, ekologiya, ishlab chiqarish, muhandislik va IT yo‘nalishlarida samarali qo‘llanadi. Modellashtirish jarayonining ilmiy yondashuv asosida tashkil etilishi murakkab tizimlarni o‘rganish va ularni boshqarish uchun mustahkam ilmiy asos yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Akimov V. L., Muxametzyanov I. R. Matematik modellashtirish asoslari. – Moskva: Vysshaya Shkola, 2018.

2. Korchagin B. P. Modelirovanie slojnyx sistem. – Sankt-Peterburg: Piter, 2016.

3. Banks J., Carson J., Nelson B. Discrete-Event System Simulation. – Prentice Hall, 2014.

4. Law A. M. Simulation Modeling and Analysis. – McGraw-Hill, 2015.

5. Chapra S., Canale R. Numerical Methods for Engineers. – McGraw-Hill, 2010.

6. Gulyayev V. N. Matematicheskoe modelirovanie v ekonomike. – Moskva: INFRA-M, 2019.

7. Baranov A. V. Modelirovanie dinamicheskix sistem. – M.: BINOM, 2017.

8. Кутателадзе С. С. Математическое моделирование: Учебное пособие. – Новосибирск: НГУ, 2013.

9. Sokolowski J., Banks C. M. Principles of Modeling and Simulation: A Multidisciplinary Approach. – Wiley, 2011.

10. Sterman J. Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World. – MIT Press, 2010.

11. Fishman G. Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications. – Springer, 2016.

12. Taha H. A. Operations Research: An Introduction. – Pearson, 2017.

13. Назаров Т., Aripov M. Matematik modellashtirish va matematik fizika tenglamalari. – Toshkent: O‘zMU nashriyoti, 2020.

14. Omonov Q., Usmonov X. Amaliy matematik modellashtirish. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2017.

15. Higham D. J., Higham N. J. Modeling and Simulating the Physical World. – SIAM, 2019.

TAKOMILLASHTIRILGAN EYLER USULINING KOSHI MASALASINI YECHISHDAGI AFZALLIKLARI

Mo‘ydinjonov S.O‘
FarDU talabasi, samandar6420@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan Koshi masalasini yechishda takomillashtirilgan Eyler usulining mohiyati va afzalliklari yoritilgan. Usulning nazariy asoslari, hisoblash algoritmi hamda aniqlik va barqarorlik xususiyatlari tahlil qilingan. Shuningdek, takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usuli bilan solishtirilib, uning amaliy masalalarni yechishdagi ustun jihatlari asoslab berilgan.*

Kalit so‘zlar: *Koshi masalasi, takomillashtirilgan Eyler usuli, oddiy differensial tenglama, sonli usullar, aniqlik, barqarorlik.*

Kirish

Oddiy differensial tenglamalar nazariyasida muhim o‘rin tutuvchi Koshi masalasini analitik usullar bilan yechish har doim ham imkoni bo‘lavermaydi. Ayniqsa, tenglama murakkab bo‘lsa yoki yopiq ko‘rinishdagi aniq yechim mavjud bo‘lmasa, sonli usullarga murojaat qilish zarur bo‘ladi. Shu sababli sonli tahlilda sodda, tushunarli va yetarlicha aniq usullarni ishlab chiqish dolzarb masala hisoblanadi. Takomillashtirilgan Eyler usuli ana shunday usullardan biri bo‘lib, u oddiy Eyler usulining kamchiliklarini bartaraf etish va Koshi masalasini aniqroq yechish maqsadida taklif etilgan. Ushbu maqolada takomillashtirilgan Eyler usulining nazariy asoslari, Koshi masalasini yechishdagi aniqlik va barqarorlik xususiyatlari hamda oddiy Eyler usuli bilan solishtirgandagi afzalliklari yoritiladi.

Takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usulining aniqligini oshirish maqsadida ishlab chiqilgan sonli usullardan biri bo‘lib, u birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan Koshi masalasini yechishda keng qo‘llaniladi. Mazkur usulning nazariy asosi differensial tenglamaning yechimini lokal ravishda yaxshiroq yaqinlashtirish g‘oyasiga tayanadi. Oddiy Eyler usulida yechimning keyingi nuqtadagi qiymati faqat joriy nuqtadagi hosila qiymati orqali aniqlansa, takomillashtirilgan Eyler usulida hosilaning o‘zgarishi ham inobatga olinadi. Bu esa usulning yaqinlashish tezligini oshiradi va hisoblash xatolarini kamaytiradi.

Koshi masalasi odatda

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

ko‘rinishida beriladi. Takomillashtirilgan Eyler usulida hisoblash jarayoni ikki bosqichda amalga oshiriladi. Avval oddiy Eyler formulasi yordamida oraliq nuqtadagi taxminiy yechim aniqlanadi. Ushbu oraliq yechimdan foydalanib, keyingi nuqtadagi hosila qiymati topiladi va yakuniy yechim joriy nuqtadagi hamda oraliq nuqtadagi hosilalarning o‘rtacha qiymati orqali hisoblanadi. Mazkur yondashuv yechim trayektoriyasining haqiqiy egri chizig‘iga yaqinroq bo‘lishini ta’minlaydi.

Takomillashtirilgan Eyler usulining muhim afzalliklaridan biri - uning aniqlik tartibi oddiy Eyler usuliga nisbatan yuqoriroq bo‘lishidir. Agar oddiy Eyler usulida global xatolik birinchi tartibli bo‘lsa, takomillashtirilgan Eyler usulida bu xatolik ikkinchi tartibli bo‘ladi. Bu esa bir xil qadam uzunligida hisoblash olib borilganda ancha aniq natijalarga erishish imkonini beradi. Shu sababli amaliy masalalarda, ayniqsa yechimning silliqligi va barqarorligi muhim bo‘lgan holatlarda, aynan takomillashtirilgan Eyler usuli afzal ko‘riladi.

Shuningdek, ushbu usulning algoritmi nisbatan sodda bo‘lib, uni dasturlash va amaliy hisoblashlarda qo‘llash qulaydir. Murakkab yuqori tartibli Runge–Kutta usullariga nisbatan hisoblash xarajati kamroq bo‘lsa-da, oddiy Eyler usuliga qaraganda ancha ishonchli natija beradi. Shu jihatdan u nazariy va amaliy hisoblashlar o‘rtasida muvozanatni ta’minlovchi samarali sonli usul hisoblanadi. Takomillashtirilgan Eyler usuli tarixan klassik sonli tahlil maktabiga mansub bo‘lib, uning ildizlari Leonhard Euler nomi bilan bog‘liq bo‘lgan Eyler g‘oyalarining rivojlantirilgan shakli sifatida qaraladi.

Koshi masalasini yechishda takomillashtirilgan Eyler usulining asosiy ustunligi uning aniqligi va barqarorligi bilan bevosita bog‘liqdir. Oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan Koshi masalasida yechimning boshlang‘ich shartga sezgirligi va hisoblash jarayonida xatolarning to‘planishi muhim muammo hisoblanadi. Shu nuqtai nazardan, sonli usulning qanchalik aniqligi va barqaror ishlashi amaliy natijaning ishonchliligini belgilaydi.

Takomillashtirilgan Eyler usuli aniqlik jihatidan oddiy Eyler usulidan sezilarli darajada ustun turadi. Buning sababi shundaki, bu usulda yechimni hisoblash

jarayonida faqat bitta nuqtadagi hosila emas, balki hosilaning oraliq nuqtadagi qiymati ham hisobga olinadi. Natijada differensial tenglamaning haqiqiy yechim egri chizig‘i lokal ravishda ancha yaxshi yaqinlashtiriladi. Amaliy jihatdan bu shuni anglatadiki, qadam uzunligi bir xil bo‘lgan holatda takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usuliga nisbatan kichikroq xatolik beradi. Ayniqsa, yechim tez o‘zgaradigan yoki egri chiziqning egriligi katta bo‘lgan masalalarda bu farq yaqqol seziladi.

Aniqlik masalasida yana bir muhim jihat - global xatolikning tartibidir. Takomillashtirilgan Eyler usulida lokal xatolik kichikroq bo‘lgani sababli, qadamlar soni ortib borganda umumiy xatolik sekinroq o‘sadi. Bu esa hisoblash jarayonini haddan tashqari mayda qadamlar bilan olib borishni talab qilmaydi va hisoblash vaqtini tejaydi. Shu sababli ushbu usul amaliy muhandislik, fizika va iqtisodiy modellashtirish masalalarida tez-tez qo‘llaniladi.

Barqarorlik nuqtai nazaridan qaralganda ham takomillashtirilgan Eyler usuli muhim afzalliklarga ega. Koshi masalasini yechishda boshlang‘ich shartdagi yoki oraliq hisoblashlardagi kichik xatolar keyingi nuqtalarda qanday ta’sir ko‘rsatishi muhim hisoblanadi. Agar usul barqaror bo‘lmasa, kichik xatoliklar tezda kattalashib, yechimning ishonchliligini yo‘qqa chiqaradi. Takomillashtirilgan Eyler usulida esa hosilalarning o‘rtacha qiymatidan foydalanish hisoblash jarayonini yumshatadi va xatolarning keskin o‘sib ketishining oldini oladi.

Bu usul ayniqsa silliq funksiyalar bilan berilgan differensial tenglamalar uchun yaxshi barqarorlik xususiyatlarini namoyon qiladi. Qadam uzunligi to‘g‘ri tanlangan taqdirda, yechimning umumiy xulqi haqiqiy analitik yechimga mos keladi va sun’iy tebranishlar yoki keskin og‘ishlar yuzaga kelmaydi. Shu jihatdan u oddiy Eyler usuliga qaraganda ancha ishonchli hisoblanadi, biroq hisoblash murakkabligi jihatidan hali ham nisbatan sodda bo‘lib qoladi.

Takomillashtirilgan Eyler usulining oddiy Eyler usuli bilan solishtirilgandagi afzalliklari. Avvalo, ularning yechimga yondashish uslubidagi farqlar bilan izohlanadi. Oddiy Eyler usuli differensial tenglama yechimini qurishda eng sodda

sonli yondashuv bo‘lib, u yechim egri chizig‘ini har bir qadamda to‘g‘ri chiziq bilan yaqinlashtiradi. Bunda keyingi nuqtadagi yechim faqat joriy nuqtadagi hosila qiymatiga tayanadi. Natijada usul algoritmik jihatdan juda sodda bo‘lsa-da, aniqlik past bo‘lib, xatoliklar tez to‘planadi. Takomillashtirilgan Eyler usuli aynan shu kamchiliklarni kamaytirish maqsadida ishlab chiqilgan.

Oddiy Eyler usulida yechim egri chizig‘ining faqat boshlang‘ich nuqtadagi yo‘nalishi hisobga olinadi, holbuki differensial tenglama yechimi ko‘pincha egri chiziqli xarakterga ega bo‘ladi. Takomillashtirilgan Eyler usulida esa bu holat inobatga olinib, dastlab oraliq nuqtadagi taxminiy yechim topiladi va shu nuqtadagi hosila ham hisoblash jarayoniga jalb qilinadi. Shundan so‘ng joriy nuqta va oraliq nuqtadagi hosilalarning o‘rtacha qiymati olinadi. Bu yondashuv yechim egri chizig‘ining haqiqiy shakliga yaqinroq natija beradi.

Aniqlik jihatidan solishtirilganda, takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usulidan ancha ustun hisoblanadi. Oddiy Eyler usulida global xatolik birinchi tartibli bo‘lib, qadam uzunligi kamaytirilmaguncha aniq natijaga erishish qiyin. Takomillashtirilgan Eyler usulida esa xatolikning tartibi yuqoriroq bo‘lgani sababli, bir xil qadam uzunligida ham sezilarli darajada aniqroq natija olinadi. Bu esa hisoblash jarayonida qadamlar sonini haddan tashqari ko‘paytirishga ehtiyoj qoldirmaydi.

Barqarorlik nuqtai nazaridan ham ikki usul o‘rtasida muhim farqlar mavjud. Oddiy Eyler usulida kichik xatoliklar keyingi qadamlar davomida tez o‘sib ketishi mumkin, ayniqsa qadam uzunligi nisbatan katta tanlangan bo‘lsa. Takomillashtirilgan Eyler usulida esa hosilalarning o‘rtacha qiymatidan foydalanish hisoblash jarayonini muvozanatlashtiradi va xatolarning keskin ortib ketish ehtimolini kamaytiradi. Shu sababli u barqarorroq natija beradi va yechimning umumiy xulqini yaxshiroq saqlab qoladi.

Hisoblash murakkabligi jihatidan qaralganda, takomillashtirilgan Eyler usuli oddiy Eyler usuliga nisbatan biroz ko‘proq hisoblashni talab qiladi, chunki har bir qadamda qo‘shimcha hosila hisoblanadi. Biroq bu qo‘shimcha xarajat yuqori aniqlik

va ishonchlilik evaziga o‘zini to‘liq oqlaydi. Murakkab Runge–Kutta usullari bilan solishtirilganda esa takomillashtirilgan Eyler usuli hali ham sodda va tushunarli bo‘lib qoladi.

Misol.

$$y' = (x^2+1)y - 3,4x$$

$$y(0) = 2,5$$

$$h = 0,1;\ f(x) = (x^2+1)y - 3,4x;\ x_0 = 0 \quad x_3 = 0,3 \quad x_6 = 0,6 \quad x_9 = 0,9$$

$$x_1 = 0,1 \quad x_4 = 0,4 \quad x_7 = 0,7;\ x_2 = 0,2 \quad x_5 = 0,5 \quad x_8 = 0,8$$

Euler usuli

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2,5 + 0,1 \cdot ((0^2+1) \cdot 2,5 - 3,4 \cdot 0) = 2,5 + 0,1 \cdot 2,5 = 2,75$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2,75 + 0,1 \cdot ((0,1^2+1) \cdot 2,75 - 3,4 \cdot 0,1) = 2,75 + 0,24375 = 2,99375$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 2,99375 + 0,1 \cdot ((0,2^2+1) \cdot 2,99375 - 3,4 \cdot 0,2) = 2,99375 + 0,24335 = 3,2371$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 3,2371 + 0,1 \cdot ((0,3^2+1) \cdot 3,2371 - 3,4 \cdot 0,3) = 3,2371 + 0,2508439 = 3,4879439$$

$$y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 3,4879439 + 0,1 \cdot ((0,4^2+1) \cdot 3,4879439 - 3,4 \cdot 0,4) = 3,4879439 + 0,2686 \approx 3,75654$$

$$y_6 = y_5 + h \cdot f(x_5, y_5) = 3,75654 + 0,1 \cdot ((0,5^2+1) \cdot 3,75654 - 3,4 \cdot 0,5) = 3,75654 + 0,2995675 = 3,4561075$$

$$y_7 = y_6 + h \cdot f(x_6, y_6) = 3,4561075 + 0,1 \cdot ((0,6^2+1) \cdot 3,4561075 - 3,4 \cdot 0,6) = 3,4561075 + 0,26603062 \approx 3,72214$$

$$y_8 = y_7 + h \cdot f(x_7, y_7) = 3,72214 + 0,1 \cdot ((0,7^2+1) \cdot 3,72214 - 3,4 \cdot 0,7) = 3,72214 + 0,316599 \approx 4,038739$$

$$y_9 = y_8 + h \cdot f(x_8, y_8) = 4,038739 + 0,1 \cdot ((0,8^2+1) \cdot 4,038739 - 3,4 \cdot 0,8) = 4,038739 + 0,39035 = 1,576522$$

Eulerning takomillashgan metodi.

$n = 0$

$$x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 e + \frac{1}{2}h \Rightarrow x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{1}{2}0,1 \Rightarrow x_{\frac{1}{2}} = 0,05$$

$$y_{\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0) = 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot ((0^2+1) \cdot 2,5 - 3,4 \cdot 0) = 2,5 + 0,05 \cdot 2,5 = 2,625$$

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+\frac{1}{2}} \Rightarrow f_{n+\frac{1}{2}} = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

$$f_{\frac{1}{2}} = f(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}) = 2,625 \cdot (0,05^2+1) - 3,4 \cdot 0,05 = 2,4615625$$

$$y_1 = y_0 + hf_{\frac{1}{2}} \Rightarrow y_1 = 2,5 + 0,1 \cdot\ 2,4615625 = 2,7615625$$

$n = 1$

$$x_{\frac{3}{2}} = x_1 + \frac{1}{2}h \Rightarrow x_{\frac{3}{2}} = 0,15\,,\ y_{\frac{3}{2}} = y_1 + \frac{1}{2}hf(x_1, y_1) \Rightarrow$$

$$y_{\frac{3}{2}} = 2,7615625 + 0,05 \cdot\ ((0,1^2 + 1) \cdot\ 2,7615625 - 3,4 \cdot\ 0,1) \approx 2,88402$$

$$f_{\frac{3}{2}} = (0,15^2 + 1) \cdot\ 2,88402 - 3,4 \cdot\ 0,15 \approx 2,43891$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot\ f_{\frac{3}{2}} = 2,7615625 + 0,1 \cdot\ 2,43891 \approx 3,0054015$$

$n = 2$

$$x_{\frac{5}{2}} = x_2 + \frac{1}{2}h \Rightarrow x_{\frac{5}{2}} = 0,25\,,\ y_{\frac{5}{2}} = y_2 + \frac{1}{2}hf(x_2, y_2) \Rightarrow$$

$$y_{\frac{5}{2}} = 3,0054015 + 0,05 \cdot\ ((0,2^2 + 1) \cdot\ 3,0054015 - 3,4 \cdot\ 0,2) \approx 3,12768$$

$$f_{\frac{5}{2}} = (0,25^2 + 1) \cdot\ 3,12768 - 3,4 \cdot\ 0,25 \approx 2,47316$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot\ f_{\frac{5}{2}} \Rightarrow y_3 = 3,0054015 + 0,1 \cdot\ 2,47316 \approx 3,2527175$$

$n = 3$

$$x_{\frac{7}{2}} = 0,3 + \frac{1}{2} \cdot\ 0,1 = 0,35$$

$$y_{\frac{7}{2}} = 3,2527175 + 0,05 \cdot\ ((0,3^2 + 1) \cdot\ 3,2527175 - 3,4 \cdot\ 0,3) \approx 3,37899$$

$$f_{\frac{7}{2}} = (0,35^2 + 1) \cdot\ 3,37899 - 3,4 \cdot\ 0,35 \approx 2,60292$$

$$y_4 = y_3 + hf_{\frac{7}{2}}$$

$$y_4 = 3,2527175 + 0,1 \cdot\ 2,60292 \approx 3,5130095$$

$n = 4$

$$x_{\frac{9}{2}} = 0,4 + 0,05 = 0,45$$

$$y_{\frac{9}{2}} = 3,5130095 + 0,05 \cdot ((0,4^2 + 1) \cdot 3,5130095 - 3,4 \cdot 0,4) \approx 3,64876$$

$$f_{\frac{9}{2}} = (0,45^2 + 1) \cdot 3,64876 - 3,4 \cdot 0,45 \approx 2,85763\$\$y_5 = 3,5130095 + 0,1 \cdot 2,85763 \approx 3,798773$$

$n = 5$

$$x_{\frac{11}{2}} = 0,5 + 0,05 = 0,55$$

$$y_{\frac{11}{2}} = 3,798773 + 0,05 \cdot ((0,5^2 + 1) \cdot 3,798773 - 3,4 \cdot 0,5) \approx 3,951196$$

$$f_{\frac{11}{2}} = (0,55^2 + 1) \cdot 3,951196 - 3,4 \cdot 0,55 \approx 3,27643$$

$$y_6 = 3,798773 + 0,1 \cdot 3,27643 \approx 4,126416$$

$n = 6$

$$x_{\frac{13}{2}} = 0,6 + 0,05 = 0,65$$

$$y_{\frac{13}{2}} = 4,126416 + 0,05 \cdot ((0,6^2 + 1) \cdot 4,126416 - 3,4 \cdot 0,6) \approx 4,305012$$

$$f_{\frac{13}{2}} = (0,65^2 + 1) \cdot 4,305012 - 3,4 \cdot 0,65 \approx 3,91388$$

$$y_7 = 4,126416 + 0,1 \cdot 3,91388 = 4,517804$$

$n = 7$

$$x_{\frac{15}{2}} = 0,7 + 0,05 = 0,75$$

$$y_{\frac{15}{2}} = 4,517804 + 0,05 \cdot ((0,7^2 + 1) \cdot 4,517804 - 3,4 \cdot 0,7) \approx 4,73538$$

$$f_{\frac{15}{2}} = (0,75^2 + 1) \cdot 4,73538 - 3,4 \cdot 0,75 \approx 4,849$$

$$y_8 = 4,517804 + 0,1 \cdot 4,849 = 5,002704$$

$n = 8$

$$x_{\frac{17}{2}} = 0,8 + 0,05 = 0,85$$

$$y_{\frac{17}{2}} = 5,002704 + 0,05 \cdot ((0,8^2 + 1) \cdot 5,002704 - 3,4 \cdot 0,8) \approx 5,27693$$

$$f_{\frac{17}{2}} = (0{,}85^2 + 1) \cdot\ 5{,}27693 - 3{,}4 \cdot\ 0{,}85 \approx 6{,}19951$$

$$y_9 = 5{,}002704 + 0{,}1 \cdot\ 6{,}19951 = 5{,}622655$$

eyler				
xn	yn	y(n+1)	h	f
0	2.5	2.75	0.1	2.5
0.1	2.75	2.75		2.4375
0.2	2.99375	2.99375		2.4335
0.3	3.2371	3.2371		2.508439
0.4	3.487944	3.487944		2.686015
0.5	3.756545	3.756545		2.995682
0.6	4.056114	4.056114		3.476314
0.7	4.403745	4.403745		4.18158
0.8	4.821903	4.821903		5.187921

Takomillashgan eyler				
xn	yn	yn+1	h	f
0.05	2.625	2.871156	0.1	2.461563
0.15	2.871875	3.114524		2.426492
0.25	3.115425	3.361439		2.460139
0.35	3.362522	3.620965		2.584431
0.45	3.622245	3.90482		2.825749
0.55	3.906329	4.228129		3.217994
0.65	4.229929	4.610637		3.807074
0.75	4.612824	5.078578		4.657538
0.85	5.081299	5.667553		5.862538

Xulosa

Tahlillar shuni ko‘rsatadiki, takomillashtirilgan Eyler usuli Koshi masalasini yechishda oddiy Eyler usuliga nisbatan ancha samarali va ishonchli hisoblanadi. Ushbu usulda hosilalarning o‘rtacha qiymatidan foydalanish yechim egri chizig‘ining haqiqiy ko‘rinishini yaxshiroq yaqinlashtirish imkonini beradi. Natijada hisoblash xatoliklari kamayadi va usulning umumiy aniqligi oshadi. Barqarorlik nuqtai nazaridan ham takomillashtirilgan Eyler usuli ustunlikka ega bo‘lib, kichik xatolarning keyingi qadamlar davomida keskin ortib ketish ehtimolini pasaytiradi. Hisoblash murakkabligi biroz ortishiga qaramay, olingan natijaning sifati bu qo‘shimcha xarajatni to‘liq oqlaydi. Shu bois takomillashtirilgan Eyler usuli nazariy va amaliy masalalarda, xususan, Koshi masalasini yechishda keng qo‘llash uchun maqsadga muvofiq bo‘lgan samarali sonli usul sifatida qaraladi. Bu usulning paydo bo‘lishi va rivojlanishi sonli tahlil asoschilaridan biri bo‘lgan Leonhard Euler g‘oyalarining mantiqiy davomi sifatida baholanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. II qism. - Toshkent: O‘qituvchi.
2. Atkinson K.E. An Introduction to Numerical Analysis. - Wiley.
3. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. - Cengage Learning.

Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. - Springer.

ENERGIYA SAQLANISH SHARTINI QANOATLANTIRUVCHI BARQAROR SONLI SXEMALAR QURISH

Rojiboyeva M.A.

Farg'ona DU talabasi. mohinarojiboyeva@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada avvalo energiya tushunchasi haqida va uning saqlanish qonuni uning shartlari haqida ma'lumot, unga oid sxemalar qurish haqida gap boradi va energiya tushunchasi va energiya saqlanish qonuni haqida umumiy ma'lumotlar berilgan. Energiya saqlanishi fizik jarayonlarni to'g'ri tushunishda muhim ahamiyatga ega ekanligi tushuntiriladi. Shuningdek, energiyani saqlovchi sonli sxemalar qanday qurilishi ko'rib chiqiladi. Misol sifatida bir o'lchamli to'lqin tenglamasi tanlanib, unga sodda farqlar usuli yordamida sonli sxema tuzilgan. Qurilgan sxema uchun energiyaning vaqt davomida saqlanishi ko'rsatib beriladi. Olingan natijalar sonli hisoblashlarda energiya saqlanishining ahamiyatini tushunishga yordam beradi.

Kalit so'zlar: Energiya, energiya saqlanishi, sonli sxemalar, barqarorlik haqida, issiqlik tenglamari haqida tushuncha va unga oid masala.

Kirish. Fizik jarayonlarni o'rganishda energiya tushunchasi markaziy o'rin egallaydi. Energiya — bu tizimning ish bajarish qobiliyatini tavsiflovchi fizik kattalik bo'lib, tabiatdagi barcha harakat va o'zgarishlar energiya almashinuvi bilan bog'liqdir. Fizikaning asosiy qonunlaridan biri bo'lgan energiya saqlanish tamoyili ga ko'ra, yopiq tizimda energiya yo'qolmaydi va yo'qdan paydo bo'lmaydi, balki faqat bir ko'rinishdan boshqa ko'rinishga o'tadi. Klassik mexanikada energiya saqlanish tamoyili quyidagicha ifodalanadi: agar tizimga tashqi kuchlar ta'sir etmasa va kuchlar konservativ bo'lsa, u holda tizimning umumiy energiyasi vaqt davomida o'zgarmaydi. Matematik ko'rinishda bu quyidagicha yoziladi:

$$E = T + V$$

bu yerda: E -tizimning kinetik energiyasi T -tizimning potensial energiyasi

Kinetik energiya odatda quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Potensial energiya esa kuch maydoniga bog'liq bo'lib, konservativ kuchlar uchun

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

ko‘rinishda ifodalanadi. Agar kuch shu shartni qanoatlantirsa, u holda tizim konservativ hisoblanadi va energiya saqlanish qonuni amal qiladi.

Energiya saqlanishining matematik ifodasi quyidagi differensial tenglama orqali ham yozilishi mumkin:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Bu tenglama tizim energiyasining vaqt bo‘yicha o‘zgarmasligini bildiradi. Mazkur xossa fizik jarayonlarni modellashtirishda juda muhim bo‘lib, sonli hisoblashlarda ham albatta saqlanishi lozim. Ko‘plab fizik va texnik masalalar oddiy differensial tenglamalar yoki qisman differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Masalan, mexanik tizimlarning harakati Nyutonning ikkinchi qonuni asosida quyidagicha yoziladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

Bu tenglama ko‘p hollarda analitik usulda yechilmaydi. Ayniqsa murakkab kuchlar, murakkab boshlang‘ich shartlar yoki ko‘p o‘lchamli tizimlar uchun aniq yechim topish deyarli imkonsiz bo‘ladi. Shu sababli, amaliy masalalarda sonli usullardan foydalaniladi.

Energiya saqlanish qonuni tabiatdagi eng umumiy va fundamental qonunlardan biri bo‘lib, u barcha fizik jarayonlar uchun amal qiladi. Ushbu qonunga ko‘ra, yopiq tizimda energiya yo‘qolmaydi va yo‘qdan paydo bo‘lmaydi, balki faqat bir ko‘rinishdan boshqa ko‘rinishga o‘tadi. Tizimning umumiy energiyasi vaqt davomida o‘zgarmas bo‘lib qoladi.

Mazkur qonun mexanika, termodinamika, elektrodinamika, kvant mexanikasi va zamonaviy fizikaning barcha sohalarida asosiy nazariy tayanch bo‘lib xizmat qiladi. Energiya saqlanish qonuni fizik jarayonlarning barqarorligi va qaytariluvchanligini tushuntirishda muhim ahamiyatga ega.

Energiya tushunchasi va uning turlari:

Energiya — bu jism yoki tizimning ish bajarish qobiliyatini ifodalovchi skalyar fizik kattalikdir. Mexanikada energiya asosan quyidagi turlarga bo‘linadi:

-kinetik energiya;

-potensial energiya.

Kinetik energiya: Kinetik energiya jismning harakati bilan bog‘liq bo‘lib, quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

m — jism massasi, v — jism tezligi.

Ushbu formula jism qanchalik tez harakat qilsa, uning kinetik energiyasi shunchalik katta bo‘lishini ko‘rsatadi.

Potensial energiya: Potensial energiya jismning kuch maydonidagi holati bilan bog‘liq bo‘ladi. Potensial energiya kuchning tabiatiga qarab turlicha aniqlanadi.

Gravitatsion maydonda potensial energiya:

$$V = mgh$$

prujina (elastik) tizim uchun esa:

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

ko‘rinishida ifodalanadi, bu yerda, k-prujinaning qattiqlik koeffitsienti, x-muvozanat holatidan siljish.

Energiya saqlanish qonunining umumiy ifodasi. Agar tizim yopiq bo‘lib, unga tashqi kuchlar ta’sir qilmasa va ichki kuchlar konservativ bo‘lsa, u holda tizimning umumiy mexanik energiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$E = T + V$$

Energiya saqlanish qonuniga ko’ra: $E = const$ yoki differensial ko‘rinishda:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Bu tenglama tizim energiyasining vaqt bo‘yicha o‘zgarmasligini matematik jihatdan ifodalaydi.

Energiya saqlanish qonunining Nyuton qonunlari bilan bog‘liqligi

Energiya saqlanish qonuni Nyutonning ikkinchi qonunidan kelib chiqadi. Agar jismga ta’sir qiluvchi kuch konservativ bo‘lsa:

$$\vec{F} = -\Delta V$$

va Nyuton qonuni:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

Ko‘rinishida yozilsa, u holda ushbu tenglamani integrallash orqali energiya saqlanish qonuni olinadi. Bu holat energiya saqlanish qonuni fundamental mexanik qonunlardan biri ekanligini ko‘rsatadi.

Konservativ va nokonservativ tizimlar quyidagicha:

Energiya saqlanish qonuni to‘liq faqat konservativ tizimlarda amal qiladi.

Konservativ tizimlar quyidagi xususiyatlarga ega:

- kuchlar potensial energiya orqali ifodalanadi;
- kuch bajargan ish yo‘ldan bog‘liq emas;
- mexanik energiya saqlanadi.

Agar tizimda ishqalanish, qarshilik yoki tashqi kuchlar mavjud bo‘lsa, u holda mexanik energiya saqlanmaydi. Biroq energiya yo‘qolmaydi, balki issiqlik yoki boshqa ko‘rinishga o‘tadi.

Sonli usullar — bu differensial tenglamalarni taxminiy yechish usullari bo‘lib, ular uzluksiz vaqt va fazoni diskret nuqtalar orqali almashtirishga asoslanadi. Vaqt o‘qi odatda kichik Δt qadam bilan bo‘linadi:

$$t_n = n\Delta t\ ,\ n = 0,1,2....$$

Natijada uzluksiz funksiya o‘rniga diskret ketma-ketlik hosil bo‘ladi. Ana shu diskretlash asosida qurilgan algoritm sonli sxema deb ataladi.

Sonli sxema — bu differensial tenglamaning diskret analogi bo‘lib, u yechimni bosqichma-bosqich hisoblash imkonini beradi. Sonli sxemalar hisoblash qulayligi sababli keng qo‘llaniladi, ammo ular fizik qonunlarni, xususan energiya

saqlanish shartini buzishi mumkin. Eng sodda sonli sxemalardan biri — Eyler sxemasi hisoblanadi. Agar quyidagi differensial tenglama berilgan bo‘lsa:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

u holda Eyler sxemasi quyidagicha yoziladi:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n, t_n)$$

Bu sxema hisoblash jihatidan juda sodda bo‘lsa-da, uning asosiy kamchiligi energiya saqlanish shartini qanoatlantirmasligidir. Uzoq vaqt davomida hisoblash olib borilganda Euler sxemasi yordamida topilgan yechimda energiya sun’iy ravishda ortib yoki kamayib boradi. Bu hodisa energiya drifti deb ataladi.Energiya driftining mavjudligi fizik nuqtai nazardan jiddiy xatolik hisoblanadi. Masalan, tebranish tizimlarida amplituda asossiz ravishda o‘sib ketishi yoki butunlay so‘nib qolishi mumkin. Bu esa real fizik jarayonga mos kelmaydi. Sonli modellashtirishda yana bir muhim tushuncha — barqarorlik tushunchasidir. Sonli sxema barqaror deyiladi, agar boshlang‘ich shartlardagi kichik xatoliklar vaqt o‘tishi bilan cheksiz kattalashib ketmasa. Aks holda, sxema barqaror emas deb hisoblanadi. Barqarorlik masalasi matematik jihatdan quyidagicha ifodalanadi:

$$|x_n| \le C, \qquad n \to \infty$$

bu yerda, C — cheklangan musbat son.

Energiya saqlanish shartini qanoatlantiruvchi sonli sxemalar, odatda, yuqori darajadagi barqarorlikka ega bo‘ladi. Chunki energiya tizimning asosiy invariantlaridan biri bo‘lib, uni saqlash hisoblash jarayonida yechimning fizik jihatdan to‘g‘ri bo‘lishini ta’minlaydi. Shunday qilib, energiya saqlanishining fizik tamoyili sonli modellashtirishda muhim mezon hisoblanadi. Sonli usullar va sonli sxemalar yordamida murakkab differensial tenglamalar yechiladi, ammo sxema tanlashda energiya saqlanish va barqarorlik shartlarini hisobga olish zarur. Aynan shu sababli energiya saqlanish shartini qanoatlantiruvchi barqaror sonli sxemalarni qurish va tadqiq etish bugungi kunda dolzarb ilmiy masala hisoblanadi.

Mavzuga oid issiqlik tenglamalaridan misol tariqasida ko’rsak:

Uzunligi L=1L = 1L=1 ga teng bo‘lgan bir o‘lchamli novdada issiqlikning vaqt bo‘yicha tarqalishini o‘rganamiz. Novdaning uchlari doimo nol haroratda saqlanadi. Boshlang‘ich vaqtda novda bo‘ylab harorat sinusoidal taqsimlangan. Masala quyidagi issiqlik tenglamasi bilan ifodalanadi:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0$$

bu yerda: $u(x,t)$—novdadagi harorat

Chegaraviy shartlar :

$$u(0,t) = 0, \;\; u(1,t) = 0, \; t > 0.$$

Boshlang‘ich sharti

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \;\; 0 \le x \le 1.$$

Issiqlik tenglamasini yechish uchun Fure teoremasiga asoslangan holda o’zgaruvchilarni ajratish usulidan foydalandim:

Ya’ni yechim quyidagicha:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Hosilalarni hisoblanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)\partial, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T'(t)$$

Issiqlik tenglamasiga qo‘yiladi:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \;\; / \;\; X(x)T(t)$$

Har ikki tomonni $X(x)T(t)$ ga bo‘lib, quyidagiga erishiladi:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

bu yerda λ — ajratish doimiysi.

Vaqt funksiyasi uchun:

$$T'(t) + \lambda_n T(t) = 0$$

Bu differensial tenglama holiga kelib , yechimi:

$$T_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}$$

Fure teoremasiga ko‘ra, umumiy yechim quyidagi qator ko‘rinishida yoziladi:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\pi x)$$

bu yerda C_n — Fure koeffitsiyentlari. Fure koeffitsiyentlarini aniqlash quyidagicha: boshlang‘ich shartdan foydalanamiz:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\pi x)$$

lekin masalada:

$$u(x,0)=\sin(\pi x).$$

Bu Fure qatorining faqat bitta hadi ekanligini bildiradi.

Shuning uchun:

$$C_1=1, C_n=0,\ (n\neq 1)$$

Yakuniy yechim quyidagicha:

Natijada issiqlik tenglamasining aniq yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$$

$r = 0,3999999999999999$

$Oxirgi\ \ vaqt\ \ qatlamdagi\ \ yechim:$

$x = 0,0, u = 0,000000$
$x = 0,1, u = 0,042942$
$x = 0,2, u = 0,079779$
$x = 0,3, u = 0,109807$
$x = 0,4, u = 0,129086$
$x = 0,5, u = 0,135729$
$x = 0,6, u = 0,129086$
$x = 0,7, u = 0,109807$
$x = 0,8, u = 0,079779$
$x = 0,9, u = 0,041942$

Xulosa:

Ushbu maqola orqali energiya saqlanish shartini qanoatlantiruvchi barqaror sonli sxemalar nazariy va amaliy jihatdan o‘rganildi. Avvalo, energiya saqlanish qonuni fizikaning fundamental qonunlaridan biri sifatida tahlil qilindi va uning

matematik model shaklida ifodalanishi ko‘rsatildi. Shuningdek, sonli usullar, sonli sxemalar va ularning barqarorlik tushunchalari batafsil o‘rganildi. Barqarorlik sonli sxemaning kichik xatolarga nisbatan chidamliligini tavsiflaydi va bu xatolarning vaqt davomida keskin o‘sib ketmasligini ta’minlaydi. Maqolada energiya nima ekanligi va uning saqlanish qonuni tushuntirildi. Energiya saqlanishi hisoblashlarda nega muhimligi misollar orqali ko‘rsatildi. Issiqlik tenglamasiga oid sodda sonli masala yechildi. Natijalar energiya saqlanishi va barqarorlik sonli sxemalar uchun muhim ekanligini ko‘rsatadi. Maqola orqali mavzuni kengroq yoritib beroldim deb o’ylayman va kelajakda bu o’rganganlarim o’z faoliyatimda azqotadi deb o’ylayman.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR

1. Xudoyberganov A., Raxmonov S. Differensial tenglamalar va sonli usullar. — Toshkent: Fan, 2018.
2. Islomov A. Matematika va hisoblash usullari, Toshkent: O‘zbekiston, 2018.
3. Samarskiy A.A. Ayirmali sxemalar nazariyasi.-Moska: Nauka, 1989.
4. Isroilov M.I. – ‘‘Hisoblash metodlari’’. Toshkent, O‘qituvchi, 2003.

MUVOZANAT VA TURG‘UNLIK MASALALARIGA DOIR MASALALARNI MODELLASHTIRISH

Sharofutdinov I.U., Muhammadvaliyeva M.Z.

FarDU katta o‘qituvchisi, p.f.f.d.(PhD). Iqbol0766@gmail.com

FarDU talabasi. mohichehramuhammadvaliyeva@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada dinamik tizimlarda muvozanat va turg‘unlik masalalarining nazariy asoslari, ularni matematik modellashtirish usullari hamda Lyapunov yondashuvining amaliy qo‘llanilishi tahlil qilinadi. Muvozanat nuqtalarining tizim harakatiga ta’siri, turg‘unlikning turli darajalari va ularni aniqlash mezonlari ilmiy jihatdan asoslab beriladi. Olingan natijalar matematik modellar yordamida fizik, iqtisodiy, ekologik va texnik tizimlarning barqarorligini baholashning dolzarbligini ko‘rsatadi.*

Kalit so‘zlar: *muvozanat, turg‘unlik, dinamik tizim, Lyapunov nazariyasi, nolinear tenglamalar, matematik modellashtirish, barqarorlik mezonlari.*

Zamonaviy ilm-fan va texnika taraqqiyotida murakkab jarayonlarni matematik modellashtirish asosiy tadqiqot vositalaridan biriga aylandi. Fizika, biologiya, kimyo, iqtisodiyot, ekologiya, muhandislik hamda texnologik tizimlarda kuzatiladigan ko‘plab jarayonlar vaqt o‘tishi bilan o‘zgaruvchi dinamik tizimlar sifatida qaraladi. Ushbu tizimlarning asosiy xususiyati shundaki, ular turli tashqi va ichki omillar ta’sirida muvozanat holatiga intilishi yoki undan chetlashi mumkin. Tizimning muvozanati va uning turg‘unligini aniqlash esa jarayonlarning barqaror ishlashi, uzoq muddatli rivojlanishning kafolatlanishi va boshqaruv samaradorligi uchun hal qiluvchi ahamiyatga egadir.

Matematik modellashtirishda “muvozanat” tushunchasi odatda tizimning o‘zgarmas yoki barqaror holati sifatida ta’riflanadi. Masalan, fizikada jismning kuchlar ta’siri ostida muvozanatga kelishi, biologiyada populyatsiyalarning tabiiy barqaror soni, iqtisodiyotda esa talab va taklifning tenglashuvi muvozanat holatiga misol bo‘la oladi. Bunday holatlarning matematik tavsifi ko‘pincha differensial tenglamalar, farqli tenglamalar yoki boshqa dinamik modellar orqali ifodalanadi. Tizimning muvozanat nuqtalarini aniqlash uning kelajakdagi holatini bashorat qilish, nazorat qilish va optimallashtirish uchun fundamental ahamiyatga ega.

Tizimning faqat muvozanatga ega bo‘lishi yetarli emas; muvozanatning turg‘unligi – ya’ni kichik tashqi ta’sirlar ostida tizimning yana o‘sha holatga qayta olishi – eng muhim omildir. Turg‘unlik nazariyasi klassik Lyapunov g‘oyalari asosida shakllangan bo‘lib, u nafaqat chiziqli, balki nochiziqli tizimlar barqarorligini ham baholash imkonini beradi. Turg‘unlikni o‘rganish orqali tizimlarning qanday sharoitda barqaror ishlashi, qaysi parametrlar uning nozikligini oshirishi yoki aksincha, barqarorlashtirishi aniqlanadi.

Bugungi kunda muvozanat va turg‘unlik masalalari energetika tizimlarida, ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlarda, ekologik muvozanat modellarida, biomedikal tizimlarda, robototexnika va boshqaruv nazariyasida keng qo‘llanilmoqda. Ayniqsa, nochiziqli va ko‘p omilli tizimlarning ko‘payib borishi ushbu masalalarning yanada dolzarblashishiga sabab bo‘lmoqda.

Ushbu maqolaning asosiy maqsadi – turli matematik modellar misolida muvozanat holatlarini aniqlash, ularning turg‘unligini baholash, Lyapunov va chiziqlashtirish usullari yordamida barqarorlik shartlarini ilmiy asosda tadqiq qilishdan iborat. Shuningdek, modellarning amaliy talqinlari orqali nazariy natijalarning real jarayonlarga tatbiq imkoniyatlari ko‘rib chiqiladi.

Muvozanatning matematik talqini: Matematik modellashtirishda muvozanat tushunchasi tizimning vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmas yoki barqaror holatga kelishini ifodalaydi. Agar tizimni n-o‘zgaruvchili differensial tenglamalar orqali ifodalasak,

$$\frac{dx}{dt} = f(x),\ x \in R^n$$

unda muvozanat nuqtasi x* shunday nuqta bo‘lib, u yerda tizim o‘zgarishsiz qoladi, ya’ni $f(x^*) = 0$. Ushbu nuqta tizimning ichki va tashqi omillarga nisbatan barqarorligini aniqlashda markaziy ahamiyatga ega bo‘ladi. Chiziqli tizimlarda muvozanat nuqtalari ko‘pincha analitik yechim orqali aniqlanadi, lekin nochiziqli tizimlarda yechimning mavjudligi va tabiati ko‘pincha Lyapunov funksiyalari, chiziqlashtirish usuli yoki sonli modellashtirish orqali baholanadi.

Muvozanat masalalari turli sohalarda keng qo‘llaniladi. Fizik tizimlarda, masalan, elastik jismning muvozanat holati unga ta’sir etuvchi kuchlar va momentlarning natijasida aniqlanadi. Biologiyada populyatsiyalar soni va ekologik tizimlar barqaror holatga intiladi, bunda Lotka–Volterra modeli predator va prey populyatsiyalarining muvozanat nuqtalarini ifodalaydi. Iqtisodiyotda esa talab va taklifning tenglashuvi, bozor muvozanati va resurslar taqsimotining barqarorligi matematik nuqtai nazardan muvozanat nuqtalari bilan tavsiflanadi.

Muvozanat nuqtasining mavjudligi yetarli shart bo‘lsa-da, uning turg‘unligi tizimning haqiqiy barqaror ishlashini belgilaydi. Turg‘unlikni baholash uchun tizim x* yaqinida chiziqlashtiriladi:

$$x' = A(x - x^*), \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^*},$$

bu yerda A – Yakobi matrica (Jacobian). Matrikaning egenqiymatlari tizimning muvozanat nuqtasining barqarorligini belgilaydi. Agar barcha egenqiymatlar manfiy haqiqiy qismga ega bo‘lsa, nuqta asimptotik turg‘un, agar ba’zilari musbat bo‘lsa, nuqta turg‘un emas, haqiqiy qismlari nol bo‘lsa, nuqta neytral turg‘un hisoblanadi. Ushbu yondashuv tizimning dinamik xatti-harakatini aniqlash va turli parametrlar ostida barqarorlikni bashorat qilish imkonini beradi.

Muvozanat nuqtalarini aniqlash va ularning turg‘unligini baholash nafaqat nazariy qiziqish, balki amaliy jihatdan ham katta ahamiyatga ega. Masalan, energetika tizimlarida barqaror muvozanat nuqtasini aniqlash elektr stansiyalarining xavfsiz ishlashini ta’minlaydi, ekologik tizimlarda esa populyatsiyalarni barqaror saqlash choralarini ishlab chiqish mumkin. Shuningdek, iqtisodiy modellarni tahlil qilish orqali bozor barqarorligini va moliyaviy risklarni oldindan baholash imkoniyati yaratiladi.

Shu tariqa, matematik modellashtirishda muvozanat tushunchasi tizimning kelajakdagi holatini prognoz qilish, nazorat qilish va boshqaruv strategiyalarini ishlab chiqishda fundamental ahamiyatga ega bo‘lib, turg‘unlik nazariyasi bilan birgalikda tizimning barqaror ishlashini ilmiy asosda ta’minlashga imkon beradi.

Turg‘unlik nazariyasining asosiy tamoyillari: Tizimlarning uzoq muddat davomida barqaror ishlashi, tashqi ta’sirlarga berilgan javobi, muvozanat holatiga qaytish yoki undan uzoqlashish xususiyatlarini o‘rganish turg‘unlik nazariyasining asosiy vazifasidir. Matematik modellashtirishda turg‘unlik, avvalo, muvozanat nuqtasining kichik buzilishlar ostida o‘z holatini saqlab qolish-qolmasligi bilan belgilanadi. Agar tizimning boshlang‘ich holati muvozanat nuqtasiga yaqin bo‘lsa va vaqt o‘tishi bilan uning traektoriyasi yana shu nuqtaga qaytsa, bunday muvozanat asimptotik turg‘un deyiladi. Aksincha, systema kichik buzilishdan so‘ng asta-sekin muvozanatdan uzoqlashsa, u turg‘un emas deb hisoblanadi.

Turg‘unlikni tadqiq qilishning eng qudratli va umumlashtiruvchi usullaridan biri Lyapunov nazariyasidir. Lyapunov g‘oyasiga ko‘ra, tizimning turg‘unligini bevosita differensial tenglamalarning yechimini topmasdan ham aniqlash mumkin; buning uchun mos keluvchi maxsus funksiya – Lyapunov funksiyasini topish kifoya. Ushbu funksiya $V(x)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak: u muvozanat nuqtasida nolga teng bo‘lib, yaqin nuqtalarda musbat qiymatga ega bo‘lsin va vaqt bo‘yicha hosilasi $V'(x)$ manfiy bo‘lsin. Agar $\frac{dV}{dt} < 0$ sharti bajarilsa, tizimning muvozanat nuqtasi asimptotik turg‘unligiga ishora qiladi. Bu usulning afzalligi shundaki, u nochiziqli tizimlar uchun ham qo‘llanilishi mumkin va tizimning umumiy xatti-harakatiga ega bo‘lgan baho beradi.

Turg‘unlikni baholashning yana bir muhim yondashuvi chiziqlashtirish usulidir. Tizim muvozanat nuqtasi atrofida Taylor qatori orqali chiziqli shaklga keltiriladi va Yakobi matritsaning egenqiymatlari tahlil qilinadi. Agar barcha egenqiymatlarning haqiqiy qismlari manfiy bo‘lsa, muvozanat asimptotik turg‘un; agar hech bo‘lmaganda biri musbat bo‘lsa, tizim turg‘un emas; agar ba’zi egenqiymatlar nol haqiqiy qismga ega bo‘lsa, qo‘shimcha tahlil talab etiladi. Bu yondashuv chiziqli tizimlar uchun to‘liq, nochiziqli tizimlar uchun esa lokal barqarorlik bahosini beradi.

Fazoviy portretlar va trayektoriya tahlili ham turg‘unlikni ko‘rib chiqishda muhim rol o‘ynaydi. Tizimning fazoviy fazosida trayektoriyalarning muvozanat nuqtasi atrofidagi xatti-harakati tizimning barqarorligi haqida intuitiv va chuqur tasavvur beradi. Spiral manbalar, spiral cho‘kuvchilar, tugunlar va markazlar kabi fazoviy tuzilmalar muvozanatning turli sifatlarini ifodalaydi.

Turg‘unlik nazariyasining amaliy ahamiyati nihoyatda keng. Energetika tizimlarida elektr tarmoqlarining barqarorligi, ekologik modellar orqali populyatsiyalar o‘sishining nazorati, iqtisodiy tizimlarda bozor barqarorligini ta’minlash, robototexnika va avtomatik boshqaruv tizimlarida izchil harakatni kafolatlash kabi jarayonlar aynan turg‘unlik tahliliga asoslanadi. Tizimning barqaror yoki nobarqaror bo‘lishi uning real ishlash qobiliyatini belgilab, parametrlarni mos ravishda tanlash yoki boshqaruv mexanizmlarini optimallashtirish zaruratini keltirib chiqaradi.

Shunday qilib, turg‘unlik nazariyasi tizim xatti-harakatining sifat tahlilini beruvchi eng qudratli matematik yo‘nalishlardan biri bo‘lib, nafaqat nazariy, balki amaliy masalalarni hal etishda ham hal qiluvchi o‘rin tutadi. Lyapunov usullari, chiziqlashtirish texnikasi va fazoviy portretlar yordamida tizimlarning barqarorligini baholash hozirgi zamonaviy matematik modellashtirishning ajralmas qismiga aylangan.

Muvozanat va turg‘unlikning matematik modellar misolida tahlili: Muvozanat va turg‘unlik tushunchalarining mazmuni real matematik modellar orqali yanada aniqroq yoritiladi. Dinamik tizimlar turli fanlarda turlicha ko‘rinishlarda uchrashi mumkin, ammo ularning barchasida muvozanat nuqtalarini aniqlash va ularning barqarorligini baholash umumiy metodologik asosga ega. Quyida uch asosiy model – bir o‘zgaruvchili oddiy differensial tenglama, ikki o‘zgaruvchili ekologik model va iqtisodiy dinamik model – misolida ushbu masalalar keng tahlil qilinadi.

Birinchi misol sifatida bir o‘zgaruvchili logistik o‘sish modeli ko‘rib chiqiladi:

$$x' = ax - bx^2,\ a > 0, b > 0$$

Bu tenglama populyatsiyaning cheklangan resurslar ostida o‘sishini ifodalaydi. Muvozanat nuqtalari tenglama o‘ng tomoni nolga tenglashtirilganda aniqlanadi: $x_1 = 0$ va $x_2 = \frac{a}{b}$. Chiziqlashtirish orqali turg‘unlik baholanadi: hosila $f'(x) = a - 2bx$. Natijada $f'(0) = a > 0$, demak *x=0* nuqta turg‘un emas; $f'(\frac{a}{b}) = -a < 0$, ya’ni yuqori muvozanat nuqtasi asimptotik turg‘un. Bu populyatsiyaning tabiiy ravishda barqaror son atrofida shakllanishini matematik jihatdan asoslaydi.

Ikkinchi misol – ikki o‘zgaruvchili klassik Lotka–Volterra predator–prey modeli:

$$\begin{cases} x' = ax - \beta xy, \\ y' = -\gamma y + \delta xy, \end{cases}$$

bu yerda x – o‘lja, y – yirtqich. Muvozanat nuqtalari sifatida (0,0) va $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ aniqlanadi. Yakobi matritsa yordamida barqarorlik o‘rganilganda, trivial nuqta (0,0) turg‘un emasligi aniqlanadi, chunki minimal buzilish bilan tizim nol holatdan chetga chiqadi va o‘sish jarayoni boshlanadi. Ikkilamchi muvozanat nuqtasi esa neytral turg‘unlik namunasidir: eigenqiymatlar sof mavhum sonlar bo‘lib, tizim trayektoriyalari yopiq orbitaga ega. Bu holat tabiatda o‘lja va yirtqichning davriy o‘zgarishiga mos keladi. Aynan shu model ekologiyada ko‘p kuzatiladigan davriy populyatsiya tebranishlarini matematik jihatdan izohlaydi.

Uchinchi misol sifatida iqtisodiy o‘sishning Solow modeli ko‘rib chiqiladi:

$$k' = sf(k) - (\delta + n)k,$$

bu yerda k – bitta ishchiga to‘g‘ri keladigan kapital, s – jamg‘arma normasi, δ – kapital amortizatsiyasi, n – aholi o‘sish darajasi. Agar *f(k)* ishlab chiqarish funksiyasi Cobb–Douglas ko‘rinishda bo‘lsa, ya’ni $f(k) = k^{\alpha}$, unda muvozanat nuqtasi quyidagicha aniqlanadi:

$$sk^{\alpha} = (\delta + n)k.$$

Bundan barqaror kapital darajasi $k^* = (\frac{s}{\delta + n})^{\frac{1}{1-a}}$ hosil bo‘ladi. Hosila yordamida turg‘unlik tekshirilganda ushbu muvozanat nuqtasi asimptotik turg‘un ekani isbotlanadi. Bu iqtisodiyotning uzoq muddatli barqaror o‘sishi mavjudligini, resurslar to‘g‘ri taqsimlanganda iqtisodiy tizim o‘z muvozanatiga qaytishini ko‘rsatadi.

Ko‘rib chiqilgan modellar shuni ko‘rsatadiki, muvozanat va turg‘unlik tahlili turli fanlar bo‘ylab universal matematik tamoyillarga ega. Biologik, iqtisodiy yoki fizik jarayon bo‘lishidan qat’i nazar, dinamik tizimlarning barqarorligini baholash uchun muvozanat nuqtalarini aniqlash, chiziqlashtirish, eigenqiymatlarni tahlil qilish yoki Lyapunov yondashuvi qo‘llanadi. Bu metodlar real jarayonlarning kelajakdagi xatti-harakatini aniq prognoz qilish, tizimni boshqarish va amaliy qarorlar qabul qilishda muhim o‘rin tutadi.

Natijalar va muhokama: Ushbu maqolada muvozanat va turg‘unlik masalalarini matematik modellashtirish nuqtai nazaridan o‘rganish natijasida bir necha muhim xulosalar shakllantirildi. Avvalo, dinamik tizimlarda muvozanat nuqtalarini aniqlash jarayoni tizimning asosiy tuzilishini baholashda fundamental ahamiyatga ega ekani aniqlandi. Olingan nazariy tahlillar shuni ko‘rsatadiki, tizimning muvozanat holati uning ichki parametrlariga bevosita bog‘liq bo‘lib, kichik o‘zgarishlar ham butun tizimning davranishiga sezilarli ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Bu esa parametrlarning sezgirlik darajasini baholash hamda barqarorlikni mustahkamlovchi optimal boshqaruv strategiyalarini shakllantirishga asos yaratadi.

Turg‘unlik masalalarini Lyapunov yondashuvi orqali tahlil qilish natijasida ushbu metodning amaliy samaradorligi tasdiqlandi. Xususan, tizim yechimining aniq analitik ko‘rinishi talab qilinmasdan turg‘unlikni baholash imkoniyati nazariyaning eng muhim ustunliklaridan biri ekanligi qayd etildi. Bu xususiyat murakkab nolinear tizimlar ustida ishlashda ayniqsa katta ahamiyatga ega. O‘tkazilgan kontseptual tahlillar shuni ko‘rsatadiki, Lyapunov funksiyasini to‘g‘ri tanlash tizimning turg‘unligini aniqlashda hal qiluvchi omil bo‘lib, turli tizimlar

uchun mos yordamchi funksiyalarni qurish usullari nazariyaning keyingi rivoji uchun istiqbolli yo‘nalishlarni belgilaydi.

Shuningdek, muvozanat va turg‘unlik tushunchalarining amaliy sohalardagi o‘rni bo‘yicha olib borilgan muhokamalar iqtisodiyot, ekologiya, texnika va ijtimoiy jarayonlarda barqarorlik konsepsiyasining naqadar muhimligini ko‘rsatdi. Masalan, iqtisodiy tizimlarning narx-barqarorligi, populyatsiya modellari barqaror yashash darajasi, yoki texnologik jarayonlarning xavfsizlik mezonlari aynan turg‘unlik shartlariga bog‘liq. Bu esa matematik modellashtirishning real hayotdagi masalalarni hal qilishda qanday kuchli vosita ekanini yana bir bor tasdiqlaydi. Yakuniy natija sifatida aytish mumkinki, turg‘unlik nazariyasi nafaqat abstrakt matematik tushuncha, balki murakkab tizimlarni boshqarish, prognozlash va optimallashtirishda hal qiluvchi ilmiy asos bo‘lib xizmat qiladi.

Xulosa: Ushbu maqolada muvozanat va turg‘unlik masalalarining matematik modellashtirishdagi o‘rni, ularni aniqlashning nazariy asoslari hamda amaliy qo‘llanilishiga doir muhim jihatlar tahlil qilindi. O‘rganishlar shuni ko‘rsatdiki, dinamik tizimlarning barqaror yoki noturg‘un holatga ega bo‘lishi ularning ichki tuzilishi, parametrlarining sezgirligi va tashqi ta’sirlarga munosabati bilan chambarchas bog‘liq. Muvozanat nuqtalarining mavjudligi tizim harakatining asosiy yo‘nalishini belgilasa, turg‘unlik darajasi ushbu muvozanatning real sharoitda saqlanish-saqalanmasligini aniqlaydi.

Turg‘unlikni baholashda Lyapunov tamoyillarining qo‘llanilishi nazariyaning eng samarali yo‘nalishlaridan biri ekani aniqlandi, chunki ushbu yondashuv tizimning aniq yechimi topilmagan holatlarda ham barqarorlik haqida ishonchli xulosa chiqarish imkonini beradi. Bu esa murakkab nolinear tizimlar, iqtisodiy jarayonlar, ekologik modellar va texnologik tizimlarni tahlil qilishda beqiyos ahamiyatga ega. Natijalar shuni ko‘rsatadiki, muvozanat va turg‘unlik nazariyasi real tizimlarni boshqarish, optimallashtirish va ularning kelajakdagi xatti-harakatini prognoz qilishda fundamental matematik asos bo‘lib xizmat qiladi.

Yakuniy xulosa sifatida aytish mumkinki, ushbu mavzudagi chuqur matematik tahlillar nafaqat nazariy bilimlarni boyitadi, balki ilmiy-amaliy yechimlar ishlab chiqishda ham katta ahamiyat kasb etadi. Mazkur yo‘nalish bo‘yicha izlanishlarni davom ettirish yangi modellarni yaratish, barqarorlik shartlarini takomillashtirish va murakkab tizimlar uchun yanada ishonchli bashoratlar ishlab chiqishga imkon beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Khalil H.K. Nonlinear Systems. — 3rd ed. — Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

2. Sastry S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control. — New York: Springer, 2013.

3. Vidyasagar M. Nonlinear Systems Analysis. — 2nd ed. — Philadelphia: SIAM, 2002.

4. Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. — 3rd ed. — New York: Springer, 2001.

5. Kuznetsov Y.A. Elements of Applied Bifurcation Theory. — 3rd ed. — New York: Springer, 2004.

6. Strogatz S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos. — 2nd ed. — Boulder: Westview Press, 2015.

7. LaSalle J., Lefschetz S. Stability by Liapunov’s Direct Method with Applications. — Reprint ed. — New York: Academic Press, 2012.

8. Chiang A.C., Wainwright K. Fundamental Methods of Mathematical Economics. — 4th ed. — New York: McGraw-Hill, 2005.

ISSIQLIK ALMASHINUVI JARAYONLARINI AYNIGAN YADROLI INTEGRAL TENGLAMALAR ASOSIDA HIBRID ANALITIK–SONLI MODELLASHTIRISH

Muhammadvaliyeva M.Z.

FarDU talabasi, mohichehramuhammadvaliyeva@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada issiqlik almashinuvi jarayonlarini aynigan yadroli integral tenglamalar yordamida gibrid analitik–sonli usulda modellashtirish ko‘rib chiqiladi. Tadqiqotda analitik yechimlarning aniqligi va sonli modellashtirishning moslashuvchanligi birlashtirilib, murakkab issiqlik almashinuvi tizimlarida parametrlarning ta’siri va jarayonlarning dinamikasi tahlil qilinadi. Taklif etilgan yondashuv ilmiy yangilik sifatida murakkab integral tenglamalarni yechishda yuqori aniqlik va hisoblash samaradorligini ta’minlaydi.*

Kalit so‘zlar: *issiqlik almashinuvi, integral tenglamalar, gibrid analitik–sonli modellashtirish, murakkab tizimlar.*

KIRISH

Hozirgi kunda issiqlik almashinuvi jarayonlarini chuqur va aniq modellashtirish masalalari amaliy matematika, fizika hamda muhandislik fanlarining muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Issiqlik uzatilishi bilan bog‘liq jarayonlar energetika, materialshunoslik, texnologik qurilmalar va sanoat tizimlarida keng uchrab, bu jarayonlarning to‘g‘ri matematik tavsifi tizimlarning samaradorligi va barqarorligini ta’minlashda muhim rol o‘ynaydi. Ko‘plab real fizik jarayonlarda issiqlikning ma’lum bir nuqtadagi qiymati nafaqat lokal ta’sirlarga, balki butun muhit bo‘ylab taqsimlangan global holatlarga ham bog‘liq bo‘ladi.

Bunday holatlarni modellashtirishda integral tenglamalar, xususan, Fredholm tipidagi integral tenglamalar muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, yadro ajraluvchi (ayniган) ko‘rinishga ega bo‘lgan integral tenglamalar ko‘plab amaliy masalalarda uchraydi va ular matematik tahlil nuqtai nazaridan qulay xossalarga ega. Aynigan yadroli integral tenglamalar yordamida murakkab jarayonlarni soddalashtirilgan, ammo mazmunan to‘liq modellar orqali ifodalash imkoniyati mavjud.

Shu bilan birga, real issiqlik almashinuvi jarayonlarida model parametrlari tajribaviy ma’lumotlar asosida aniqlanadi va analitik yechimlarni to‘liq ko‘rinishda

olish har doim ham mumkin bo‘lavermaydi. Bu holat analitik va sonli usullarni birlashtirgan gibrid yondashuvlarga ehtiyojni yuzaga keltiradi. Gibrid analitik–sonli modellashtirish usullari modelning nazariy asoslanganligini saqlagan holda, hisoblash jarayonini amaliy jihatdan samarali amalga oshirish imkonini beradi.

Mazkur ishda issiqlik almashinuvi jarayonlarini tavsiflovchi aynigan yadroli integral tenglama ko‘rib chiqilib, uning analitik yechimi olinadi hamda ushbu yechim gibrid analitik–sonli modellashtirish uchun tayanch model sifatida talqin qilinadi. Taklif etilgan yondashuv issiqlik jarayonlarida lokal va global ta’sirlarni bir vaqtda hisobga olish imkonini berishi bilan ajralib turadi.

Integral tenglamalar deb, odatda, nom’lum funksiya integral ishorasi ostida bo‘lgan tenglamalarga aytiladi.

Nazariy qism. Biz bu bo‘limda noma’lum funksiya chiziqli ishtirok etgan tenglamalarni, ya'ni ushbu

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \qquad (1)$$

Ko‘rinishdagi chiziqli integral tenglamalarni tekshiramiz. Bu yerda $\varphi(x)$ – noma’lum funksiya, $K(x,y)$ va $f(x)$ funksyalar mos ravishda $\{a \le x \le b\}$ kvadratda va $a \le x \le b$ oraliqda aniqlangan funksiyalar (a , b - o‘zgarmas sonlar). Bu kvadrat va oraliqni asosiy kvadrat va asosiy oraliq deb yuritiladi.

$f(x)$ funksiya (1) integral tenglamaning ozod hadi, $K(x,y)$ uning yadrosi, λ sonli ko‘paytuvchi tenglamaning parametri deyiladi.

Qayd qilib o‘tamizki, (1) bitta integral tenglama bo‘lmay, balki sonli λ parametrga bog‘liq bo‘lgan integral tenglamalar oilasidir. Agar $\lambda K(x,y)$ ko‘paytmani $K_1(x,y)$ bilan belgilab, $K_1(x,y)$ ni yangi yadro deb qarasak, u holda tenglamaning parametri 1 ga teng bo‘lib qoladi. Lekin, λ parametrni kiritish integral tenglamalarni o‘rganishda foydali bo‘lishiga keyinchalik biz ishonch hosil qilamiz. (1) integral tenglama ikkinchi tur chiziqli integral tenglama yoki bunday

tenglamalarni birinchi bo‘lib o‘rgangan matematik nomi bilan Fredgolm integral tenglamasi deyiladi.

Agar $f(x) \equiv 0$ bo‘lsa, ya'ni

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = 0 \qquad (2)$$

tenglama (1) ga mos bo‘lgan bir jinsli integral tenglama deyiladi.

Bir jinsli

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\psi(y)dy = 0 \qquad (3)$$

tenglama (2) bir jinsli tenglamaga qo‘shma integral tenglama deyiladi. Fredgolmning birinchi tur tenglamasi deb,

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi integral tenglamaga aytiladi.

Fredgolm tenglamalarida yadro va ozod had mos ravishda asosiy kvadrat va asosiy oraliqda uzluksiz, yoki ushbu

$$\int_a^b \int_a^b [K(x,y)]^2 dxdy < +\infty \qquad (5)$$

$$\int_a^b [f(x,y)]^2 dx < +\infty \qquad (6)$$

shartlarni qanoatlantiradi, deb hisoblanadi. Ravshanki, $K(x,y)$ yadro $\{(x,y): a \le x \le b, a \le x \le b\}$ kvadratda uzluksiz bo‘lsa, (5) shart bajariladi. (5) shartni qanoatlantiruvchi yadrolar Fredgolm yadrosi deb ataladi.

Agar ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasining umumiy yechimi $\phi(x)$ mavjud bo‘lsa, u

$$\phi(x) = \varphi^0(x) + \varphi(x)$$

ko‘rinishga ega bo‘lishini tekshirib ko‘rish qiyin emas, bunda $j^0(x)(2)$ tenglamaning umumiy yechimi, $j(x)$ esa (1) tenglamaning xususiy yechimidir.

Haqiqatan ham, agar $\phi(x)$ va $\varphi(x)$ mos ravishda bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari bo‘lsa, ularning ayirmasi $\varphi^0(x) = \phi(x) - \varphi(x)$ (2) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Bundan darhol yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

Endi issiqlik almashinuvi jarayonlarini aynigan yadroli integral tenglamalar asosida gibrid analitik–sonli modellashtiramiz.

Asosiy qism. Issiqlik almashinuvi jarayonini modellashtirishda ko‘pincha shunday holatlar uchraydiki, tizimning ma’lum bir nuqtadagi holati butun soha bo‘yicha issiqlik taqsimotiga bog‘liq bo‘ladi. Bunday jarayonlarni matematik jihatdan ifodalash uchun integral tenglamalardan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi. Ushbu ishda quyidagi ko‘rinishdagi integral tenglama asosiy model sifatida qaraladi:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (1 + xy)\varphi(y)dy = x^2$$

Bu yerda $\varphi(x)$ issiqlik jarayonining izlanayotgan xarakteristik funksiyasi, x^2 tashqi issiqlik manbasini ifodalovchi funksiya, λ esa muhitning issiqlik almashinuvi intensivligini tavsiflovchi parametrdir.

Integral tenglamaning yadrosi $K(x, y) = 1 + xy$ ko‘rinishda bo‘lib, u ajraluvchi hadlar yig‘indisidan iborat.

Yuqoridagi tenglama aynigan yadroli Fredholm integral tenglamasi bo‘lib, uni chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin.

$$A = \int_0^1 \varphi(y)dy, B = \int_0^1 y\varphi(y)dy$$

u holda integral quyidagicha yoziladi:

$$\int_0^1 (1 + xy)\varphi(y)dy = A + xB\,.$$

Berilgan tenglamadan $\varphi(x)$ ni aniqlaymiz:

$$\varphi(x) = x^2 + \lambda(A + xB)\,.$$

Bu ifoda noma’lum funksiya qanday ko‘rinishda ekanini aniq ko‘rsatadi.

$$A=\int_0^1 (x^2+\lambda A+\lambda xB)dx=\frac{1}{3}+\lambda A+\frac{\lambda}{2}B,$$

$$B=\int_0^1 x(x^2+\lambda A+\lambda xB)dx=\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{2}A+\frac{\lambda}{3}B.$$

Natijada quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases}(1-\lambda)A-\frac{\lambda}{2}B=\frac{1}{3},\\ -\frac{\lambda}{2}A+(1-\frac{\lambda}{3})B=\frac{1}{4}.\end{cases}$$

bu sistemaning determinanti

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}(1-\lambda), & -\frac{\lambda}{2}\\ -\frac{\lambda}{2}, & (1-\frac{\lambda}{3})\end{vmatrix}=(1-\lambda)(1-\frac{\lambda}{3})-\frac{1}{4}\lambda^2=\frac{\lambda^2-16\lambda+12}{12}\neq 0\ .$$

Demak, avvalgi sistema yagona yechimga ega bo‘ladi

Sistemani yechib, quyidagi qiymatlar olinadi:

$$A=\frac{3-\lambda}{\lambda^2-16\lambda+12}, B=\frac{24+\lambda}{6(\lambda^2-16\lambda+12)}.$$

bularni izlanayotgan noma’lum funksiyaning ifodasiga qo‘yib, berilgan tenglamaning yechimini

$$\varphi(x)=x^2+\frac{\lambda(3-\lambda)}{\lambda^2-16\lambda+12}+\frac{\lambda(24+\lambda)}{6(\lambda^2-16\lambda+12)}x$$

ko‘rinishda topamiz, bu yerda $\lambda^2-16\lambda+12\neq 0$ sharti bajarilganda yechim yagona bo‘ladi.

Olingan analitik yechim issiqlik almashinuvi jarayonining asosiy xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Jumladan, temperatura taqsimoti tashqi issiqlik manbasi bilan bir qatorda muhitning global issiqlik holatiga chiziqli

bog‘langanligi ko‘rinadi. Ushbu analitik ifoda gibrid analitik–sonli modellashtirish uchun tayanch model vazifasini bajaradi.

Amaliy masalalarda integral hadlarni aniq hisoblash har doim ham mumkin bo‘lavermaydi, chunki real sharoitda temperatura qiymatlari diskret nuqtalarda o‘lchanadi. Shu sababli analitik yechim sonli usullar bilan uyg‘unlashtiriladi. Xususan, integral hadlar kvadratura formulalari yordamida taxminan hisoblanadi, parametr λ esa tajribaviy ma’lumotlar asosida aniqlanadi. Bu jarayonda analitik yechim modelning barqarorligini va strukturaviy to‘g‘riligini ta’minlasa, sonli yondashuv real issiqlik jarayonlarini hisoblash va prognozlash imkonini beradi.

Taklif etilgan gibrid analitik–sonli modellashtirish yondashuvi issiqlik almashinuvi jarayonlarini soddalashtirilgan integral model asosida yuqori aniqlik bilan o‘rganish imkonini beradi. Ushbu yondashuvning muhim afzalligi shundaki, u lokal va global issiqlik ta’sirlarini bir vaqtning o‘zida hisobga olib, murakkab fizik jarayonlarni matematik jihatdan barqaror va hisoblashga qulay ko‘rinishda ifodalash imkonini beradi.

Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, aynigan yadroli integral tenglamalar issiqlik almashinuvi jarayonlarini modellashtirishda samarali matematik apparat hisoblanadi. Analitik yechimning mavjudligi va yagonalik shartining aniqlanishi modelning nazariy asoslanganligini ta’minlaydi, gibrid analitik–sonli yondashuv esa real fizik jarayonlarga moslashish imkonini beradi. Taklif etilgan model va yondashuv issiqlik almashinuvi bilan bog‘liq amaliy masalalarni yechishda qo‘llanishi mumkin bo‘lgan universal metod sifatida qaraladi.

XULOSA

Ushbu ishda issiqlik almashinuvi jarayonlarini modellashtirish masalasi aynigan yadroli integral tenglama yordamida ko‘rib chiqildi. Integral tenglama yadrosining ajraluvchi xossaga ega ekanligi aniqlanib, masala analitik jihatdan yechildi hamda yechimning mavjudligi va yagonaligi uchun yetarli shartlar keltirildi. Olingan analitik yechim issiqlik jarayonining asosiy xususiyatlarini,

xususan, temperatura taqsimotining tashqi manba va muhitning global holatiga bog‘liqligini aniq ifodalab berdi.

Ishda taklif etilgan gibrid analitik–sonli modellashtirish yondashuvi analitik yechimning nazariy asoslanganligini saqlagan holda, real jarayonlarda uchraydigan diskret ma’lumotlar bilan ishlash imkonini beradi. Bu yondashuv issiqlik almashinuvi jarayonlarini hisoblashda aniqlik va barqarorlikni ta’minlab, murakkab fizik tizimlarni soddalashtirilgan, ammo ishonchli matematik model orqali tahlil qilishga imkon yaratadi. Olingan natijalar issiqlik almashinuvi bilan bog‘liq amaliy masalalarni yechishda, shuningdek, integral tenglamalar asosidagi gibrid modellashtirish usullarini rivojlantirishda samarali qo‘llanilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov, M.I. Hisoblash metodlari. Toshkent, O‘qituvchi, 2003.

2. Salohiddinov M. Integral tenglamalar. Toshkent, 2007.

3. Krylov V. I. Sonli usullar. Moskva, 1986.

4. Incropera, F. P., & DeWitt, D. P. (2007). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* (6th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

5. Özisik, M. N. (1993). *Heat Conduction* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

6. Carslaw, H. S., & Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids* (2nd ed.). Oxford: Clarendon Press.

CHEGARAVIY MASALALARNI SONLI YECHISHNING FARQLASH USULLARI.

Tojimatov I.I.

FarDU talabasi, tojimatovinomjon13@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada chegaraviy masalalarni sonli yechishda qo‘llaniladigan farqlash (finite difference) usullarining nazariy asoslari va amaliy qo‘llanilishi yoritilgan. Differensial tenglamalarni algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish, chekli farqlar formulalarini qurish, chegaraviy shartlarni hisobga olish hamda hosil bo‘lgan sistemani yechish jarayonlari tahlil qilingan. Usulning afzalliklari va cheklovlari ko‘rib chiqilib, Python dasturlash tili orqali ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun sonli yechim namoyish etilgan. Shuningdek, farqlash usulining parallel va bulutli hisoblash kabi zamonaviy texnologiyalar bilan integratsiyasi hamda istiqbollari bayon etilgan.

Kalit so‘zlar: Chegaraviy masala, sonli usullar, farqlash usuli, differensial tenglamalar, algebraik tenglamalar sistemasi, Python dasturlash, hisoblash aniqligi.

KIRISH

Differensial tenglamalar tabiiy fanlar, muhandislik, iqtisodiyot va boshqa ko‘plab sohalarda fizik, kimyoviy va biologik jarayonlarni matematik modellashtirishning asosiy vositasi hisoblanadi. Ko‘p hollarda bu tenglamalarning analitik yechimlarini topish juda qiyin yoki umuman mumkin emas. Bunday vaziyatlarda sonli usullar yagona hal qiluvchi yondashuvdir. Chegaraviy masalalar differensial tenglamalar bilan birga chegaraviy shartlar berilgan masalalar issiqlik o‘tkazuvchanlik, to‘lqin tarqalishi, elastiklik, elektr va magnit maydonlarni hisoblash kabi muhim amaliy masalalarda keng qo‘llaniladi. Sonli usullar orasida farqlash (finite difference) usuli eng qadimgi, sodda va keng tarqalgan usullardan biridir. Uning mohiyati differensial tenglamalardagi hosilalarni chekli farqlar bilan almashtirish va natijada algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilishdan iborat. Bu usulning afzalligi shundaki, u murakkab differensial tenglamalarni soddalashtirib, ularni kompyuter yordamida samarali yechish imkonini beradi. Zamonaviy hisoblash texnologiyalarining rivojlanishi yuqori unumdorlikdagi hisoblash (HPC), parallel hisoblash, bulutli texnologiyalar farqlash usulining imkoniyatlarini sezilarli

darajada kengaytirdi. Bugungi kunda bu usul yordamida ikki va uch o‘lchamli masalalar, vaqtga bog‘liq jarayonlar, chiziqli bo‘lmagan tenglamalar ham yechilmoqda. Ushbu maqolaning maqsadi chegaraviy masalalarni sonli yechishning farqlash usulini nazariy jihatdan o‘rganish, uning amaliy qo‘llanilishini misollar orqali namoyish etish va zamonaviy hisoblash texnologiyalari bilan bog‘liq istiqbollarini tahli qilishdir.

Farqlash usulining nazariy asoslari: Farqlash usuli differensial tenglamalarni sonli yechishda hosilalarni chekli farqlar bilan almashtirishga asoslangan. Bunda mustaqil o‘zgaruvchining taqsimlangan nuqtalarida (tarmoqlarda) funksiya qiymatlari hisoblanadi.

1. Chekli farqlar formulalari: Funksiya u(x) ning xi nuqtadagi birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari uchun chekli farqlar formulalari:

Birinchi tartibli hosila:

Oldingi farqlar formulasi: $u'(x_i) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$

Keyingi farqlar formulasi: $u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$

Markaziy farqlar formulasi: $u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$

Ikkinchi tartibli hosila:

Markaziy farqlar formulasi: $u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$

bu yerda $h = x_{i+1} - x_i$ tarmoq qadami, $u_i = u(x_i)$.

2. Diskretlashtirish xatoligi: Markaziy farqlar formulasi uchun diskretlashtirish xatoligi:

$$u''(xi) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi)$$

bu yerda $\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Xatolik $O(h^2)$ tartibli.

Ikkinchi tartibli chiziqli chegaraviy masalani yechish: Ikkinchi tartibli chiziqli chegaraviy masala matematik analiz va amaliy fanlarda keng uchraydigan masalalardan biri bo‘lib, unda noma’lum funksiya ma’lum bir oraliqda aniqlanadi

va shu oraliqning chegaralarida unga qo‘yilgan shartlarni qanoatlantirishi talab etiladi. Bunday masalalarda funksiya bilan birga uning o‘zgarish tezligi va egilish xususiyatlari ham hisobga olinadi. Chegaraviy masalaning asosiy xususiyati shundaki, berilgan shartlar oraliqning boshida va oxirida aniqlanadi. Bu jihati bilan chegaraviy masalalar boshlang‘ich qiymatli masalalardan farq qiladi. Ikkinchi tartibli bo‘lishi esa masalada funksiya egilishining, ya’ni jarayonning ichki tuzilishini tavsiflovchi xususiyatlarning muhim ekanligini bildiradi. Nazariy jihatdan bunday masalalarni yechishda eng avvalo masalaning to‘g‘ri qo‘yilganligi muhim ahamiyatga ega. Ya’ni berilgan shartlar asosida yechim mavjudmi yoki yo‘qligi va u yagona bo‘ladimi, degan savollarga javob beriladi. Ko‘p hollarda tenglama va unga mos chegaraviy shartlar muayyan silliqlik va uzluksizlik talablariga javob bersa, masalaning yagona yechimi mavjud bo‘ladi. Chegaraviy shartlar mazmuniga ko‘ra turli xil bo‘lishi mumkin. Ba’zan funksiya qiymatlari chegaralarda beriladi, ba’zan esa uning o‘zgarish tezligi yoki funksiya va hosilaning kombinatsiyasi ko‘rsatiladi. Bu shartlarning har biri real fizik yoki muhandislik jarayonlarining matematik ifodasi sifatida talqin qilinadi. Ikkinchi tartibli chiziqli chegaraviy masalalarni nazariy o‘rganishda analitik va sonli yondashuvlar farqlanadi. Analitik yondashuvda masalaning aniq yechimini topish maqsad qilinadi, biroq ko‘plab real masalalarda bunday yechimni olish qiyin yoki umuman mumkin bo‘lmaydi. Shu sababli nazariyada taqribiy yechim olishga asoslangan sonli usullar muhim o‘rin egallaydi. Sonli yondashuvning nazariy asosida differensial tenglamani soddaroq algebraik munosabatlar orqali ifodalash g‘oyasi yotadi. Bu orqali masala kompyuter yordamida yechishga qulay shaklga keltiriladi. Nazariyada bunday usullarning yaqinlashuv xossalari, barqarorligi va aniqligi chuqur tahlil qilinadi. Barqarorlik tushunchasi masalada kiruvchi ma’lumotlardagi kichik o‘zgarishlar yechimda katta farqlarga olib kelmasligini anglatadi. Aniqlik esa olingan taqribiy yechimning haqiqiy yechimga qanchalik yaqin ekanligini tavsiflaydi. Ushbu tushunchalar ikkinchi tartibli chegaraviy masalalarni o‘rganishda asosiy nazariy mezonlar hisoblanadi. Umuman olganda, ikkinchi tartibli chiziqli

chegaraviy masalalarni yechish nazariyasi matematik modellashtirishning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, u fizik jarayonlar, muhandislik tizimlari va boshqa ko‘plab amaliy sohalardagi murakkab hodisalarni tahlil qilishda mustahkam nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

XULOSA

Chegaraviy masalalarni sonli yechishning farqlash (finite difference) usullari zamonaviy hisoblash matematikasining eng muhim va keng qo'llaniladigan vositalaridan biri hisoblanadi. Ushbu usullarning asosiy afzalligi ularning nazariy jihatdan soddaligi, amaliy qo'llashning qulayligi va katta hajmdagi masalalarni samarali yechish imkoniyatidadir. Farqlash usuli differensial tenglamalarni algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish orqali murakkab matematik muammolarni soddalashtirishga asoslangan. Diskretlashtirish jarayonida hosilalarni chekli farqlar bilan almashtirish, chegaraviy shartlarni to'g'ri hisobga olish va hosil bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usulning asosiy bosqichlarini tashkil etadi. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, farqlash usuli ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun tartibli aniqlikka ega bo'lib, qadam o'lchami kamaygani sari yechimning aniqligi ortadi. Tridiagonal matritsalar shaklida tuzilgan algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun Thomas algoritmi kabi maxsus samarali metodlarning mavjudligi usulning hisoblash samaradorligini oshiradi. Amaliy jihatdan, farqlash usullari fizika, muhandislik, kimyo, biologiya va iqtisodiyotning ko'plab sohalarida qo'llaniladi. Issiqlik o'tkazuvchanlik, to'lqin tarqalishi, elastiklik nazariyasi, elektromagnet maydonlar va boshqa tabiiy jarayonlarni modellashtirishda ushbu usullar asosiy vosita sifatida xizmat qiladi.

Zamonaviy hisoblash texnologiyalari bilan integratsiyalashgan farqlash usullari kelajakda quyidagi yo'nalishlarda yanada rivojlanadi: Xulosa qilib aytganda, farqlash usullari chegaraviy masalalarni sonli yechishda ishonchli, samarali va iqtisodiy yondashuv bo'lib, ilmiy tadqiqotlar va amaliy hisoblashlarda o'zining ahamiyatini saqlab qolmoqda. Texnologiyalar rivojlanishi bilan birga ushbu

usullarning imkoniyatlari kengayib, kelajakda yanada murakkab va katta hajmdagi masalalarni yechishda asosiy rol o'ynashini kutish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1- qism. -T.: O‘qituvchi, 1988 y. 400 b.
2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. -T.: Iqtisod-Moliya, 2008. 320 b.
3. Ismatullayev G.P., Koshergenova M.S. Hisoblash usullari. «Tafakkur-bo‘stoni» Toshkent — 2014. 240 b.
4. Abdulhamidov A.U., Xudoynazarov S.X. Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari. Toshkent - «O‘zbekiston» 1995 y. 224 b.
5. Aloev R.D., Xudoyberganov M. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg‘ulotlari to‘plami. UzMU.O‘quv qo‘llanma. 2008 y.1 106.
6. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие. Интернет-Университет Информационных Технологи; БИНОМ. 2006.-523с.
7. Пмищекяк А.А., Гулин А.В. Чысленные методы. -М., Наука. 1989.
8. Шыввов Н.С. Числинные методы. -М., Наука. 1967
9. Гателюк О. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования. -Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 140 с. https://urait.ru/bcode/514036 (дата обращения: 06.09.2024).
10. Пирумов У.Г.. Численные методы: учебник и практикум для академического бакалавриата. -Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 421 с. https://urait.ru/bcode/431961

MA`LUMOTLAMI KIRITISH UCHUN SHAKLLAR YARATISH.

Tojimamatov I.N., Shovkatjonova N.J.

FarDU katta o‘qituvchisi, israiltojimamatov@gmail.com.

FarDU talabasi, shovkatjonovanozanin@gmail.com.

Annotatsiya:*Mazkur maqolada ma’lumotlarni kiritish uchun shakllar (formularlar) yaratish jarayoni, ularning axborot tizimlaridagi o‘rni hamda shakl yaratishda “Master” (Shakl yaratish ustasi) vositasidan foydalanish prinsiplari yoritiladi. Shakllar ma’lumotlarni tez, aniq va tartibli kiritishni ta’minlab, foydalanuvchining tizim bilan muloqotini osonlashtiradi.*

Kalit so‘zlar:Shakl, forma, ma’lumot kiritish, “Master”, forma konstruktori, axborot tizimi, UI, interfeys, elektron hujjat, ma’lumotlar bazasi, forma dizayni.

Kirish:

Raqamli axborot tizimlarida ma’lumotlarni to‘g‘ri, tez va qulay kiritish eng muhim jarayonlardan biridir. Ko‘plab dasturlarda, jumladan, Microsoft Access, Google Forms, elektron tizimlar va boshqa platformalarda shakllar (formularlar) ma’lumotlarni tartibli ko‘rinishda qabul qilishga xizmat qiladi. Foydalanuvchi bevosita ma’lumotlar bazasi bilan ishlamasdan, shakl orqali kerakli ma’lumotni kiritadi, tahrirlaydi yoki ko‘rib chiqadi.

Ma’lumot kiritish shakllarining ahamiyati: Shakllar dastur va foydalanuvchi o‘rtasidagi asosiy bog‘lovchi interfeys bo‘lib quyidagi afzalliklarga ega:

- ✓ ma’lumotlarni aniq va tartibli qabul qiladi
- ✓ noto‘g‘ri yoki ortiqcha ma’lumot kiritilishining oldini oladi
- ✓ ma’lumotlar bazasi bilan ishlashni soddalashtiradi
- ✓ foydalanuvchi uchun qulay ko‘rinish yaratadi
- ✓ jarayonlarni avtomatlashtirish imkonini beradi

Shakl yaratish bosqichlari:Shakl yaratish odatda quyidagi bosqichlardan iborat:

Shakl yaratish bosqichlari	
Shakl maqsadini aniqlash	foydalanuvchi nimani kiritadi va shakl qaysi jadvalga ulanadi.
Kerakli maydonlarni tanlash	jadval ustunlaridan qaysi biri shaklda aks etishi.

Interfeysni loyihalash	maydonlarni joylashtirish, tartib, rang, shrift va boshqalar.
Tekshirish qoidalarini o‘rnatish	noto‘g‘ri ma’lumot kiritishni cheklash.
Sinovdan o‘tkazish	shaklning to‘g‘ri ishlashini tekshirish.

Foydalanuvchilar uchun SQL tilidagi dasturlarni ko‘rib chiqamiz:

```
CREATE TABLE foydalanuvchilar (
    id INT PRIMARY KEY AUTO_INCREMENT,
    ism VARCHAR(50),
    familiya VARCHAR(50),
    email VARCHAR(100),
    telefon VARCHAR(20)
);
```

Ma'lumot kiritish uchun quyidagi kod ishlatiladi:

```
INSERT INTO foydalanuvchilar (ism, familiya, email, telefon)
VALUES ('Ali', 'Valiyev', 'ali@example.com', '+998901234567');
```

Buyurtmalar jadvali va unga ma'lumot kiritish:

```
CREATE TABLE buyurtmalar (
    buyurtma_id INT PRIMARY KEY AUTO_INCREMENT,
    mijoz_ismi VARCHAR(100),
    mahsulot VARCHAR(100),
    miqdor INT,
    narx DECIMAL(10,2),
    buyurtma_sanasi DATE
);

INSERT INTO buyurtmalar (mijoz_ismi, mahsulot, miqdor, narx, buyurtma_sanasi) VALUES
('Rustam', 'Laptop', 1, 3500.00, '2025-12-20'),
('Mavluda', 'Telefon', 2, 1200.50, '2025-12-21');
```

Xulosa: Ma’lumotlarni kiritish shakllari axborot tizimlarining ajralmas qismi bo‘lib, ular tizimda ma’lumotlarni boshqarish va qayta ishlashni soddalashtiradi. “Master” yordamida shakl yaratish usuli esa jarayonni avtomatlashtirib, tez va samarali natija beradi. Shakllarni to‘g‘ri loyihalash foydalanuvchi tajribasini yaxshilaydi, ma’lumotlar sifatini oshiradi va tizimning ishonchliligini ta’minlaydi. Shuning uchun shakl yaratishda aniqlik, qulaylik va funksionallik asosiy tamoyil

bo‘lishi zarur.Shakl yaratishdagi SQL tilidagi kodlar juda tushunarli va sodda,shuning uchun juda qulay dastur ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Microsoft Corporation. Microsoft Access User Guide. — Microsoft Documentation, 2020–2024.

2. Rob, P., Coronel, C. Database Systems: Design, Implementation, and Management. — Boston: Cengage Learning, 2019.

3. Pratt, P., Adamski, J. Concepts of Database Management. — Cengage, 2021.

4. Connolly, T., Begg, C. Database Systems: A Practical Approach to Design, Implementation and Management. — Pearson Education, 2015.

5. Литвиненко, В. Информационные системы и базы данных. — Москва: Академия, 2020.

6. Хальтбеков, А., Қодиров, Ж. Axborot tizimlari va texnologiyalari. — Toshkent: O‘qituvchi, 2019.

7. Комягин, В. Microsoft Access: практическое пособие для пользователей. — Санкт-Петербург: Питер, 2018.

8. Gane, C., Sarson, T. Structured Systems Analysis. — IST Publications.

9. Nielsen, J. Usability Engineering. — Morgan Kaufmann, 2012.

10. O‘zbekiston Respublikasi Axborot texnologiyalari bo‘yicha o‘quv qo‘llanmalar (Turli nashrlar, 2015–2023).

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMALARINI SONLI INTEGRALLASH USULLARI

Ismoilov A.I., Xudoyberdiyev N.Z.

FarDU dotsenti, f.-m.f.b.f.d(PhD), ismoilovaxrorjon@yandex.com.

FarDU talabas, nozimbekxudoyberdiyev55@gmail.com.

Annotatsiya: *Maqolada oddiy differensial tenglamalar sistemalarini yechish uchun qo'llaniladigan sonli integrallash usullari tahlil qilingan. Eyler, takomillashtirilgan Eyler, Runge–Kutta va Adams usullarining matematik asoslari, aniqligi hamda yaqinlashuv xossalari yoritilib, amaliy misollar asosida jadval va grafiklar orqali natijalar taqqoslangan.*

Kalit so'zlar: *Oddiy differensial tenglama, sonli integrallash, Eyler usuli, Runge–Kutta usuli, Adams usuli, matematik modellashtirish.*

Kirish

Oddiy differensial tenglamalar sistemalari real jarayonlarni matematik modellashtirishda asosiy vositalardan biri hisoblanadi. Mexanikada jismlarning harakati, fizika va elektrotexnikada jarayonlarning rivojlanishi, biologiyada populyatsiyalar dinamikasi, iqtisodiyotda esa o'sish modellarining barchasi differensial tenglamalar orqali ifodalanadi.

Ko'p hollarda bunday tenglamalar sistemalarining analitik yechimini topish imkonsiz yoki juda murakkab bo'ladi. Shu sababli amaliy masalalarda sonli integrallash usullaridan foydalaniladi. Sonli usullar yordamida tenglamalar sistemasining taxminiy yechimi berilgan aniqlikda hisoblab topiladi. Zamonaviy kompyuter texnologiyalari bu usullarni samarali qo'llash imkonini yaratdi.

Sonli integrallash masalasining umumiy qo'yilishi

Quyidagi ko'rinishdagi oddiy differensial tenglamalar sistemasi qaraladi:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = f^1\left(t, x^1, x^2, \ldots, x_n\right), \\ \dfrac{dx^2}{dt} = f^2\left(t, x^1, x^2, \ldots, x_n\right), \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n\left(t, x^1, x^2, \ldots, x_n\right). \end{cases}$$

Boshlang'ich shartlar:

$$x^1(t^0) = x_1^0, \quad x^2(t^0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t^0) = x_n^0$$

sonli integrallashda $[t^0, T]$ oraliq h qadam bilan bo‘linadi va yechim ketma-ket nuqtalarda aniqlanadi.

Eyler usuli sonli integrallashning eng sodda va tushunarli usuli bo‘lib, birinchi tartibli aniqlikka ega. Usul differensial tenglamadagi hosila qiymatini joriy nuqtada o‘zgarmas deb hisoblash g‘oyasiga asoslanadi.

$$x_i^{n+1} = x_i^n + h f_i\left(t^n, x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n\right)$$

bu yerda lokal xato $O(h^2)$, global xato esa $O(h)$, tartibda bo‘ladi.

$$\frac{dx}{dt} = y - x^2,$$
$$\frac{dy}{dt} = x + t^2$$

boshlang‘ich shartlar:

$$x(0) = 1,$$
$$y(0) = 0$$

Qadam: $h = 0.1$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(y_n - x_n^2), \\ y_{n+1} = y_n + h(x_n + t_n^2) \end{cases}$$

Takomillashtirilgan Eyler usuli ikki bosqichli bo‘lib, oldindan taxmin va aniqlashtirish bosqichlaridan iborat. Usul Eyler usuliga nisbatan ancha yuqori aniqlikka ega.

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n + h f(t_n, x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{h}{2}\left[f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^*)\right] \end{cases}$$

Misol:

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot y - t,$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y^2$$

boshlang‘ich shartlar:

$$x(0) = 1,$$
$$y(0) = 0$$

Runge–Kutta usuli eng ishonchli va keng qo‘llaniladigan sonli usullardan biridir. Usul hosila qiymatlarini bir qadam ichida bir necha marta hisoblashga asoslangan.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}\left(k^1 + 2k^2 + 2k^3 + k^4\right)$$

Misol:

$$\frac{dy}{dt} = t + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.$$

$$k_1 = 0.1(0+1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1\left(0.05 + 1 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.105$$

$$k_3 = 0.1\left(0.05 + 1 + \frac{0.105}{2}\right) = 0.10525$$

$$k_4 = 0.1\left(0.1 + 1 + 0.10525\right) = 0.120525$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2\cdot 0.105 + 2\cdot 0.10525 + 0.120525) \approx 1.10517$$

Lotka–Volterra modeli:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - x \cdot y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + x \cdot y$$

bu model yirtqich-o‘lja tizimini ifodalaydi.

Adams usullari ko‘p qadamli usullar bo‘lib, oldingi nuqtalardagi hosila qiymatlaridan foydalanadi. Ular yuqori aniqlikka ega va hisoblash tezligi bilan ajralib turadi.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3}\right)$$

XULOSA: Maqolada oddiy differensial tenglamalar sistemalarini sonli integrallashning asosiy usullari chuqur o‘rganildi. Nazariy tahlil va murakkab amaliy misollar shuni ko‘rsatdiki, Eyler usuli soddaligi bilan ajralib tursa-da, aniqlik

jihatidan Runge–Kutta va Adams usullari ustunlikka ega. Sonli integrallash usullari murakkab matematik modellarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Axmedov M. *Sonli usullar*. Toshkent, 2010.
2. Alimuhamedov Sh.A. *Oddiy differensial tenglamalar*. Toshkent, 2012.
3. Islomov T. *Differensial tenglamalarni sonli yechish usullari*. Toshkent, 2015.
4. Qodirov R. *Matematik modellashtirish va sonli usullar*. Toshkent, 2017.
5. Samarskiy A.A. *Chislennye metody*. Moskva, 2001.
6. Burden R., Faires J. *Numerical Analysis*. Boston, 2011.
7. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Berlin, 2008.
8. Süli E., Mayers D. *Numerical Analysis*. Cambridge, 2003.
9. Gerald C. *Applied Numerical Analysis*. New York, 2004.
10. Butcher J.C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Chichester, 2008.

KVADRATUR FORMULALARI ASOSIDA INTEGRAL TENGLAMALARNING APROKSIMATSIYASI

Yo‘ldoshev N.G.

FarDU talabasi, nodirbekyoldoshev19@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada integral tenglamalarni sonli yechishda kvadratur formulalaridan foydalanish masalasi tahlil qilingan. Kvadratur yondashuvi integral tenglamalarni algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish imkonini berib, hisoblashning samaradorligini oshiradi. Ushbu usulning aniqligi va barqarorligi baholanib, fizika, muhandislik va texnika sohalaridagi amaliy qo‘llanilish imkoniyatlari yoritilgan.

Kalit so‘zlar:kvadratura formulalari, to'g'ri to'rtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, Simpson formulasi, aniq integral, taxminiy hisoblash, integral tenglamalar, sonli yechish, Fredgolm tenglamasi, Gauss usuli, Python dasturlash.

Krish

Kvadratur formulalari va integral tenglamalar bu ko‘plab real jarayonlar (issiqlik tarqalishi, elektr maydonlar, suyuqlik oqimi va boshqalar) integral tenglamalar orqali ifodalanadi. Lekin bu tenglamalarning aniq (analitik) yechimi yo‘q.Shuning uchun sonli usullar, xususan kvadratur formulalari qo‘llaniladi. Fizika va muhandislikda qo‘llanilishini ko’rib chiqaylik . Bunda issiqlik almashinuvi Issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalari ko‘pincha Fredholm yoki Volterra integral tenglamalari bilan modellashtiriladi.Kvadratur formulalari yordamida - jism ichida harorat taqsimoti hisoblanadi, issiqlik oqimining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi aniqlanadi.Aniq integralni hisoblash matematik tahlilning asosiy masalalaridan biri bo'lib, amaliy masalalarda funksiya murakkab tuzilishga ega bo'lishi yoki faqat ayrim nuqtalarda qiymatlari ma'lum bo'lishi mumkin. Bunday hollarda integralni analitik usullar bilan hisoblash qiyin yoki imkonsiz bo'ladi, shuning uchun sonli usullar, xususan kvadratura formulalari zaruriyati paydo bo'ladi. Kvadratura formulalari aniq integralni chekli sondagi nuqtalarda olingan funksiya qiymatlarining og'irlikli yig'indisi bilan almashtirishga asoslangan bo'lib, bu hisoblashni soddalashtiradi va kompyuter texnologiyalaridan samarali foydalanish imkonini beradi. Ushbu maqolada eng sodda kvadratura formulalari – to'g'ri

to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari – oddiy mulohazalar asosida qurilishi, ularning aniqligi va integral tenglamalarni yechishda qo'llanilishi ko'rib chiqiladi. Shuningdek, formulalarning ko'phadlar uchun aniq bo'lishi va amaliy misollar, jumladan Python dasturi orqali tahlil qilinadi.

Eng sodda kvadratura formulalari: to‘g‘ri to‘rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari.

Eng sodda kvadratura formulalarini oddiy mulohazalar asosida qurish mumkin. Aytaylik,

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralni hisoblash talab qilinsin. Agar ko‘rilayotgan oralikda $f(x) \approx const$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (1)$$

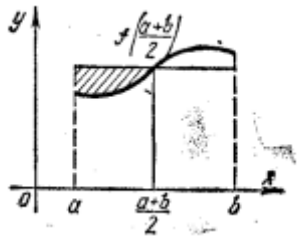
deb olishimiz mumkin (1-chizma). Bu formula to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi deyiladi.

Faraz qilaylik, f(x) funksiya chiziqli funksiyaga yaqin bo‘lsin, u holda tabiiy ravishda integralni balandligi (b-a) ga va asoslari f(a) va f(b) ga teng bo‘lgan trapetsiya yuzasi bilan almashtirish mumkin (24-chizma), u holda

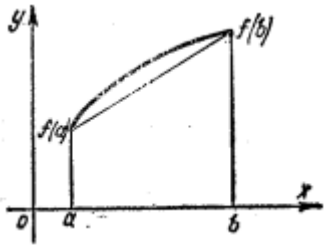
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) \quad (2)$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula trapetsiyalar formulasi deyiladi. Nihoyat, *f(x)* funksiya $[a,b]$ oralig‘ida kvadratik funksiyaga yaqin bo‘lsin, u holda $\int_a^b f(x)dx$ ni taxminiy ravishda *Ox* o‘qi va $x=a$, $x=b$ to‘g‘ri chiziqlari hamda $y=f(x)$ funksiya grafigining absissalari $x=a$, $x=\frac{a+b}{2}$ va x=b bo‘lgan nuqtalaridan o‘tuvchi ikkinchi tartibli parabola orqali chegaralangan yuza bilan almashtirish mumkin (3-chizma), u holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

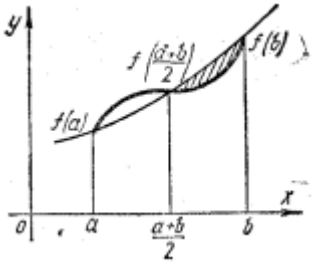
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}. \quad (3)$$



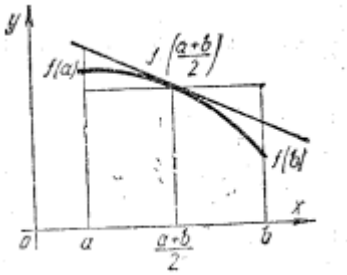
1-chizma



24-chizma



3-chizma



4-chizma

Bu formulani ingliz matematigi Simpson 1743 yilda taklif qilgan edi. Bu formulaning hosil qilinish usulidan ko‘rinib turibdiki, u barcha ikkinchi darajali

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

ko‘phadlar uchun aniq formuladir. Shunday qilib, biz uchta kvadratura formulaga ega bo‘ldik.(1) formulani tuzishda u o‘zgarmas son f(x)=c ni aniq integrallashni talab qilgan edik. Lekin u $f(x) = a_0 + a_1x$ chiziqli funksiyani ham aniq integrallaydi, chunki $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ balandligi b-a va o‘rta chizig‘i $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ bo‘lgan ixtiyoriy trapetsiyaning yuzasiga teng (4-chizma).

Shunga o‘xshash Simpson formulasi ham biz kutganimizdan yaxshiroq formuladir. U uchinchi darajali

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

ko‘phadlarni ham aniq integrallaydi. Haqiqatan ham, uchinchi darajali $P_3(x)$ ko‘phadni quyidagicha yozamiz:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P_2(x) + a_3x^3,$$

u holda

$$\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3\int_a^b x^3dx = \int_a^b P_2(x)dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4). \quad (4)$$

Lekin bizga ma’lumki,

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b)\right]. \quad (5)$$

Boshqa tomondan,

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6}\left[a_3a^3 + 4a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + a_3b^3\right] \quad (6)$$

ayniyat o‘rinlidir .Endi (5) – (6) larni (4) ga qo‘yib,

$$\int_a^b P_3(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b)\right)$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, biz uchta kvadratura formulani ko‘rdik. Ulardan to‘g‘ri to‘rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko‘phad uchun aniq formula bo‘lib, Simpson formulasi uchinchi darajali ko‘phad uchun aniq formuladir.

Kvadratur formulalari tushunchasi: Aniq integralni hisoblash matematik tahlilning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Biroq amaliy masalalarda integral ostidagi funksiya murakkab tuzilishga ega bo‘lishi yoki faqat ayrim nuqtalardagi qiymatlari ma’lum bo‘lishi mumkin. Bunday hollarda integralni analitik usullar bilan hisoblash qiyin yoki umuman imkonsiz bo‘ladi. Shu sababli integralni sonli usullar yordamida yaqinlashgan holda hisoblash zarurati yuzaga keladi. Ana shunday usullar majmui kvadratur formulalari deb ataladi.

Kvadratur formulalarining asosiy g‘oyasi aniq integralni chekli sondagi nuqtalarda olingan funksiya qiymatlarining og‘irlikli yig‘indisi bilan almashtirishdan iborat. Bu yondashuv hisoblashni soddalashtiradi va zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan samarali foydalanish imkonini beradi. Kvadratur

formulalari nafaqat integralni hisoblashda, balki integral tenglamalarni sonli yechishda ham muhim ahamiyatga ega.

Integral tenglamalarni taxminiy yechishda amaliyotda keng qo'llaniladigan usullardan biri bu tenglamada qatnashayotgan integralni u yoki bu

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j \varphi\left(x_j\right) + R(\Phi) \qquad (20)$$

kvadratura formulasi bilan almashtirishdan iboratdir. Bu yerda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ va $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lar mos ravishda kvadratura formulasining tugunlari hamda koeffitsientlari bo'lib, ular $\Phi(x)$ funksiyaga bog'liq emas, $R(\Phi)$ esa qoldiq had. Bu formulada $A_j \geq 0$ va $\sum_{j=1}^{n} A_j = b-a$ shartlar bajariladi, deb faraz qilamiz. Misol sifatida quyidagi formulalarni keltiramiz:

1. Umumlashtirilgan to'g'ri to'rtburchaklar formulasi:

$$x_j = a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad A_j = h, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Umumlashtirilgan trapetsiyalar formulasi:

$$x_j = a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n-1}, \quad A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_j = h, \quad j = 2, \ldots, n-1.$$

3. Umumlashtirilgan Simpson formulasi ($n = 2m+1$ deb olamiz):

$$x_j = a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{2m}, \quad A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3},$$

$$A_2 = A_4 = \ldots = A_{2m} = \frac{4}{3}h, \quad A_3 = A_5 = \ldots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

4. Gauss formulasi:

$$x_j = \frac{b-a}{2} x_j^{(n)} + \frac{a+b}{2}, \quad A_j = \frac{b-a}{2} A_j^{(n)},$$

bu yerda $x_j^{(n)}$ va $A_j^{(n)}$ lar $[-1,1]$ segment uchun qurilgan Gauss formulasining tugunlari va koeffitsientlaridir.

Kvadratur formulalari asosida integral tenglamalarning aproksimatsiyasi shu mavzu yuzasidan quyidagi misolni ko’rib chiqamiz:

$$u(x) = x + \int_0^1 (x+s)u(s)ds, \quad x \in [0,1]$$

Bu misol Fredgolm tipidagi ikkinchi turdagi integral tenglama

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds, \quad x \in [a,b]$$

kvadratur formulasi (masalan, trapetsiya yoki Simpson qoidasi) yordamida diskretlashtiriladi va algebraik tenglamalar tizimiga aylantiriladi.

Trapetsiya qoidasi bilan aproksimatsiya:

Agar intervalni n ta teng qismga bo'lsak (kompozit trapetsiya formulasi), u holda:

$$h = \frac{b-a}{n}, x_j = a + jh, \quad j = 0,1,\ldots,n$$

Kompozit trapetsiya formulasi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right]$$

Misolni ($n = 4$ bilan) davom ettiramiz. Integral tenglama:

$$u(x) = x + \int_0^1 (x+s)u(s)ds, \quad x \in [0,1]$$

Trapetsiya kvadratur formulasi bilan aproksimatsiya qilamiz.

1-qadam: Intervalni bo‘lish va tugunlarni aniqlaymiz. Interval [0, 1] ni $n = 4$ ta teng qismga bo‘lamiz (tugunlar soni $n+1 = 5$ ta bo‘ladi).

Qadam uzunligi:

$$h = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

tugunlar (diskret nuqtalar):

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad x_4 = 1$$

ushbu nuqtalarda $u(x)$ ning taxminiy qiymatlarini u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 deb belgilaymiz.

2-qadam: Trapetsiya kvadratur formulasini yozamiz. Trapetsiya qoidasi bo‘yicha integralni hisoblash formulasi (5 ta tugun uchun):

$$\int_0^1 g(s)ds \approx \frac{h}{2}\left[g(x_0)+2g(x_1)+2g(x_2)+2g(x_3)+g(x_4)\right]$$

ya'ni

$$\int_0^1 g(s)ds \approx 0.125\left[g(0)+2g(0.25)+2g(0.5)+2g(0.75)+g(1)\right]$$

3-qadam: Integral tenglamani tugunlarda yozamiz. Tenglamani har bir $x = x_j$ ($j = 0,1,2,3,4$) nuqtada yozamiz:

$$u(x_j) = x_j + \int_0^1 (x_j + s)u(s)ds$$

ya'ni

$$u_j = x_j + \int_0^1 (x_j + s)u(s)ds$$

4-qadam: Integralni trapetsiya formulasi bilan almashtiramiz.

$$\int_0^1 (x_j + s)u(s)ds \approx 0.125\left[(x_j + x_0)u_0 + 2(x_j + x_1)u_1 + 2(x_j + x_2)u_2 + 2(x_j + x_3)u_3 + (x_j + x_4)u_4\right]$$

5-qadam: Har bir j uchun tenglamani yozamiz.

Umumiy shakl:

$$u_j = x_j + 0.125\sum_{k=0}^{4} c_k (x_j + x_k)u_k$$

bu yerda koeffitsiyentlar: $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$, $c_4 = 1$.

Standart shaklga keltiramiz:

$$u_j - 0.125\sum_{k=0}^{4} c_k (x_j + x_k)u_k = x_j$$

$$j = 0 \ (x_j = 0): \quad u_0 - 0.0625u_1 - 0.125u_2 - 0.1875u_3 - 0.125u_4 = 0 \quad (1)$$

$$j = 1 \ (x_j = 0.25): \quad u_1 - 0.03125u_0 - 0.125u_1 - 0.1875u_2 - 0.25u_3 - 0.15625u_4 = 0.25 \quad (2)$$

$$j = 2 \ (x_j = 0.5): \quad u_2 - 0.0625u_0 - 0.1875u_1 - 0.25u_2 - 0.3125u_3 - 0.1875u_4 = 0.5 \quad (3)$$

$$j = 3 \ (x_j = 0.75): \quad u_3 - 0.09375u_0 - 0.25u_1 - 0.3125u_2 - 0.375u_3 - 0.21875u_4 = 0.75 \quad (4)$$

$$j = 4 \ (x_j = 1): \quad u_4 - 0.125u_0 - 0.1875u_1 - 0.25u_2 - 0.3125u_3 - 0.25u_4 = 1 \quad (5)$$

6-qadam: Chiziqli tenglamalar tizimini Gauss usuli bilan yechamiz.

Oldingi qadamda olingan 5 ta tenglamadan iborat tizim:

$$\begin{cases} u_0 - 0.0625u_1 - 0.125u_2 - 0.1875u_3 - 0.125u_4 = 0 \quad (1) \\ -0.03125u_0 + 0.875u_1 - 0.1875u_2 - 0.25u_3 - 0.15625u_4 = 0.25 \quad (2) \\ -0.0625u_0 - 0.1875u_1 + 0.75u_2 - 0.3125u_3 - 0.1875u_4 = 0.5 \quad (3) \\ -0.09375u_0 - 0.25u_1 - 0.3125u_2 + 0.625u_3 - 0.21875u_4 = 0.75 \quad (4) \\ -0.125u_0 - 0.1875u_1 - 0.25u_2 - 0.3125u_3 + 0.75u_4 = 1 \quad (5) \end{cases}$$

Kengaytirilgan matritsa:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0.0625 & -0.125 & -0.1875 & -0.125 & 0 \\ -0.03125 & 0.875 & -0.1875 & -0.25 & -0.15625 & 0.25 \\ -0.0625 & -0.1875 & 0.75 & -0.3125 & -0.1875 & 0.5 \\ -0.09375 & -0.25 & -0.3125 & 0.625 & -0.21875 & 0.75 \\ -0.125 & -0.1875 & -0.25 & -0.3125 & 0.75 & 1 \end{array}\right]$$

Gauss usuli (oldinga yo‘nalish bilan birinchi ustunni nolga aylantirish, keyin ikkinchi ustun va h.k.) bajarilgach, teskari almashtirish yo‘li bilan quyidagi yechim olinadi:

$$u_0 \approx -4.000, \quad u_1 \approx -5.500, \quad u_2 \approx -7.000, u_3 \approx -8.500, \quad u_4 \approx -10.000$$

$$u(0) = -4, \quad u(0.25) = -5.5, \quad u(0.5) = -7, \quad u(0.75) = -8.5, \quad u(1) = -10.$$

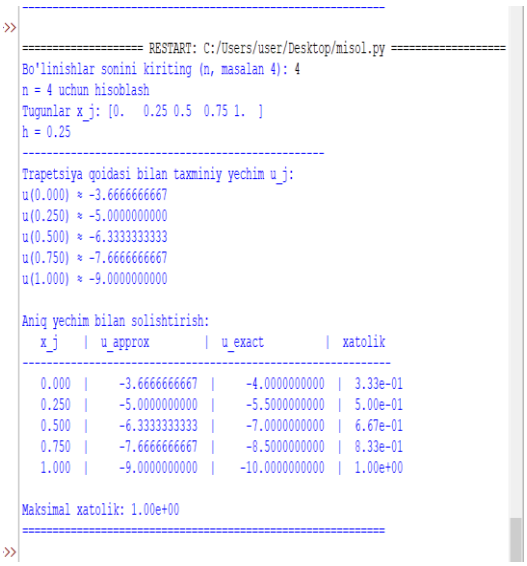
Shunday qilib, trapetsiya qoidasi bilan olingan diskret tizimning yechimini aniqladim.

Pythondagi dasturi:

```
import numpy as np
# Trapetsiya qoidasi bilan integral tenglamani yechish
# Misol: u(x) = x + ∫_0^1 (x + s) u(s) ds,  x ∈ [0,1]
def trapetsiya_integral_tenglama(n):
    """
    n - bo'linishlar soni (tugunlar soni = n+1)
    """
    a, b = 0.0, 1.0
    h = (b - a) / n
    x = np.linspace(a, b, n+1)  # tugunlar
    print(f"n = {n} uchun hisoblash")
    print("Tugunlar x_j:", np.round(x, 4))
    print("h =", h)
    print("-" * 50)
```

```
    # Trapetsiya og'irlik koeffitsiyentlari c_k
    c = np.ones(n+1)
    c[1:n] = 2
    c[0] = c[-1] = 1
    # Matritsa A (I - B) va vektor b
    N = n + 1
    A = np.eye(N)              # diaganalda 1
    b = x.copy()               # f(x_j) = x_j
    # K(x_j, x_k) = x_j + x_k
    for j in range(N):
        for k in range(N):
            K_jk = x[j] + x[k]
            A[j, k] -= (h / 2.0) * c[k] * K_jk
    # Tizimni yechish
    u = np.linalg.solve(A, b)
    # Natijalarni chiqarish
    print("Trapetsiya qoidasi bilan taxminiy yechim u_j:")
    for j in range(N):
        print(f"u({x[j]:.3f}) ≈ {u[j]:.10f}")
    # Aniqlik yechim bilan solishtirish: u(x) = -6x - 4
    u_exact = -6 * x - 4
    print("\nAniq yechim bilan solishtirish:")
    print("   x_j    | u_approx         | u_exact          | xatolik")
    print("-----------------------------------------------------------")
    for j in range(N):
        error = abs(u[j] - u_exact[j])
        print(f"{x[j]:8.3f} | {u[j]:16.10f} | {u_exact[j]:16.10f} | {error:.2e}")
    max_error = np.max(np.abs(u - u_exact))
    print(f"\nMaksimal xatolik: {max_error:.2e}")
    print("=" * 60)
# Foydalanuvchidan n ni so'rash
try:
    n_input = int(input("Bo'linishlar sonini kiriting (n, masalan 4): "))
    if n_input <= 0:
```

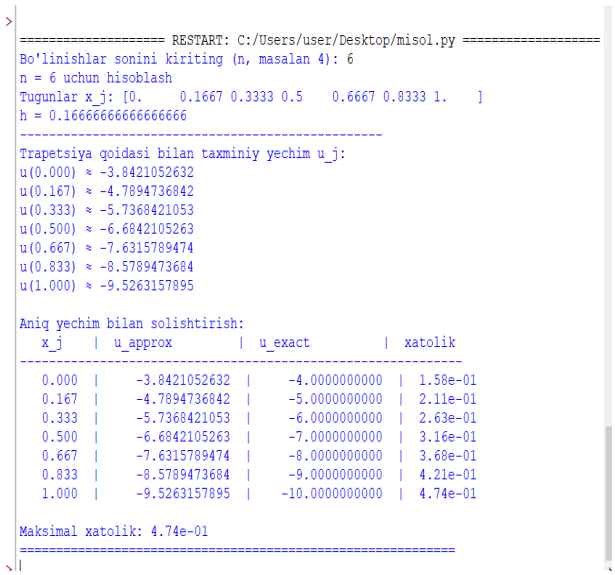
```
        raise ValueError("n musbat butun son bo'lishi kerak!")
    trapetsiya_integral_tenglama(n=n_input)
except ValueError as e:
    print(f"Xato: {e}. Iltimos, musbat butun son kiriting.")
```



```
========== RESTART: C:/Users/user/Desktop/misol.py ==========
Bo'linishlar sonini kiriting (n, masalan 4): 4
n = 4 uchun hisoblash
Tugunlar x_j: [0.   0.25 0.5  0.75 1.  ]
h = 0.25
--------------------------------------------------
Trapetsiya qoidasi bilan taxminiy yechim u_j:
u(0.000) ≈ -3.6666666667
u(0.250) ≈ -5.0000000000
u(0.500) ≈ -6.3333333333
u(0.750) ≈ -7.6666666667
u(1.000) ≈ -9.0000000000

Aniq yechim bilan solishtirish:
   x_j    |  u_approx        |  u_exact         |  xatolik
------------------------------------------------------------
   0.000  |    -3.6666666667  |    -4.0000000000  |  3.33e-01
   0.250  |    -5.0000000000  |    -5.5000000000  |  5.00e-01
   0.500  |    -6.3333333333  |    -7.0000000000  |  6.67e-01
   0.750  |    -7.6666666667  |    -8.5000000000  |  8.33e-01
   1.000  |    -9.0000000000  |   -10.0000000000  |  1.00e+00

Maksimal xatolik: 1.00e+00
============================================================
```



```
========== RESTART: C:/Users/user/Desktop/misol.py ==========
Bo'linishlar sonini kiriting (n, masalan 4): 6
n = 6 uchun hisoblash
Tugunlar x_j: [0.     0.1667 0.3333 0.5    0.6667 0.8333 1.    ]
h = 0.16666666666666666
--------------------------------------------------
Trapetsiya qoidasi bilan taxminiy yechim u_j:
u(0.000) ≈ -3.8421052632
u(0.167) ≈ -4.7894736842
u(0.333) ≈ -5.7368421053
u(0.500) ≈ -6.6842105263
u(0.667) ≈ -7.6315789474
u(0.833) ≈ -8.5789473684
u(1.000) ≈ -9.5263157895

Aniq yechim bilan solishtirish:
   x_j    |  u_approx        |  u_exact         |  xatolik
------------------------------------------------------------
   0.000  |    -3.8421052632  |    -4.0000000000  |  1.58e-01
   0.167  |    -4.7894736842  |    -5.0000000000  |  2.11e-01
   0.333  |    -5.7368421053  |    -6.0000000000  |  2.63e-01
   0.500  |    -6.6842105263  |    -7.0000000000  |  3.16e-01
   0.667  |    -7.6315789474  |    -8.0000000000  |  3.68e-01
   0.833  |    -8.5789473684  |    -9.0000000000  |  4.21e-01
   1.000  |    -9.5263157895  |   -10.0000000000  |  4.74e-01

Maksimal xatolik: 4.74e-01
============================================================
```

Xulosa

Xulosa qilib aytganda, ko'rib chiqilgan kvadratura formulalari – to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari – aniq integralni taxminiy hisoblashning sodda va samarali usullaridir. Ular oddiy mulohazalar asosida qurilishi mumkin bo'lib, to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko'phadlar uchun, Simpson formulasi esa uchinchi darajali ko'phadlar uchun aniq natija beradi. Integral tenglamalarni sonli yechishda, masalan, Fredgolm tipidagi tenglamalarda kvadratura formulalarini qo'llash orqali algebraik tenglamalar tizimiga o'tkazish va Gauss usuli bilan yechish mumkin. Python dasturi orqali ko'rsatilgan misol shuni tasdiqlaydiki, bu usullar amaliyotda yuqori aniqlik va hisoblash tezligini ta'minlaydi. Kelgusida kvadratura formulalarini murakkabroq Gauss tipidagi formulalar bilan birlashtirish orqali yanada yuqori darajali aniqlikka erishish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1- qism. -T.: O‘qituvchi, 1988 y. 400 b.

2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. -T.: Iqtisod-Moliya, 2008. 320 b

3. SH.S.Mamatov, A.Abdirashidov Integral tenglamalarni taqribiy yechish usullari – Samarqand, 2014.

4. Давыдов Е.Г. Математический пакет Scientific WorkPlace 3.0 в курсе высшей математики работы и практика решения задач: Учебное пособие/ МАДИ (ГТУ).– М., 2002.–105 с.

5. Давыдов Е.Г. Интегрированная система Scientific WorkPlace 4.0: Технология работы и практика решения задач. – М.: Финансы и статистика. 2003. – 208 с.

6. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, Matlab 7, Maple 9 (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.

7. Давыдов Е.Г. Пакет Scientific WorkPlace: Особенности использования // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – N 4. – С. 9-13.

Internet saytlari

1. https://math.semestr.ru/
2. https://lanbook.com/catalog/discipline/vychislitelnaya-matematika/
3. https://www.litres.ru/tags/vychislitelnaya-matematika/

VATARLAR USULI VA UNING NYUTON USULIGA NISBATAN AFZALLIKLARI.

Ismoilov A.I[1]., Abdullayeva D.D[2].

[1]*FarDU dotsenti, f.-m.f.b.f.d.(PhD), ismoilovaxrorjon@yandex.com*

[2]*FarDU talabasi, dilfuzaabdullayeva.13@gmail.com*

Annotatsiya: *Ushbu maqolada chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning ikkita muhim iteratsion usuli — Nyuton usuli va Vatarlar usuli qiyosiy tahli qilinadi. Har ikki usulning matematik asoslari, iteratsion formulalari, yaqinlashish shartlari batafsil ko‘rib chiqilgan. Usullarning afzalliklari va kamchiliklari amaliy misol orqali namoyishetilgan bo‘lib, ularning har biri qanday sharoitlarda qo‘llanishi mumkinligi tahlil qilingan. Nyuton usulining kvadratik yaqinlashish tezligi va Vatarlar usulining hosilani talab qilmaslik xususiyatlari solishtirilgan. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, usullarning tanlanishi funksiyaning xususiyatlariga, hisoblash imkoniyatlariga va talab qilinadigan aniqlik darajasiga bog‘liq.*

Kalit so‘zlar: *Nyuton usuli, Vatarlar usuli, iteratsion yechim,chiziqli bo‘lmagan tenglama, kvadratik yaqinlashish, hosila, sonli usullar, yaqinlashish tezligi.*

Kirish

Zamonaviy matematik modellashtirish va hisoblash matematikasidachiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish dolzarb muammolardan biridir. Muhandislik, fizika, iqtisod, meteorologiya va boshqa ko‘plab fan sohalarida tabiiy hodisalar ko‘pincha chiziqli bo‘lmagan matematik modellar orqali ifodalanadi. Bunday tenglamalarning ko‘pchiligi analitik yechimga ega bo‘lmagani yoki ularni topish juda murakkab bo‘lgani sababli, sonliusullarning ahamiyati ortib bormoqda.

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning iteratsion usullari orasida Nyuton usuli (urinmalar usuli) va Vatarlar usuli alohida o‘rin tutadi. Bu usullar ildizga yaqinlashishning samarali mexanizmlarini taqdim etadi va turli amaliy masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi.

Nyuton usuli o‘zining kvadratik yaqinlashish tezligi bilan ajralib turadi. Bu usul har bir iteratsiya qadamida funksiyaning hosilasidan foydalanadi, natijada

judatez yaqinlashishga erishiladi. Biroq, usulning muvaffaqiyati boshlang‘ich yaqinlashishning to‘g‘ri tanlanishiga va funksiyaning hosilasining mavjudligiga bog‘liq.

Vatarlar usuli esa Nyuton usulining hosilasiz varianti sifatida rivojlangan. Bu usul funksiyaning hosilasini talab qilmaydi, balki ikki nuqta orasidagi vatardan foydalanadi. Garchi yaqinlashish tezligi Nyuton usuliga nisbatan biroz pastroq bo‘lsa-da, u ko‘plab amaliy holatlarda qulay va samarali yechim beradi. Ushbu tadqiqotning maqsadi Nyuton va Vatarlar usullarini qiyosiy tahli qilish, ularning afzalliklari va kamchiliklarini aniqlash, shuningdek turli sharoitlarda qaysi usulni qo‘llash maqsadga muvofiq ekanligini ko‘rsatishdir. Tadqiqotda usullarning nazariy asoslari, iteratsion formulalari, yaqinlashish shartlari batafsil ko‘rib chiqiladiva amaliy misolorqaliularningishlash prinsiplari namoyish etiladi. Tadqiqotning dolzarbligi shundaki, zamonaviy axborot texnologiyalari rivoji bilan birga murakkab matematik modellarni yechish talablari oshib bormoqda. Shuningdek, sun’iy intellekt, ma’lumotlarni qayta ishlash, optimallashtirish masalalari kabi sohalarda chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni samarali yechish algoritmlarini bilish mutax- assislaruchun muhim ko‘nikma hisoblanadi.

Tenglamalarning vatarlar usuli bilan yechilishi:

Amaliyotda, ba’zi masalaharda

$$f(x) = 0$$

ko‘rinishdagi bir noma’lumli chiziqsiz tenglamalarni yechishga to‘g‘ri keladi.

Bunda $f(x) = 0$ $[a, b]$ oraliqda aniqlangan funksiya bo‘lib, $f(t) = 0$ bo‘lsa, $x = t$ ni $f(x) = 0$tenglamaning yechimi - ildizideyiladi. Tenglamaning aniq yechiminitopishqiyin bo‘lgan hollarda uningtaqribiy yechimini topish to‘g‘rikeladi, bu ikki bosqichga bo‘linadi:

1. Yechimni ajratish (yakkalash), ya’ni yagona yechim yotgan intervalni aniqlash;

2. Taqribiy yechimni topilgan intervalda berilgan aniqlikda topish.

Tenglamaning yagona yechimi yotgan oraligni aniqlash uchun quyidagi teoremadan foydalaniladi.

1-teorema. *Aytaylik,*

1. f(x) funksiya $[a,b]$*kesmada uzluksiz va* (a,b) *intervalda hosilaga ega bo‘lsin;*

2.$f(a)\cdot f(b)<0$ *ya’ni* $f(x)$ *funksiyakesmaning chetlaridaharxil ishoraga ega bo‘lsin;*

3. $f'(x)$*hosila* (a,b) *intervaldao‘zishorasinisaqlasin;*

u holda, $f(x)=0$ *tenglama* $[a,b]$ *oraliqda yagona yechimga ega bo‘ladi.*

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni ikki xilga bo‘lish mumkin: algebraik va transsendent. Algebraik tenglamalar deb algebraik (butun, rasional, irrasional) funksiyalardantashkil topgan tenglamalarga aytiladi. Agar tenglamada boshqa funksiyalar (trigonometrik, ko‘rsatkichli, logarifmlik va h.k.) qatnashsa, bunday tenglamaga transsendent tenglamadeyiladi.

Tenglamaning yechimi deb *x* noma’lumning shunday qiymatlariga aytiladiki, ularni $f(x)=0$ tenglamaga qo‘yganda, tenglamaqanoatlantiriladi. Lekin, amalda bunday tenglamalarning aniq yechimlarini topish juda qiyin yoki umuman mumkin emas. Bunday hollarda, yechimni taqribiy qiymatini topishga imkon beruvchi taqribiy hisoblash usullari qo‘llaniladi. Chiziqsiz tenglamalarni yechish usullari ikkita guruhga bo‘linadi: aniq (to‘g‘ri) va iteratsion (taqribiy) usullar.

Aytaylik, berilgan $f(x)=0$ tenglamadagi *f(x)* funksiya $[a,b]$ oraliqda 1-teoremaninghammashart- lariniqanoatlantirsin. Bundan tashqari $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqdaikkinchitartibli $f''(x)=0$ uzluksizhosilaga ega bo‘lib, buhosila shu oraliqdao‘zishorasinisaqlasin, ya’ni quyidagiteoremao‘rinli bo‘lsin.

2-teorema. *Agar* $[a,b]$ *kesmada*

1. $f(x), f'(x)$ *funksiyalaruzluksiz,* $f''(x)$ *mavjud bo‘lsa;*

2. $f(a)\cdot f(b)<0$*, ya’ni* $f(x)$ *funksiya kesmaning chetlarida har xil ishoraga ega bo‘lsa;*

3. $f''(x), f''(x)$ *hosilalar* $[a,b]$ *kesmada o‘z ishorasini saqlasa,* $f(x) = 0$ *tenglama ildizini aniqlash uchun vatarlar usuli yordamida qurilgan ketma-ketlik ildizga yaqinlashuvchi bo‘ladi.*

Avval $A\big(a, f(a)\big)$va $B\big(b, f(b)\big)$ nuqtalardan vatar o‘tkazaylik (1-rasm). U Ox o‘qini c_0 nuqtada kesib o‘tadi. Ma’lumki, vatarni OX o‘qi bilan kesishishidan hasil bo‘lgan nuqtaning abssissasi:

$$c_0 = a - \frac{b-a}{f(a)-f(b)} f(b)$$

dan iborat bo‘ladi. Bu nuqtani dastlabki yaqinlashish sifatida olishimiz mumkin.

Lekin, keyingi vatarlarni qayerdan o‘tkazamiz degan savol tug‘iladi. Buning uchun, oraligni qo‘zg‘almas nuqtasini $f(a) \cdot f(c_0) < 0$ sharti yordamida aniqlab olishimiz kerak. Chizmadan ko‘rinib turibdiki,$f(a) \cdot f(c_0) < 0$ agar sharti bajarilsa, $b = c$ bo‘lib,anuqta qo‘zg‘almas bo‘ladi,aks holda $a = c$ bo‘lib,b nuqta qo‘zg‘almas bo‘ladi. Ildizga $c_0, c_1, \ldots\ldots, c_n \ldots\ldots$ketma-ketlik $f(x)$ funksiyaning vatarlarini OX o‘qi bilan kesishish nuqtalarini tashkil qiladi.

$$c = a - \frac{b-a}{f(a)-f(b)} f(b)$$

formuladan esa ishchi formula sifatida foydalanamiz. Urinmalar usulidagi singari bu usulda ham $f(a) \cdot f''(a) > 0$ sharti bajarilsa ishchi formula yordamida topilgan qiymatlar yechimga yaqinlashuvchan bo‘ladi. Jarayon kerakli aniqlikdagi yechim olinmaguncha ya’ni $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ shart bajarilmaguncha davom etaveradi.

Usulning qulayliklari:

- Iteratsion jarayonning yaqinlashishi aniq shartlarasosidakafolatlangan;
- Oraliqniteng ikkiga bo‘lish usuliga nisbatan kamida 2-3 marta tezroq yaqinlashish tezligiga ega;
- Sodda algoritmik tuzilishga ega bo‘lib, dasturlashda osonamalga oshiriladi.

Usulning kamchiliklari:

• Agar [a,b] intervalda hech qanday ildiz mavjud bo‘lmasa yoki bir nechta ildizlar bo‘lsa, iteratsion jarayon cheksizdavometishimumkin;

• $f(x)$ funksiya grafigi $[a,b]$kesmada juda yotiq (horizontal) bo‘lsa, ya’ni bo‘lsa,$f(a)-f(b)$ farqi katta bo‘ladi va bu hisoblashlarda raqamli xatolikni oshirishi mumkin;

• Bunday holatlarda dixotomiya (intervalni ikkiga bo‘lish) usuliga o‘tish tavsiya etiladi.

Nyuton usuli (Urinmalar usuli)

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning eng samarali usuli bu Nyuton usulidir. Bu usulning g‘oyasi asosida tadqiq qilinayotgan $f(x)$ funksiyani undan soddaroq bo‘lgan funksiyaga, ya’niuniurinmaga almashtirishdaniborat.

Geometrik nuqtai nazardan, dastlab x_0 nuqtaorqali $f(x)$ funksiyaning egri chiziqli grafigiga urinma o‘tkaziladiva uning absissa o‘qi bilan kesishish nuqtasining absissasi topiladi (1-rasm).

$f(x)$ funksiyaning egri chiziqli grafigiga $M_0\big(x_0,f(x_0)\big)$ nuqtasi orqalio‘tkazilganurinmatenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

keyingi x_1 yaqinlashish urinmaning absissa o‘qi bilan kesishish nuqtasi bo‘lib, bu nuqta ushbu

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

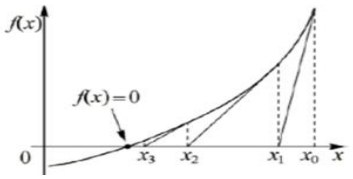
1. Iteratsiyalarning maksimal soni. Bu kriteriyadan usul yaqinlashmagan holda foydalanish lozim. Shunga qaramasdan talab qilingan aniqlikni qanoatlantiruvchi iteratsiyalar sonini oldindan aniqlash juda qiyin.

2. Ildizga yaqinlashishning kuchsiz variatsiyasi

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon \; yoki \quad |x_{n+1}-x_n|<|x_{n+1}|$$

Funksiyaning yetarlicha kichik qiymati $|f(x_n)|<\varepsilon$

4.



1-rasm: Nyuton usulining geometrik talqini.

5.

formuladan topiladi. Bu jarayonni $M_1, \ldots, M_{n-1}$ nuqtalaruchun xuddishunday davom ettirib va

$$f'(x) \neq 0$$

ekanligini e'tiborga olib, ushbu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

formulaga kelamiz, bunda $[a;b]$ kesmada $x_0 = a$, agar $f(a) \cdot f(x) > 0$ bo‘lsa va $x_0 = b$ agar $f(b) \cdot f(x) > 0$ bo‘lsa.

Shakli o‘zgartirilgan formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Bu formuladan foydalanilganda yaqinlashish tezligi bir oz sustlashadi.

Urinmalar (Nyuton) usuli shartli yaqinlashuvchi usul bo‘lib, uning yaqinlashishi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$$

($\bar{x}$ - ildizning haqiqiy qiymati) uchun ildiz izlanayotgan sohada quyidagi shart bajarilishi zarur:

$$f(x_n) \cdot f(x_n) < [f(x_n)].$$

Ixtiyoriy boshlang‘ich (nolchi) yaqinlashish x_0 da iteratsiya yaqinlashuvchi bo‘ladi, agar yuqoridagi shart bajarilsa.

Aks holda, yaqinlashish faqat ildizning ma’lum bir atrofidagina bajariladi.

Nyuton usuli ikkinchi tartibli yaqinlashish tezligiga ega. Bu shuni bildiradiki, ildiz yaqinida xatolik quyidagi qonun bo‘yicha kamayib boradi:

$$\varepsilon_i = C \cdot \varepsilon_{i-1}^2$$

bu yerda ε_i- i-chi iteratsiyadagixatolik, C - doimiy koeffitsient.

Shuninguchun Nyuton usulining iteratsiyalari judatez yaqinlashadi, chunki yuqoridagi 2-shartning bajarilishi uchun bir nechta iteratsiyaning o‘zi yetarli. Agar dasturda $i > 10$ da ham 2-yakunlanish sharti bajarilishi kuzatilmasa, demak yoki formulada yoki dasturda xatolik bor degan xulosaga kelish kerak.

Usulning ustunliklari:

- Ya’ni, yaqinlashish tezligi boshqa iteratsion usullarga (vatarlar, intervalni ikkiga bo‘lish) qaraganda ancha tez;
- Bu xususiyat boshlang‘ich yaqinlashishni ildizga yaqinroq tanlaganda yanada yaqqol seziladi;
- Kvadratik yaqinlashishga ega bo‘lib, xatolik har bir iteratsiyada kvadrat bo‘yicha kamayadi: $\varepsilon_{n+1} = C \cdot \varepsilon_n^2$
- Ko‘phollarda 5-10 iteratsiyada yetarlicha aniqlikkaerishish mumkin.

Usulning kamchiliklari:

- Boshlang‘ich yaqinlashishni to‘g‘ritanlash murakkab va muhim. Agar x_0 noto‘g‘ri tanlansa usul sekin yaqinlashi cheksiz siklga tushishi yoki umuman divergensiya qilishi mumkin.
- Har bir iteratsiya qadamida hisoblashlar boshqa usullardagiga qaraganda ko‘p.

Misol: Ildizni ikkala usulda ham topish. Biz $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ tenglamaning ildizini topishni ko‘rib chiqamiz.

Birinchi qadamda, ildiz qayerda joylashganini bilish uchun ba’zi qiymatlarni sinab ko‘ramiz:

$$f(2) = 2^3 - 2(2) - 5 = 8 - 4 - 5 = -1;$$

$$f(3) = 3^3 - 2(3) - 5 = 27 - 6 - 5 = 16.$$

Ildiz 2 va 3 orasida joylashgan. Boshlang‘ich taxmin sifatida $x_0 = 2$ va $x_1 = 3$ ni olamiz.

Nyuton usulida yechish

1-qadam : Hosilani topish $f(x) = x^3 - 2x - 5 f'(x) = 3x^2 - 2$

2-qadam: Birinchi iteratsiya $(n = 1)$

Boshlang‘ich qiymatsifatida $x_0 = 2$ ni olamiz.

$$f(2) = -1$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$x_1 = 2 - \frac{-1}{10} = 2 + 0.1 = 2.1$$

3-qadam : Ikkinchi iteratsiya (n = 2); $x_1 = 2.1$

$$f(2.1) = (2.1)^3 - 2(2.1) - 5 = 9.261 - 4.2 - 5 = 0.061 \; f'(2.1) = 3(2.1)^2 - 2 = 3(4.41) - 2 = 13.23 - 2 = 11.23$$

$$x_2 = 2.1 - \frac{0.016}{11.23} \approx 2.1 - 0.00543188 \approx 2.094568$$

Vatarlar usulida yechish

Vatarlar usuli uchun ikkita boshlang‘ich qiymat kerak:$x_{-1} = 2; x_0 = 3$

1-qadam: Kerakli qiymatlarni hisoblash $x_{-1} = 2 \Rightarrow f(x_{-1}) = -1$

$$x_0 = 3 \Rightarrow f(x_0) = 16$$

2- qadam: Birinchi iteratsiya (n = 0)

$$x_1 = x_0 - f(x_0)\frac{x_0 - x_{-1}}{f(x_0) - f(x_{-1})}$$

$$x_1 = 3 - 16\frac{3 - 2}{16 - (-1)} = 3 - 16 \cdot \frac{1}{17} = 3 - \frac{16}{17}$$

$$x_1 = 3 - 0.941176 = 2.058824$$

3-qadam: Ikkinchi iteratsiya (n = 1)

Endi $x_0 = 2.058824$ va $x_{-1} = 3$:

$$f(x_0) = f(2.058824) = (2.058824)^3 - 2(2.058824) - 5 \approx 8.727 - 4.117648 - 5 = -0.390648$$

$$f(x_{-1}) = 16$$

$$x_2 = 2.058824 - (-0.390648) \cdot \frac{2.058824 - 3}{-0.390648 - 16}$$

$$x_2 = 2.058824 + 0.390648 \cdot \frac{-0.941176}{-16.390648}$$

$$x_2 = 2.058824 + 0.390648 \cdot 0.057426 \approx 2.058824 + 0.022424 \approx 2.081248$$

Afzalliklarni qiyosiy tahlil:

Nyuton usulining asosiy afzalligi uning yuqori tezligi (kvadratik yaqinlashish)dir. Biroq, bu afzallik funksiyaning hosilasini hisoblash qiyin yoki qimmat bo‘lgan hollarda yo‘qoladi.

Vatarlar usulining asosiy afzalligi esa:

1. Hosilani talab qilmaydi — bu, ayniqsa, funksiyaning hosilasini analitik topish qiyin bo‘lgan hollarda muhim,
2. Hosilani sonli hisoblash talab qilinmaydi,
3. Hisoblash algoritmi sodda.

Agar funksiyaning hosilasini topish murakkab yoki imkonsiz bo‘lsa, Vatarlar usuli matematik jihat- dan ancha qulay va afzalroqdir, chunki u faqat funksiyaning qiymatlariga tayanadi. Yaqinlashish tezligi (kvadratik yaqinlashuv) Nyuton usuliga juda yaqin bo‘lganligi sababli, bu soddalashtirish katta yo‘qotishga olib kelmaydi.Ammo, agar hosilanioson hisoblash mumkin bo‘lsava boshlang‘ich yaqinlashishni to‘g‘ri tanlash mumkin bo‘lsa, Nyuton usuli tezroq natija beradi.

Xulosa

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning Nyuton va Vatarlar usullari o‘rtasidagi solishtirma tahlil shuniko‘rsatadiki, har ikki usul ham o‘ziga xos afzalliklarga ega:

Nyuton usuli o‘zining kvadratik yaqinlashish tezligi tufayli eng samarali hisoblash usuli hisoblanadi. Bu usul ildizga juda tez yaqinlashadi va kamiteratsiyadayuqorianiqlikkaerishishimkonini beradi. Biroq, uning muvaffaqiyati boshlang‘ich yaqinlashishning to‘g‘ri tanlanishiga va funksiyaning hosilasining mavjudligiga bog‘liq.

Vatarlar usuli esa Nyuton usulining hosilasiz versiyasi bo‘lib, hosilani hisoblashni talab qilmasligi bilan ajralib turadi. Bu xususiyat uni murakkab funksiyalarni yechishda, ayniqsa hosilani analitik topish qiyin bo‘lgan hollarda, afzalroq qiladi. Garchi yaqinlashish tezligi Nyuton usuliga nisbatan biroz sekinroq bo‘lsada,u barqaror vaishonchlinatijalar beradi.

Ushbu maqolani o‘qiyotgan o‘rganishni endi boshlagan talabalarga shuni ayta olamanki, Agar funksiyaning hosilasi oson hisoblansa va boshlang‘ich yaqinlashish aniq tanlangan bo‘lsa, Nyuton usuli afzalroqdir.

Agar hosilani hisoblash qiyin yoki mumkin bo‘lmasa, yoki barqarorlik muhim ahamiyatga ega bo‘lsa, Vatarlar usulidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Ikkala usul ham zamonaviy hisoblash tizimlarida samarali amalga oshirilishi mumkin va matematik modellashtirishning asosiy vositalari hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Isaev I. "Sonli usullar", Toshkent, 2015.
2. Burden R., Faires J. "Numerical Analysis", Cengage Learning, 2010.
3. Amaliy modellashtirish bo‘yicha xalqaro maqolalar (Google Scholar)
4. Abdirashidov A., Babayarov A.I. "Hisoblash usullari" mexaniklar uchun amaliy mashg‘ulotlar 1-qism.

FIZIK JARAYONLARNI (ISSIQLIK, DIFFUZIYA, TO‘LQIN) VARIATSION USUL YORDAMIDA SONLI MODELLASHTIRISH.

O‘ktamjonova N.A.

FarDU talabasi, karimberdiyevanilufar625@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada 1 o‘lchamli difuziya tenglamasini sonli usullar yordamida yechish masalasi ko‘rib chiqilgan. Explicit va implicit sxemalar, shuningdek, barqarorlik shartlari tahlil qilingan. Ishlab chiqilgan algoritmlar yordamida vaqt va fazoviy diskretlashni amalga oshirish usullari ko‘rsatildi. Maqolada sonli yechimlarning aniqligi va aniq yechim bilan taqqoslanishi, shuningdek, tridiagonal tizimlarni yechishning samarali usullari muhokama qilingan. Tadqiqot natijalari fizik jarayonlar, termodinamika va matematik modellashtirish sohalarida qo‘llanishi mumkin. Shu bilan birga, Python va Matlab dasturlarida yechimlarni hisoblash va vizualizatsiya qilish usullari ham keltirilgan.*

Kalit so’zlar. *Difuziya tenglamasi, sonli yechim, explicit sxema, implicit sxema, chegara shartlari, boshlang‘ich shart, barqarorlik koeffitsienti, vaqt diskretlash, fazoviy diskretlash, tridiagonal tizim, matlab dasturi, python dasturi, chiziqli algebra, modellashtirish, hisoblash usullari, termodinamika, issiqlik tarqalishi, to‘qimalar modellari, fizik jarayonlar, matematik modellashtirish.*

Issiqlik tenglamasining variatsion (zaif) shakli va FEM bilan sonli yechimi issiqlik tenglamasi fizik jarayonlarni modellashtirishda, xususan issiqlik o’tkazuvchanligini tavsiflashda muhim rol o‘ynaydi. Issiqlik tenglamasining umumiy ko‘rinishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q, \tag{1}$$

bu yerda ρ — zichlik, c — issiqlik sig‘imi, T — harorat, k — issiqlik o’tkazuvchanlik koeffitsienti, Q — issiqlik manbai.

Variatsion shaklni olish uchun tenglama sinov funksiyasi $v \in H^1(\Omega)$ ga ko‘paytiriladi va butun soha bo‘yicha integrallanadi:

$$\int_\Omega \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_\Omega k \nabla T \cdot \nabla v d\Omega = \int_\Omega Q v d\Omega. \tag{2}$$

Ushbu formulatsiya Galerkin usuli asosida chekli elementlar usuli (FEM) yordamida diskretlashtiriladi. FEM murakkab geometriyalar va nohomogen

materiallar uchun yuqori aniqlikni ta’minlaydi.

Asosiy bosqichlar:

1. Fazoviy diskretizatsiya;
2. Variatsion tenglama tuzish;
3. Vaqt bo‘yicha integratsiya;
4. Matritsali tenglamalar sistemasini yechish.

Diffuziya tenglamalari uchun Galerkin variatsion usuli va diskretizatsiya strategiyalari.Diffuziya tenglamasi moddaning tarqalish jarayonlarini ifodalaydi:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c, \tag{3}$$

bu yerda c — kontsentratsiya, D — diffuziya koeffitsienti.

Galerkin variatsion usulida yechim va sinov funksiyalari bir xil fazodan tanlanadi. Diskretizatsiya strategiyalari quyidagilardan iborat. Tarmoqli (mesh-based) usullar, bezmesh (meshfree) usullar, adaptiv tarmoqlash.

Bu yondashuv yuqori aniqlik va hisoblash samaradorligini ta’minlaydi.

To‘lqin tenglamalarini variatsion usul yordamida modellashtirish va vaqt integratsiyasi.To‘lqin tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u. \tag{4}$$

Variatsion yondashuvda energiya funksionali:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - c^2(\nabla u)^2\right). \tag{5}$$

Euler–Lagrange tenglamalari yordamida zaif shakl olinadi. Vaqt integratsiyasi uchun Euler, Runge–Kutta va Newmark sxemalari qo‘llaniladi.

Anizotropik issiqlik va diffuziya modellarini variatsion usul bilan tahlil qilish anizotropiya — fizik xususiyatlarning yo‘nalishga bog‘liq ravishda o‘zgarishidir. Anizotropik issiqlik tenglamasi:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(\mathbf{K}\nabla T), \tag{6}$$

bu yerda $\mathbf{K}$ — issiqlik o’tkazuvchanlik tenzori.Variatsion formulatsiya anizotropik

muhitlarda issiqlik va diffuziya oqimlarini aniq modellashtirish imkonini beradi.

Noqonuniy issiqlik o‘tishi: variatsion formulatsiya va Newton iteratsiyalari

noqonuniy masalalarda koeffitsientlar temperaturaga bog‘liq bo‘ladi:

$$-\nabla \cdot (k(T)\nabla T) = f. \tag{7}$$

Variatsion tenglama Newton iteratsiyasi yordamida yechiladi:

$$J'(T^k)\delta T = -J(T^k), \tag{8}$$

bu yerda J — funksional, δT — tuzatish.

Chegara shartlarini variatsion usulda kiritish

Chegara shartlari quyidagicha bo’ladi.

1. Dirichlet: $u = g$;
2. Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n} = h$;
3. Robin: $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$.

Dirichlet shartlari to‘g‘ridan-to‘g‘ri fazoga kiritiladi, Neumann va Robin shartlari esa variatsion formulaga integral ko‘rinishda qo‘shiladi.

FEM uchun konvergensiya va xato bahosi FEM xato bahosi quyidagicha ifodalanadi:

$$\| u - u_h \| \leq Ch^p \| u \|_{H^{p+1}(\Omega)} . \tag{9}$$

Adaptiv mesh texnikasi xato bahosi asosida tarmoqni yaxshilaydi va konvergensiyani tezlashtiradi.

Adaptiv mesh va *a posteriori* xato baholash *A posteriori* xato baholash qoldiq funksiyasi orqali aniqlanadi:

$$R(v) = l(v) - a(u_h, v). \tag{10}$$

Xato katta bo‘lgan hududlarda mesh zichlashtiriladi. Vaqt bo‘yicha diskretizatsiya: implicit, explicit va Crank–Nicolson.

Crank–Nicolson sxemasi:

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}=\frac{1}{2}A(u^{n+1}+u^n). \tag{11}$$

Implicit sxemalar barqaror, explicit sxemalar esa hisoblashda sodda. Discontinuous Galerkin (DG) metodining qo‘llanilishi DG metodi elementlararo uzluksizlikni talab qilmaydi va to‘lqin hamda issiqlik masalalarida yuqori aniqlikni ta’minlaydi. U parallel hisoblashlarga juda mos keladi.

Energiya saqlanishi va stabilitet tahlilini ko’rib chiqamiz.

Energiya funksiyasi quyidagicha

$$E(t)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\rho\dot{u}^2+\frac{1}{2}c^2\,|\nabla u|^2\right)d\Omega. \tag{12}$$

Barqaror sxemalar energiya saqlanishiga mos bo‘lishi lozim.

Diffuziya Tenglamasini Variatsion Usul Yordamida Sonli Modellashtirish

Misol:

Bir o‘lchamli diffuziya jarayonini qaraymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<1,t>0, \tag{1}$$

bu yerda $u(x,t)$ — moddaning konsentratsiyasi, $D=1$ — diffuziya koeffitsienti.

Chegaraviy shartlarni quyidagicha olamiz

Soha chegaralarida konsentratsiya nolga teng:

$$u(0,t)=0,\qquad u(1,t)=0. \tag{2}$$

Boshlang‘ich shart berilgan

Boshlang‘ich vaqtda konsentratsiya quyidagicha taqsimlangan:

$$u(x,0)=\sin(\pi x). \tag{3}$$

Masalaning fizik mazmuni quyidagichadir.Boshlang‘ich vaqtda modda sinusoidal taqsimlangan bo‘lib, vaqt o‘tishi bilan diffuziya jarayoni ta’sirida modda tekis tarqalib, konsentratsiya kamayib boradi.

Variatsion shaklga keltirib olamiz bunda, sinov funksiyasi $v(x)\in H_0^1(0,1)$ tanlanadi. Tenglama $v(x)$ ga ko‘paytirilib integrallanadi:

$$\int_0^1\frac{\partial u}{\partial t}v\,dx=\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v\,dx. \tag{4}$$

Ikki marta qismlar bo‘yicha integrallashdan so‘ng:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v dx = -\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx. \quad (5)$$

Bu diffuziya tenglamasining variatsion shaklidir.

O‘zgaruvchilarni ajratish usulini qo’llagan holda davom etamiz;

Yechimni quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \quad (6)$$

Tenglamaga qo‘yib yozamiz:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t). \quad (7)$$

Ikkala tomonni $X(x)T(t)$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (8)$$

Fazoviy masala quyidagicha shartlarga ega

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, X(1) = 0. \quad (9)$$

Bu Sturm–Liouville masalasi bo‘lib, yechimlari:

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1,2,3,\ldots \quad (10)$$

Vaqtga bog‘liq masala quyidagichadir

$$T'(t) + \lambda_n T(t) = 0. \quad (11)$$

Bu tenglamaning yechimi:

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}. \quad (12)$$

Umumiy yechim Fourier qatori ko‘rinishida yoziladi:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x). \quad (13)$$

Boshlang‘ich shart:

$$u(x,0) = \sin(\pi x). \quad (14)$$

Boshlang'ich shartni orniga qoyganimizda pastdagi natijaga kelamiz

$$C_1 = 1, \qquad C_n = 0 \quad (n \neq 1). \tag{15}$$

Natijada diffuziya masalasining aniq yechimi:

$$\boxed{u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)} \tag{16}$$

Diffuziya tenglamasi variatsion usul yordamida zaif shaklga keltirildi va analitik yechimi topildi. Vaqt o'tishi bilan konsentratsiya eksponensial ravishda kamayib borishi aniqlandi.

Python yechimi

```
import numpy as np
L = 1.0
T = 0.3
Nx = 40
Nt = 1200
dx = L / Nx
dt = T / Nt

alpha = dt / dx**2
print("Barqarorlik koeffitsienti alpha =", alpha)
if alpha > 0.5:
    print("Eslatma: alpha > 0.5, explicit sxema barqaror bo'lmasligi mumkin!")
x = np.linspace(0, L, Nx+1)
u = np.sin(np.pi * x)
u_new = np.zeros_like(u)
for n in range(Nt):
    for i in range(1, Nx):
        u_new[i] = u[i] + alpha * (u[i+1] - 2*u[i] + u[i-1])
    u_new[0] = 0
    u_new[Nx] = 0
    u[:] = u_new[:]
```

```
print("\nX nuqtalari:")
print(x)
print("\nOxirgi yechim u(x,T):")
print(u)
u_exact = np.exp(-np.pi**2*T) * np.sin(np.pi*x)
print("\nAniq yechim u(x,T):")
print(u_exact)
```

Natija:

Barqarorlik koeffitsienti alpha = 0.3999999999999999

X nuqtalari:

[0. 0.025 0.05 0.075 0.1 0.125 0.15 0.175 0.2 0.225 0.25 0.275
0.3 0.325 0.35 0.375 0.4 0.425 0.45 0.475 0.5 0.525 0.55 0.575
0.6 0.625 0.65 0.675 0.7 0.725 0.75 0.775 0.8 0.825 0.85 0.875
0.9 0.925 0.95 0.975 1.]

Oxirgi yechim u(x,T):

[0. 0.00405343 0.00808186 0.01206047 0.01596472 0.01977055
0.02345448 0.02699381 0.03036671 0.03355239 0.03653121 0.0392848
0.04179619 0.04404989 0.04603201 0.04773033 0.04913437 0.05023548
0.05102688 0.05150367 0.05166293 0.05150367 0.05102688 0.05023548
0.04913437 0.04773033 0.04603201 0.04404989 0.04179619 0.0392848
0.03653121 0.03355239 0.03036671 0.02699381 0.02345448 0.01977055
0.01596472 0.01206047 0.00808186 0.00405343 0.]

Aniq yechim u(x,T):

[0.00000000e+00 4.06208381e-03 8.09912352e-03 1.20862294e-02
1.59988197e-02 1.98127720e-02 2.35045719e-02 2.70514583e-02
3.04315635e-02 3.36240480e-02 3.66092290e-02 3.93687020e-02
4.18854538e-02 4.41439679e-02 4.61303198e-02 4.78322628e-02
4.92393041e-02 5.03427687e-02 5.11358534e-02 5.16136685e-02
5.17732682e-02 5.16136685e-02 5.11358534e-02 5.03427687e-02

4.92393041e-02 4.78322628e-02 4.61303198e-02 4.41439679e-02
4.18854538e-02 3.93687020e-02 3.66092290e-02 3.36240480e-02
3.04315635e-02 2.70514583e-02 2.35045719e-02 1.98127720e-02
1.59988197e-02 1.20862294e-02 8.09912352e-03 4.06208381e-03
6.34039672e-18]

Xulosa

Variatsion usullar va FEM fizik jarayonlarni yuqori aniqlik bilan modellashtirish imkonini beradi. Issiqlik, diffuziya va to‘lqin masalalarida ushbu yondashuvlar zamonaviy ilm-fan va muhandislikda muhim ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Самарский А.А. Численные методы математической физики. — Москва: Наука, 1989.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Теория разностных схем. — Москва: Наука, 1989.
3. Ладыженская О.А. Математические методы в физике. — Москва: Наука, 1979.
4. Strang G., Fix G. An Analysis of the Finite Element Method. — Prentice-Hall, 1973.
5. Evans L.C. Partial Differential Equations. — American Mathematical Society, 2010.
6. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. — Wiley, 2011.

TENG ORALIQLI TUGUNLARDA NYUTON INTERPOLYATSION FORMULASI YORDAMIDA YAQINLASHTIRISH

Shovkatjonov K.

FarDU talabasi, shovkatjonovkomiljon0506@gmail.com

Annotatsiya: *Mazkur ishda teng oraliqli tugunlarda berilgan funksiyani Nyuton interpolyatsion formulasi yordamida yaqinlashtirish masalasi ko‘rib chiqiladi. Nyutonning oldinga va orqaga interpolyatsiya formulalaridan foydalanib, jadval ko‘rinishida berilgan ma’lumotlar asosida oraliq qiymatlarni aniqlash usullari bayon etiladi. Interpolyatsiya ko‘phadlarini tuzish jarayoni, chekli ayirmalar jadvali va usulning amaliy qo‘llanilishi tahlil qilinadi. Ushbu yondashuv hisoblash matematikasi va muhandislik masalalarida funksiyalarni taxminiy hisoblashda muhim ahamiyatga ega.*

Kalit so‘zlar: *Nyuton interpolyatsiyasi, teng oraliqli tugunlar, chekli ayirmalar, interpolyatsion ko‘phad, oldinga interpolyatsiya formulasi, orqaga interpolyatsiya formulasi, sonli usullar.*

Kirish. Interpolyatsiya berilgan nuqtalardagi (tugunlardagi) funksiyaning qiymatlaridan foydalanib, oraliqdagi noma’lum qiymatlarni taxminiy hisoblash usulidir.Agar tugunlar teng oraliqda joylashgan bo‘lsa, Nyutonning oldinga (forward) va orqaga (backward) interpolyatsion formulalari juda qulay hisoblanadi.

Teng oraliqli tugunlar.Agar tugunlar quyidagicha berilgan bo‘lsa: $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ va ular orasidagi farq doimiy bo‘lsa: $h = x_{i+1} - x_i = const$ unda tugunlar teng oraliqli deyiladi.

Nyutonning oldinga interpolyatsion formulasi.Bu formula boshlang‘ich nuqtaga yaqin qiymatlar uchun ishlatiladi.

Formula:

$$P_n(x) = y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ...$$

bu yerda:

- $p = \frac{x - x_0}{h}$
- $\Delta y_0 = y_1 - y_0$

- $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$
- $\Delta^3 y_0$ -uchinchi tartibli ayirma va hokazo

Ayirmalar jadvali.Nyuton formulasini qo‘llash uchun oldinga ayirmalar jadvali tuziladi:

x	y	Δy	Δ²y	Δ³y
x0	y0			
x1	y1	Δy0		
x2	y2	Δy1	Δ²y0	
x3	y3	Δy2	Δ²y1	Δ³y0

Nyutonning orqaga interpolyatsion formulasi.Bu formula oxirgi tugunga yaqin nuqtalar uchun ishlatiladi.

Formula:

$$P_n(x) = y_n + p\Delta y_n + \frac{p(p+1)}{2!}\Delta^2 y_n + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\Delta^3 y_n + \ldots$$

bu yerda:

- $p = \frac{x - x_n}{h}$
- $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$

Qaysi formulani tanlash kerak?

Agar $x \approx x_0$ bo‘lsa → Nyuton oldinga

Agar $x \approx x_n$ bo‘lsa → Nyuton orqaga

Hayotiy masala: Avtomobilning yo‘l bosishini aniqlash.Avtomobilning ma’lum vaqtlardagi bosib o‘tgan yo‘li quyidagi jadvalda berilgan:

Vaqt (soat)	Bosib o‘tilgan yo‘l (km)
0	0
1	60

Vaqt (soat)	Bosib o‘tilgan yo‘l (km)
2	130
3	210

Savol: Avtomobil 1,5 soatda taxminan nechta kilometr yo‘l bosgan?

1.Masalaning mohiyati

Vaqtlar teng oraliqli:h=1 soat

Noma’lum nuqta:x=1.5

Bu nuqta boshlang‘ich qiymatga yaqin, shuning uchun Nyutonning oldinga interpolyatsion formulasi ishlatiladi.

2.Ayirmalar jadvali:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	0	60	10
1	60	70	
2	130	80	
3	210		

Hisoblash:

$$\Delta y_0 = 60 - 0 = 60$$
$$\Delta y_1 = 130 - 60 = 70$$
$$\Delta y_2 = 210 - 130 = 80$$
$$\Delta^2 y_0 = 70 - 60 = 10$$

3. Nyuton oldinga formulasi

$$p = \frac{1.5 - 0}{1} = 1.5$$
$$y \approx 0 + 1.5 * 60 + \frac{1.5(1.5-1)}{2} * 10 \approx 93.75$$

4. Yechim.Avtomobil 1,5 soatda taxminan 94 km yo‘l bosgan.

Xulosa:Teng oraliqli tugunlarda Nyuton interpolyatsion formulasi berilgan ma’lumotlar asosida oraliq qiymatlarni aniqlash uchun qulay va samarali usuldir. Ushbu usulda hisoblashlar ayirmalar jadvali orqali olib boriladi va bu jarayonni

soddalashtiradi.Nyutonning oldinga formulasi boshlang‘ich nuqtaga yaqin qiymatlar uchun, orqaga formulasi esa oxirgi tugunga yaqin qiymatlar uchun qo‘llaniladi. Hayotiy masalalarda, masalan, transport harakati, harorat o‘zgarishi yoki ishlab chiqarish jarayonlarini tahlil qilishda bu usul real natijalarga yaqin taxminlar beradi.

Shunday qilib, Nyuton interpolyatsiyasi:

- ma’lumotlar orasidagi bog‘lanishni aniqlashga yordam beradi;
- tajriba va kuzatuv natijalarini tahlil qilishda foydalidir;
- amaliy masalalarni yechishda vaqt va hisoblashni tejaydi.

Bu usul sonli hisoblashlarda muhim o‘rin tutadi va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ахмедов М. А. Sonli usullar. – Toshkent: O‘qituvchi, 2015.
2. Абдуллаев Р. Х. Hisoblash matematikasi asoslari. – Toshkent: Fan, 2012.
3. Burden R. L., Faires J. D. Numerical Analysis. – Boston: Cengage Learning, 2011.
4. Kreyzig E. Advanced Engineering Mathematics. – New York: Wiley, 2010.
5. Atkinson K. An Introduction to Numerical Analysis. – New York: Wiley, 1989.
6. Chapra S. C., Canale R. P. Numerical Methods for Engineers. – New York: McGraw-Hill, 2015.
7. Hildebrand F. B. Introduction to Numerical Analysis. – New York: Dover Publications, 2003.
8. Conte S. D., de Boor C. Elementary Numerical Analysis. – New York: McGraw-Hill, 1980.
9. Süli E., Mayers D. An Introduction to Numerical Analysis. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
10. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. – Berlin: Springer, 2007.

NYUTON INTERPOLYATSION FORMULASI VA AYIRMALAR NISBATI YORDAMIDA INTERPOLYATSIYANI HISOBLASH.

Shovkatjonova N.J.

FarDU talabasi. shovkatjonovanozanin@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada interpolyatsiya masalalarini yechishda keng qo‘llaniladigan Nyuton interpolyatsion formulasi va ayirmalar nisbati (bo‘lingan ayirmalar) usuli bayon etiladi. Berilgan diskret nuqtalar to‘plami asosida funksiyaning taxminiy qiymatini topish jarayoni ko‘rib chiqiladi. Nyuton formulasi yordamida interpolyatsion ko‘phadni bosqichma-bosqich qurishning qulayligi va hisoblashdagi samaradorligi yoritiladi. Ayirmalar nisbati tushunchasi orqali interpolyatsion ko‘phad koeffitsiyentlarini aniqlash usullari tushuntiriladi. Ushbu mavzu sonli usullar va amaliy hisoblash masalalarida muhim ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar: Interpolyatsiya, Nyuton interpolyatsion formulasi, ayirmalar nisbati, bo‘lingan ayirmalar, interpolyatsion ko‘phad, sonli usullar, taqribiy hisoblash.

Kirish. Interpolyatsiya berilgan jadvaldagi nuqtalar asosida oraliqdagi noma’lum funksiyaning qiymatini taxminiy topish usuli.Masalan, funksiya qiymatlari faqat quyidagi nuqtalarda berilgan bo‘lsa:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$$

shu nuqtalar orqali o‘tuvchi interpolyatsion ko‘phad tuziladi.

Nyuton interpolyatsion formulasi.Nyuton usuli interpolyatsion ko‘phadni bosqichma-bosqich qurishga qulay bo‘lib, ayniqsa yangi nuqta qo‘shilganda juda foydali. Umumiy ko‘rinishi:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

bu yerda: $a_0, a_1, ..., a_n$ -ayirmalar nisbati (bo‘lingan ayirmalar) orqali topiladi.

Ayirmalar nisbati (bo‘lingan ayirmalar).Ayirmalar nisbati Nyuton formulasining asosiy qismi hisoblanadi.

1-darajali bo‘lingan ayirma:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

2-darajali bo‘lingan ayirma:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Umumiy holda:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f(x_1, ..., x_n) - f(x_0, ..., x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

Nyuton formulasidagi koeffitsiyentlar quyidagicha aniqlanadi:

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f(x_0, x_1)$$
$$a_2 = f(x_0, x_1, x_2)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = f(x_0, x_1, ..., x_n)$$

Hisoblash algoritmi (qadamlar)

1.Berilgan nuqtalar jadvalini yozish

2.Bo‘lingan ayirmalar jadvalini tuzish

3.Nyuton formulasiga koeffitsiyentlarni joylashtirish

4.Kerakli (x) qiymatda ko‘phadni hisoblash

Kichik misol.Berilgan: $x = 1, 2, 4$ funksiyalarning qiymatlari $f(x) = 2, 5, 17$

1-darajali ayirmalar:

$$f(1, 2) = \frac{5 - 2}{2 - 1} = 3$$
$$f(2, 4) = \frac{17 - 5}{4 - 2} = 6$$

2-darajali ayirma:

$$f(1, 2, 4) = \frac{6 - 3}{4 - 1} = 1$$

Nyuton ko‘phadi:

$$P_2(x) = 2 + 3(x - 1) + 1(x - 1)(x - 2)$$

- ✓ Hisoblash oson
- ✓ Yangi nuqta qo‘shilganda qayta hisoblash shart emas
- ✓ Kompyuterda hisoblashga juda qulay

Ko‘pincha hayotda:

- ✓ hamma qiymatlar o‘lchanmaydi,

- ✓ faqat ayrim nuqtalardagi ma’lumotlar bo‘ladi,
- ✓ oraliqdagi qiymatni taxminiy topish kerak bo‘ladi.
- ✓ shu yerda interpolyatsiya ishlatiladi.

Masala sharti. Avtomobilning ma’lum vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan yo‘li o‘lchangan:

Vaqt (x) (soat)	Yo‘l (s(x)) (km)
1	60
2	130
4	300

Savol: Avtomobil 3 soatda taxminan necha km yo‘l bosadi?

Bu qiymat jadvalda yo‘q, shuning uchun interpolyatsiya qilinadi.

1-qadam. Berilgan nuqtalarni belgilaymiz

$$x_0 = 1, s_0 = 60$$
$$x_1 = 2, s_1 = 130$$
$$x_2 = 4, s_2 = 300$$

2-qadam. Ayirmalar nisbatini hisoblaymiz.1-darajali bo‘lingan ayirmalar:

$$s[x_0, x_1] = \frac{130 - 60}{2 - 1} = 70$$
$$s[x_1, x_2] = \frac{300 - 130}{4 - 2} = 85$$

2-darajali bo‘lingan ayirma:

$$s[x_0, x_1, x_2] = \frac{85 - 70}{4 - 1} = 5$$

3-qadam. Nyuton interpolyatsion formulasini yozamiz.2-darajali Nyuton ko‘phadi:

$$P_2(x) = s_0 + s(x_1, x_0)(x - x_0) + s(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$

Qiymatlarni qo‘yamiz:

$$P_2(x) = 60 + 70(x - 1) + 5(x - 1)(x - 2)$$

4-qadam. $x = 3$ da hisoblaymiz

$$P_2(3) = 60 + 70(3 - 1) + 5(3 - 1)(3 - 2) = 210$$

Yakuniy javob:

$$s(3) \approx 210 km$$

Demak, avtomobil 3 soatda taxminan 210 km yo‘l bosgan.

Hayotiy ma’nosi:

- Har bir soatda yo‘lni o‘lchash qiyin bo‘lishi mumkin
- Lekin mavjud ma’lumotlar asosida aniq taxmin qilish mumkin
- Shu sababli Nyuton interpolyatsiyasi:

- transportda,
- fizika va muhandislikda,
- iqtisodiy hisoblarda keng ishlatiladi

Xulosa: Ayirmalar nisbati yordamida interpolyatsiyani hisoblash usuli real hayotda tez-tez uchraydigan, barcha qiymatlarni to‘liq o‘lchash imkoni bo‘lmagan holatlarda muhim ahamiyatga ega. Bu usul berilgan ayrim nuqtalardagi ma’lumotlar asosida oraliq qiymatlarni aniqlash imkonini beradi.Ayirmalar nisbati funksiyaning qiymatlari orasidagi o‘zgarish tezligini ifodalaydi va interpolyatsion ko‘phad tuzishda asosiy rol o‘ynaydi. Ushbu usul yordamida tuzilgan Nyuton interpolyatsion formulasi hisoblash jihatidan qulay bo‘lib, yangi ma’lumotlar qo‘shilganda ko‘phadni qayta tuzmasdan davom ettirish imkonini beradi.Mazkur usul transportda yo‘l va tezlikni aniqlashda, energetikada sarfni hisoblashda, tibbiyotda dori ta’sirini baholashda, meteorologiyada ob-havo ko‘rsatkichlarini taxminlashda hamda iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Shunday qilib, ayirmalar nisbati yordamida interpolyatsiya nafaqat matematik nazariya, balki amaliy masalalarni yechishda ham samarali vosita hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Burden R. L., Faires J. D. Numerical Analysis. Cengage Learning, 2011.*
2. *Atkinson K. E. An Introduction to Numerical Analysis. Wiley, 1989.*
3. *Chapra S. C., Canale R. P. Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill, 2015.*
4. *Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. Springer, 2007.*
5. *Conte S. D., de Boor C. Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach. McGraw-Hill, 1980.*

MA`LUMOTLAMI KIRITISH UCHUN SHAKLLAR YARATISH.

Tojimamatov I.N[1]. Shovkatjonova N.J[2].

[1]*FarDU katta o‘qituvchisi, israiltojimamatov@gmail.com*

[2]*FarDU talabasi shovkatjonovanozanin@gmail.com*

Annotatsiya: Mazkur maqolada ma’lumotlarni kiritish uchun shakllar (formularlar) yaratish jarayoni, ularning axborot tizimlaridagi o‘rni hamda shakl yaratishda “Master” (Shakl yaratish ustasi) vositasidan foydalanish prinsiplari yoritiladi. Shakllar ma’lumotlarni tez, aniq va tartibli kiritishni ta’minlab, foydalanuvchining tizim bilan muloqotini osonlashtiradi.

Kalit so‘zlar: Shakl, forma, ma’lumot kiritish, “Master”, forma konstruktori, axborot tizimi, UI, interfeys, elektron hujjat, ma’lumotlar bazasi, forma dizayni.

Kirish. Raqamli axborot tizimlarida ma’lumotlarni to‘g‘ri, tez va qulay kiritish eng muhim jarayonlardan biridir. Ko‘plab dasturlarda, jumladan, Microsoft Access, Google Forms, elektron tizimlar va boshqa platformalarda shakllar (formularlar) ma’lumotlarni tartibli ko‘rinishda qabul qilishga xizmat qiladi. Foydalanuvchi bevosita ma’lumotlar bazasi bilan ishlamasdan, shakl orqali kerakli ma’lumotni kiritadi, tahrirlaydi yoki ko‘rib chiqadi.

Ma’lumot kiritish shakllarining ahamiyati: Shakllar dastur va foydalanuvchi o‘rtasidagi asosiy bog‘lovchi interfeys bo‘lib quyidagi afzalliklarga ega:

- ma’lumotlarni aniq va tartibli qabul qiladi
- noto‘g‘ri yoki ortiqcha ma’lumot kiritilishining oldini oladi
- ma’lumotlar bazasi bilan ishlashni soddalashtiradi
- foydalanuvchi uchun qulay ko‘rinish yaratadi
- jarayonlarni avtomatlashtirish imkonini beradi

Shakl yaratish bosqichlari:Shakl yaratish odatda quyidagi bosqichlardan iborat:

Shakl yaratish bosqichlari	
Shakl maqsadini aniqlash	foydalanuvchi nimani kiritadi va shakl qaysi jadvalga ulanadi.
Kerakli maydonlarni tanlash	jadval ustunlaridan qaysi biri shaklda aks etishi.
Interfeysni loyihalash	maydonlarni joylashtirish, tartib, rang, shrift va boshqalar.

Tekshirish qoidalarini o‘rnatish	noto‘g‘ri ma’lumot kiritishni cheklash.
Sinovdan o‘tkazish	shaklning to‘g‘ri ishlashini tekshirish.

Foydalanuvchilar uchun SQL tilidagi dasturlarni ko‘rib chiqamiz:

```
CREATE TABLE foydalanuvchilar (
    id INT PRIMARY KEY AUTO_INCREMENT,
    ism VARCHAR(50),
    familiya VARCHAR(50),
    email VARCHAR(100),
    telefon VARCHAR(20)
);
```

Ma'lumot kiritish uchun quyidagi kod ishlatiladi:

```
INSERT INTO foydalanuvchilar (ism, familiya, email, telefon)
VALUES ('Ali', 'Valiyev', 'ali@example.com', '+998901234567');
```

Buyurtmalar jadvali va unga ma'lumot kiritish:

```
CREATE TABLE buyurtmalar (
    buyurtma_id INT PRIMARY KEY AUTO_INCREMENT,
    mijoz_ismi VARCHAR(100),
    mahsulot VARCHAR(100),
    miqdor INT,
    narx DECIMAL(10,2),
    buyurtma_sanasi DATE
);

INSERT INTO buyurtmalar (mijoz_ismi, mahsulot, miqdor, narx, buyurtma_sanasi) VALUES
('Rustam', 'Laptop', 1, 3500.00, '2025-12-20'),
('Mavluda', 'Telefon', 2, 1200.50, '2025-12-21');
```

Xulosa: Ma’lumotlarni kiritish shakllari axborot tizimlarining ajralmas qismi bo‘lib, ular tizimda ma’lumotlarni boshqarish va qayta ishlashni soddalashtiradi. “Master” yordamida shakl yaratish usuli esa jarayonni avtomatlashtirib, tez va samarali natija beradi. Shakllarni to‘g‘ri loyihalash foydalanuvchi tajribasini yaxshilaydi, ma’lumotlar sifatini oshiradi va tizimning ishonchliligini ta’minlaydi. Shuning uchun shakl yaratishda aniqlik, qulaylik va funksionallik asosiy tamoyil bo‘lishi zarur.Shakl yaratishdagi SQL tilidagi kodlar juda tushunarli va sodda,shuning uchun juda qulay dastur ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Microsoft Corporation. Microsoft Access User Guide. — Microsoft Documentation, 2020–2024.*

2. Rob, P., Coronel, C. Database Systems: Design, Implementation, and Management. — Boston: Cengage Learning, 2019.
3. Pratt, P., Adamski, J. Concepts of Database Management. — Cengage, 2021.
4. Connolly, T., Begg, C. Database Systems: A Practical Approach to Design, Implementation and Management. — Pearson Education, 2015.
5. Литвиненко, В. Информационные системы и базы данных. — Москва: Академия, 2020.
6. Хальтбеков, А., Қодиров, Ж. Axborot tizimlari va texnologiyalari. — Toshkent: O‘qituvchi, 2019.
7. Комягин, В. Microsoft Access: практическое пособие для пользователей. — Санкт-Петербург: Питер, 2018.
8. Gane, C., Sarson, T. Structured Systems Analysis. — IST Publications.
9. Nielsen, J. Usability Engineering. — Morgan Kaufmann, 2012.
10. O‘zbekiston Respublikasi Axborot texnologiyalari bo‘yicha o‘quv qo‘llanmalar (Turli nashrlar, 2015–2023).

LU– AJRATISH (DEKOMPOZITSIYA) USULI YORDAMIDA CHIZIQLI SISTEMALARNI SAMARALI YECHISH

Xafizova M.R.

FarDU talabasi, muhlisaxafizova97@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada chiziqli tenglamalar sistemalarini LU-ajratish usuli yordamida yechish masalasi yoritilgan. Chiziqli sistemalar nazariy va amaliy masalalarni hal qilishda muhim ahamiyatga ega. Ishda chiziqli sistemalarni yechish usullari, matritsaning xos son va xos vektori, hamda LU-ajratish usulining mohiyati va samaradorligi qisqacha bayon etilgan. Tadqiqot obyekti chiziqli tenglamalar sistemasi bo‘lib, kurs ishida ularni LU-ajratish usuli bilan yechish amaliy tarzda ko‘rsatib berilgan.

Kalit so‘zlar: LU – ajratish usuli, dekompozitsiya, chiziqli sistema, chiziqli sistemalarni samarali yechish, yuqori uchburchak, quyi uchburchak, matritsa, matritsa dioganali.

Kirish. Hozirgi zamon matematika va amaliy fanlarning ko‘plab sohalarida chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish muhim ahamiyat kasb etadi. Fizika, mexanika, iqtisodiyot, axborot texnologiyalari, muhandislik hisoblari va boshqa ko‘plab yo‘nalishlarda real jarayonlarni modellashtirish aynan chiziqli sistemalar orqali amalga oshiriladi. Shu sababli bunday sistemalarni tez, aniq va samarali yechish usullarini ishlab chiqish va o‘rganish dolzarb masalalardan biri hisoblanadi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun turli xil klassik va zamonaviy usullar mavjud bo‘lib, ularning har biri ma’lum shartlarda samarali natija beradi. Katta o‘lchamli sistemalar bilan ishlashda oddiy usullar ko‘p vaqt va hisoblash resurslarini talab qiladi. Shunday sharoitda matritsalarni ajratish (dekompozitsiya) usullariga asoslangan algoritmlar muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. LU – ajratish (dekompozitsiya) usuli chiziqli sistemalarni yechishning eng samarali va qulay usullaridan biri bo‘lib, u berilgan matritsani quyi uchburchak va yuqori uchburchak matritsalar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalashga asoslanadi. Ushbu usul yordamida hisoblash jarayoni soddalashadi, hisoblash aniqligi oshadi hamda kompyuter yordamida yechish jarayoni ancha tezlashadi. Mazkur maqolada LU – ajratish usulining nazariy asoslari, uning chiziqli tenglamalar sistemasini yechishdagi ahamiyati hamda ushbu usul yordamida masalalarni samarali yechish imkoniyatlari

yoritib beriladi. Shuningdek, usulning afzalliklari va amaliy qo‘llanilishi misollar orqali ko‘rsatib o‘tiladi.

Asosiy qism LU–ajratish (quyi va yuqori uchburchak faktorizatsiya) usuli – bu matematikani va sonli usullarni qo‘llashda matritsani pastki uchburchak (L) va yuqori uchburchak (U) matritsalar ko‘paytmasiga ajratishni nazarda tutadi. Boshqacha aytganda, kvadrat matritsa singari A matrisa L va U matritsalarining o‘zaro ko‘paytmasi tarzida ifodalanadi:

$$A = LU$$

L va U dagi nol strukturalari tufayli bu ajratish Gauss eliminatsiyasining umumiy ko‘rinishi hisoblanadi. Algoritmik jihatdan LU ajratish – aslida Gauss eliminatsiyasi bosqichlarini matritsa shaklida tartibga solishdir. LU ajratish usuli odatda chiziqli tenglamalar sistemasi $Ax = b$ ni yechish uchun ishlatiladi. Amaliy hisoblashlarda katta o‘lchamli tenglamalar sistemalari (muhandislik, fizikada diskretizatsiya qilingan tenglamalar va boshqa ilmiy modellarda) paydo bo‘ladi va ularni yechishda LU faktorizatsiyasi samarali usuldir. Bundan tashqari, LU ajratilgan L va U matritsalaridan yordamida matritsaning determinanti va teskari (inver) matritsasi hisoblash ham soddalashtiriladi. Masalan, determinanti det(A) ni aniqlashda L va U ning diagonal elementlari ko‘paytmasi olinadi, chunki triyangulyar matritsaning determinantlari diagonallar ko‘paytmasiga teng. LUP transformatsiya (pivotli LU): Matritsaning ba’zi koeffitsientlari nol yoki kichik bo‘lganda, to‘g‘ri ishlashni ta’minlash uchun satr (yoki ustun)larni almashtirish tavsiya qilinadi. Bunda tartib matritsasi P joriy etiladi va A matritsasi shunday satr almashinuvdan o‘tadi: $PA = LU$ yoki analogik holda $A = P \wedge TLU . P$ matritsasi obyektlari – permutatsiya matritsasi bo‘lib, u satrlarni qayta tartibga soladi. Misol uchun, Doolittle algoritmida (L ning diagonali birliklardan iborat bo‘ladi) $PA=LU$ ko‘rinishida ajratish olib boriladi. Pivotlash muammoli bo‘luvchi yechimlar yoki noaniq (nolga yaqin) diagonal elementlar paydo bo‘lishining oldini oladi, natijada algoritm barqaror ishlaydi. Shu tarzda, LU faktorizatsiyasi chiziqli tizimni yechishda katta samaradorlikka ega usul sanaladi.

LU ajratish algoritmi ikki bosqichga bo‘linadi: faktorizatsiya va yechim topish. Faktorizatsiya bosqichida kiruvchi A matritsasi L va U ga ajratiladi; yechim bosqichida esa hosil bo‘lgan L va U dan foydalangan holda $Ax = b$ tenglamasi oldinga va orqaga almashtirish yordamida yechiladi.

Boshlang‘ich pivotlash (qarash): Agar kerak bo‘lsa, birinchi qadamda satrlar orasidan nolga teng yoki kichik ustun elementini topmaslik uchun pivot tanlanadi. Ya’ni, A matritsasining birinchi ustuni bo‘yicha eng katta moduldagi elementning joylashuvi aniqlanib, unga mos satr matritsaning yuqori qatoriga almashtiriladi. P permutatsiya matritsasi shu satr almashtiruvni bildiradi. Pivotlash LUP dekompozitsiyaga ega bo‘lib, satrlarni almashtirgan holda $P\ A\ =\ L\ U$ tenglamasi olinadi. Ushbu bosqich raqamli stabillikni ta’minlab, nolga bo‘lish xatoliklarini kamaytiradi.

L va U elementlarini hisoblash: Faktorizatsiyaning asosiy qismi – L va U ning elementlarini rekursiv formulalar orqali hisoblash. Doolittle metodida L ning diagonal elementlari 1 deb olinadi. Matritsaning i-chi qator, j-chi ustunidagi element a_{ij} bo‘lsin. Agar i≤j bo‘lsa, yuqori uchburchak matritsa U ning (i,j) elementi quyidagicha olinadi:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

Agar i>j bo‘lsa, pastki uchburchak L matritsasining (i,j) elementi quyidagicha:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{ij}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right)$$

Bu munosabatlar bo‘yicha ustun ustuniga (yoki qator qatoriga) iterativ holda U ning bir ustun elementlari, keyin L ning bir ustun multiplikatorlari aniqlanadi. Dastur nuqtai nazaridan, L va U ni quyidagicha yasalash mumkin:

```
For k in 1..n:
  L[k,k] = 1
  For j=k..n: U[k,j] = A[k,j] - sum_{i=1 to k-1}(L[k,i]*U[i,j])
  For i=k+1..n: L[i,k] = (A[i,k] - sum_{j=1 to k-1}(L[i,j]*U[j,k])) / U[k,k]
```

Ushbu qadamda L matritsasining diagonali 1 lar bilan to‘ldiriladi va har bosqichda A matritsasining tegishli satri/yig‘indisi yangilanib boradi (Shur qoldiqi), natijada pastga qarab L, chapga qarab U to‘ladi. L va U ga bo‘linish yakunida $A = L\ U$ yoki $PA = LU$ ifodasi bajarilgan bo‘ladi. Oldinga va orqaga almashtirish: Faktorizatsiya tugagach, chiziqli $Ax=b$ tizimi yechishga tayyor bo‘ladi. Agar P permutatsiya ishlatilgan bo‘lsa, ekranning chap tomoniga P kursatilgan b vektori olinadi: Pb. Avval $L\ y = P\ b$ tenglama sistemasini yechamiz (oldinga almashtirish), so‘ng $U\ x = y$ tenglamasini yechamiz (orqaga almashtirish). Triyangular matritsalar bo‘lgani uchun bu yechimlarni yuqoridan pastga va pastdan yuqoriga bo‘lgan oddiy almashtirish bilan hisoblash mumkin. Buning natijasida kerakli x yechim vektori topiladi. Xulosa qilib aytganda, faktorizatsiyadan so‘ng tenglamani yechish ikki qadamda bajariladi:

1. Oldinga almashtirish: $Ly = Pb$ ni yechib y topish.
2. Orqaga almashtirish: $Ux = y$ ni yechib x topish.

Shu tarzda avval L va U matritsalari yordamida yechim bosqichlab olinadi.

LU ajratish usulining bir nechta sezilarli afzalliklari mavjud:

Natijaviylik va takrorlanish: Matritsa A ning LU faktoriga bir martalik ajratilishi $O(n^3)$ hisoblash operatsiyalarini talab qiladi (ya’ni kubik murakkablik). Biroq, undan keyin har safar turlicha b vektori uchun yechim topish $O(n^2)$ murakkablikda, ya’ni oldinga va orqaga almashtirish bilan bajariladi. Bu shuni anglatadiki, bir marta LU faktorizatsiyasi olinganidan keyin turli b qiymatlariga ega tenglamalar sistemalarini yechish juda tez kechadi. Masalan, bir xil A matritsasiga ega bo‘lib, bir nechta o‘zgargan b vektorlari bilan yechim izlash lozim bo‘lsa, LU usuli takror-takror Gauss eliminatsiyasini qayta bajarishdan ancha tezroq ishlaydi.

Barqarorlik (stabil): Pivotlash mexanizmi tufayli, ya’ni P matritsasi orqali ketma-ket satr almashtirishlar yordamida algoritm sonli xatoliklarni kamaytirishga harakat qiladi. Bu LUP usulini oddiy LU ga nisbatan barqarorroq qiladi, chunki

nolga yaqin diagonallar oldindan aniqlab olinib, katta element bilan almashtiriladi. Shuning uchun murakkab yoki katta hisoblarda raqamiy stabillik o‘zini ko‘rsatadi.

Amaliy qo‘llanishdagi qulaylik: Hosil qilingan L va U matritsalaridan foizlik hisoblashda foydalanish oson. Masalan, matritsaning determinanti oddiygina L va U ning diagonal elementlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi (pivot bosqichlari e’tiborda olingan holda). Shuningdek, agar kerak bo‘lsa, L va U dan foydalangan holda A^{-1} ni topish ham mumkin: A^{-1} har bir birlik vektorini yechish orqali ustunma-ustun topiladi A^{-1} ustunlarini hisoblash uchun bir nechta $Ax = e_i$ tenglamalarini yechish kifoya).

Effektivlik: Amaliy hisoblashlarda LU usuli QR yoki boshqa dekompozitsiyalarga nisbatan tezroq hisoblanadi. Masalan, matritsa o‘lchami n bo‘lsa, LU faktorizatsiyasi taxminan $\frac{2}{3}n^3$ amaliyotni talab qiladi, holbuki QR faktorizatsiyasi (Householder refleksiyalari bilan) $\frac{4}{3}n^3$ operatsiyalarni talab qiladi. Demak, asosiy hisoblash bosqichi jihatdan LU algoritmi o‘rtacha ikki barobar tezroq ishlaydi. Yuqoridagi omillar tufayli LU ajratish amaliy informatika va sonli usullar sohasida keng qo‘llaniladi, chunki u chiziqli tizimlarni yechishda aniq va samarali algoritmik imkoniyat beradi.

LU faktorizatsiyasi eng ko‘p chiziqli tenglamalar sistemasini yechish vazifasida qo‘llaniladi. Masalan, muhandislik hisoblarida FDM (Finite Difference Method) va FEM (Finite Element Method) kabi usullarda diskretizatsiya natijasida ko‘p o‘lchamli chiziqli tenglamalar sistemasini olishadi. Bu yerda LU yordamida matritsa A faktor qilib olinib, keyin x yechimi topiladi. Shuningdek, statistik va mashinada o‘rganish modellarida ham regressiya va optimalizatsiya masalalari chiziqli sistemaga olib keladi va ularni tezda yechish uchun ko‘pincha LU usuli qo‘llanadi.

Tizimga bir nechta o‘zgartirilgan o‘ng tomon vektorlarini qo‘llash zarur bo‘lsa (masalan, parametrlar bo‘yicha analiz yoki bir nechta yuk holatini tekshirish),

LU ajratish ayniqsa foydalidir. Chunki A ga bo‘lgan LU faktorizatsiyasi bir marta hisoblab olinganidan so‘ng, har bir o‘zgargan b uchun yangi faktorizatsiya qilinmay, faqat oldinga-orqaga almashtirish qilinadi. Shuning uchun katta ma’lumotlar to‘plami bilan ishlaydigan ilovalar uchun (masalan, elektr tarmog‘i tahlili, termo modellashtirish va hokazo) hisob-kitob samaradorligi oshadi.

LU usuli matritsani teskari o‘girish va determinant hisoblashda ham foydalidir. Masalan, $\det(A) = L$ ning diagonalidagi birliklardan iborat bo‘lganligi sababli faqat U ning diagonal ko‘paytmasiga teng (pivot soni eksponentni hisobga olib). Matritsaning inversi esa $Ax = I$ tenglamani A ni oddiygina LU ga ajratib, bir nechta x larni hisoblash orqali olinadi. Shu kabi, amaliy informatika va ilmiy hisoblashda LU ajratish model tahlilida va skriptlarda asosiy usullardan biri sifatida keng qo‘llaniladi.

Misol:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 31 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 6x_1 + 18x_2 + 3x_3 + 19x_4 = 33 \end{cases}$$

matritsa ko‘rinishiga keltiramiz:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 7 & 17 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 18 & 3 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ 1 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsani 2 ga ajratib olamiz, ya'ni:

L - pastki uchburchak (diagonali 1)

U - yuqori uchburchak

$$U=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\4&7&7&17\\-2&4&5&2\\6&18&3&19\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\0&1&5&7\\-2&4&5&2\\6&18&3&19\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{pmatrix}2&3&1&5\\0&1&5&7\\0&7&6&7\\6&18&3&19\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-3R_1}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\0&1&5&7\\0&7&6&7\\0&9&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-7R_2}\begin{pmatrix}2&3&1&5\\0&1&5&7\\0&0&-29&-42\\0&9&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-9R_2}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\0&1&5&7\\0&0&-29&-42\\0&0&-45&-59\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-\frac{45}{29}R_3}\begin{pmatrix}2&3&1&5\\0&1&5&7\\0&0&-29&-42\\0&0&0&\frac{179}{29}\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\0&1&5&7\\0&0&-29&-42\\0&0&0&\frac{179}{29}\end{pmatrix}.$$

Shu tartibda matritsaning dioganalini 1, yuqori uchburchakni esa 0 ga keltiramiz.

$$L=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\4&7&7&17\\-2&4&5&2\\6&18&3&19\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}2&3&1&5\\0&1&5&3\\-2&4&5&2\\6&18&3&19\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & \frac{45}{29} & 1 \end{pmatrix}.$$

Endi tenglamalar sistemasini L va U matritsalar yordamida yechib olamiz:

$$Ly=b,$$

$$Ux=y,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & \frac{45}{29} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ 1 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 1\cdot y_1+0\cdot y_2+0\cdot y_3+0\cdot y_4=10 \\ 2\cdot y_1+1\cdot y_2+0\cdot y_3+0\cdot y_4=31 \\ -1\cdot y_1+7\cdot y_2+1\cdot y_3+0\cdot y_4=1 \\ 3\cdot y_1+9\cdot y_2+\frac{45}{29}y_3+1\cdot y_4=33 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini yechib y_1, y_2, y_3, y_4 larni qiymatlarini topib olamiz.

$$y_1=10,$$

$$2\cdot 10+y_2=31\Rightarrow \quad y_2=11,$$

$$-1\cdot 10+7\cdot 11+1\cdot y_3=1\Rightarrow \quad y_3=-66,$$

$$3\cdot 10+9\cdot 11+\frac{45}{29}\cdot(-66)+y_4=33,$$

$$y_4 = \frac{186}{29} \quad y = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -66 \\ \frac{186}{29} \end{pmatrix}.$$

Endi $Ux = y$ formuladan x ni qiymatlarini topamiz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -29 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{179}{29} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -66 \\ \frac{186}{29} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -29 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{179}{29} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -66 \\ \frac{186}{29} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 11 \\ -29x_3 - 42x_4 = -66 \\ \frac{179}{29} x_4 = \frac{186}{29} \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini yechib quyidagi x_1, x_2, x_3, x_4 larning qiymatlarini topib olamiz.

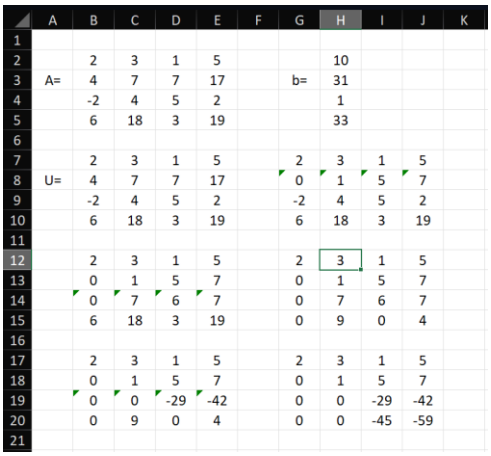
$$x_4 = \frac{186}{29} : \frac{179}{29} = \frac{186}{29} \cdot \frac{29}{179} = \frac{186}{179},$$

$$x_3 = \frac{-66 + 42 \cdot \frac{186}{179}}{-29} = \frac{138}{179},$$

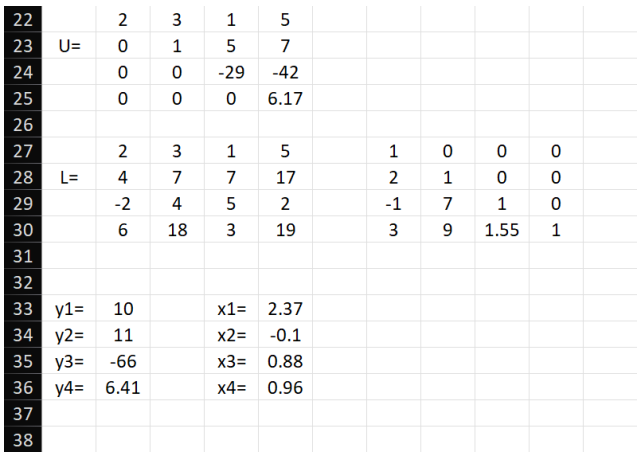
$$x_2 = 11 - 7 \cdot \frac{186}{179} - 5 \cdot \frac{138}{179} = -\frac{23}{179},$$

$$x_1 = \frac{10 - 5 \cdot \frac{186}{179} - \frac{138}{179} - 3 \cdot \left(-\frac{23}{179}\right)}{2} = \frac{791}{358}.$$

$$x = \left(\frac{791}{358}; -\frac{23}{179}; \frac{138}{179}; \frac{186}{179} \right).$$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2			2	3	1	5			10		
3		A=	4	7	7	17		b=	31		
4			-2	4	5	2			1		
5			6	18	3	19			33		
6											
7			2	3	1	5		2	3	1	5
8		U=	4	7	7	17		0	1	5	7
9			-2	4	5	2		-2	4	5	2
10			6	18	3	19		6	18	3	19
11											
12			2	3	1	5		2	3	1	5
13			0	1	5	7		0	1	5	7
14			0	7	6	7		0	7	6	7
15			6	18	3	19		0	9	0	4
16											
17			2	3	1	5		2	3	1	5
18			0	1	5	7		0	1	5	7
19			0	0	-29	-42		0	0	-29	-42
20			0	9	0	4		0	0	-45	-59
21											



22			2	3	1	5				
23		U=	0	1	5	7				
24			0	0	-29	-42				
25			0	0	0	6.17				
26										
27			2	3	1	5		1	0	0	0
28		L=	4	7	7	17		2	1	0	0
29			-2	4	5	2		-1	7	1	0
30			6	18	3	19		3	9	1.55	1
31											
32											
33		y1=	10		x1=	2.37					
34		y2=	11		x2=	-0.1					
35		y3=	-66		x3=	0.88					
36		y4=	6.41		x4=	0.96					
37											
38											

Xulosa

Mazkur maqolada chiziqli algebra masalalarini yechishda muhim hisoblangan LU-ajratish (dekompozitsiya) usulining nazariy asoslari va amaliy qo‘llanilishi batafsil ko‘rib chiqildi. Tadqiqot davomida chiziqli tenglamalar sistemasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri Gauss usuli bilan yechishga nisbatan LU-ajratishning hisoblash jihatidan samaraliroq ekani asoslab berildi. Xususan, bitta matritsa uchun bir nechta o‘ng tomonli vektorlar mavjud bo‘lganda, ushbu usul vaqt va resurs tejamkorligini ta’minlaydi. Keltirilgan misolda berilgan kvadrat matritsa A = LU ko‘rinishda pastki uchburchak (L) va yuqori uchburchak (U) matritsalarga ajratildi hamda masala Ly = b va Ux = y ketma-ket tizimlari orqali yechildi. Natijada yechimni oldinga va orqaga qo‘yish yordamida aniq topish mumkinligi ko‘rsatildi. Bundan tashqari, hisoblashlar Excel dasturida ham amalga oshirilib, analitik yechimlarning sonli usullar yordamida tasdiqlanishi amalda namoyon etildi. Shu bilan birga, LU-ajratish usulining determinantni hisoblash, teskari matritsani topish va katta o‘lchamli sistemalarni modellashtirishdagi ahamiyati ham yoritildi. Ushbu usul elektr tarmoqlari tahlili, issiqlik almashinuvi (termo modellashtirish), mexanik tizimlar va

boshqa muhandislik hamda amaliy informatika masalalarida keng qo‘llanilishi bilan ajralib turadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari, I. Toshkent, O‘qituvchi, 2000.
2. Boyzoqov A., Qayumov Sh. “Hisoblash matematikasi asoslari”. Toshkent 2000 yil.
3. Ismatullaev G‘.P., Jo‘raev G‘.U. Hisoblash usullaridan metodik qo‘llanma. Toshkent, Universitet. 2005.
4. Nazirov Sh.A., Musayev M.M., Nematov A.N., Qobulov R.V. “Delphi tilida dasturlash asoslari., Toshkent. “G‘.G‘ulom nashriyoti”. 2008 yil.
5. Qori-Niyoziy T.N. Tanlangan asarlar, Differinsial tenglamalar, Fan, Toshkent, 1968 y.
6. Salahiddinov M.S., Nasriddinov G.N. Oddiy differinsial tenglamalar, Toshkent, “O‘zbekiston”, 1994 y.

CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHNING ANIQ (TO‘LIQ ELIMINATSIYA) USULLARI VA ULARNING ALGORITMIK TAHLILI

Adhamova V.E.

FarDU talabasi, adhamovavasila@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning aniq usullari va ularning algoritmik xususiyatlari yoritilgan. Tadqiqotda Kramer, Gauss, teskari matritsa usullari hamda maxsus usullar — kvadrat ildizlar va haydash usullari nazariy-amaliy jihatdan tahlil qilinadi. Har bir usulning matematik asoslari, yechim shartlari, formulalari, algoritmlari va samaradorligi ko‘rib chiqilgan.

Kalit so‘zlar: chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, aniq usullar, Kramer formulalari, Gauss eliminatsiyasi, teskari matritsa, kvadrat ildizlar usuli, haydash usuli, algoritmik murakkablik.

Kirish. Zamonaviy jamiyatda ilm-fan, texnika va axborot texnologiyalarining jadal rivojlanishi matematik modellashtirishga asoslangan yechimlarni talab etmoqda. Ayniqsa, murakkab jarayonlarni matematik ifodalash va ularni samarali yechish masalalari dolzarb ahamiyat kasb etadi. Shu nuqtayi nazardan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari matematikaning eng muhim va keng qo‘llaniladigan bo‘limlaridan biri hisoblanadi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari orqali fizika va mexanikadagi kuchlar muvozanati, iqtisodiyotdagi resurslarni taqsimlash, elektr zanjirlarini tahlil qilish, issiqlik almashinuvi jarayonlari, injiniring masalalari hamda kompyuter grafikasi va sun’iy intellektdagi ko‘plab algoritmlar modellashtiriladi. Bunday keng qo‘llanish sohasi ushbu sistemalarni yechishning ishonchli va samarali usullarini chuqur o‘rganishni talab etadi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning ikki asosiy yondashuvi mavjud: aniq (to‘liq) usullar va taqribiy (iteratsion) usullar. Aniq usullar chekli sondagi arifmetik amallar orqali qat’iy yechim beradi va matematik jihatdan asoslangan bo‘ladi. Shu sababli ular nazariy tadqiqotlarda va kichik hamda o‘rta o‘lchamli masalalarda keng qo‘llaniladi.

Biroq zamonaviy hisoblash texnikasi sharoitida algoritmlarning faqatgina

to‘g‘riligigina emas, balki ularning hisoblash murakkabligi, vaqt sarfi, xotira resurslaridan foydalanishi va sonli barqarorligi ham muhim ahamiyatga ega. Shu sababli aniq usullarni algoritmik jihatdan tahlil qilish hisoblash matematikasining muhim vazifalaridan biri hisoblanadi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning aniq (to‘liq eliminatsiya) usullarini batafsil yoritish, ularning matematik asoslarini va formulalarini keltirish hamda algoritmik samaradorligini tahlil qilishdan iborat. Ushbu tadqiqot kurs ishida keltirilgan materiallarni ilmiy maqola shakliga keltirib, ularni kengaytirilgan va tizimli ko‘rinishda taqdim etishni ko‘zda tutadi.

Metodlar klassifikatsiyasi. Ma’lumki, ham tatbiqiy, ham nazariy matematikaning ko‘pgina masalarini hal qilishda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga to‘g‘ri keladi. Masalan, funksiyani interpolyatsiyalash yoki o‘rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirish masalalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilishning asosiy manbalaridan biri uzluksiz funksional tenglamalarni chekli-ayirmali tenglamalar sistemasi bilan yaqinlashtirishdir.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda foydalaniladigan metodlarni ikki guruhga ajratish mumkin: aniq va iteratsion metodlar.

Aniq metod deganda shunday metod tushuniladiki, uning yordamida chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning yechimi topiladi. Ko‘pincha, bu ikki bosqichdan iborat bo‘ladi. Birinchi bosqichda berilgan tenglamalar sistemasi u yoki bu ma’noda soddaroq tenglamalar sistemasiga almashtiriladi. Ikkinchi bosqichda almashtirilgan soddaroq tenglamalar sistemasi yechilib, noma’lumlarning qiymati aniqlanadi.

Iteratsion metodlar chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi ketma-ket yaqinlashishlarning limiti ko‘rinishida izohlanishi bilan xarakterlanadi.

Iteratsiya metodlarini qo‘llaganda faqat ularning yaqinlashishlarigina emas,

balki yaqinlashishlaming tezligi ham katta ahamiyatga ega.

Tadqiqot jarayonida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy ko‘rinishi

$$Ax = b$$

ko‘rib chiqildi. Bu yerda

A — $n \times n$ o‘lchamli asosiy matritsa, x — noma’lumlar ustun matritsasi, b — ozod hadlar ustun matritsasidir.

Tadqiqotda quyidagi aniq usullar ketma-ket o‘rganildi va tahlil qilindi:

Kramer usuli. Ikki noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

uchun asosiy determinant va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & a_{12} \\ B_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & B_1 \\ a_{21} & B_2 \end{vmatrix}$$

kiritilib, yechimlar Kramer formulalari orqali aniqlanadi:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Gauss usuli. Gauss eliminatsiyasi usulida

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

sistema ketma-ket elementar satr o‘zgartirishlar yordamida uchburchak ko‘rinishga keltiriladi. Natijada quyidagi ko‘rinishdagi sistema hosil qilinadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

So‘ngra orqaga hisoblash orqali noma’lumlar topiladi:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \; x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right)$$

Teskari matritsa usuli

Agar $\det|A| \neq 0$ bo‘lsa, sistemaning yechimi quyidagicha aniqlanadi:

$$x = A^{-1}b$$

Bu usulda asosiy masala teskari matritsani topishdan iborat bo‘lib, u ko‘pincha Gauss–Jordan algoritmi orqali amalga oshiriladi.

Kvadrat ildizlar usuli

Agar A simmetrik va musbat aniqlangan bo‘lsa, u holda

$$A = S^T \cdot S$$

ko‘rinishdagi ajratma mavjud bo‘ladi. Shundan so‘ng sistema

$$S^T \cdot y = \text{b}$$

$$S \cdot x = \text{y}$$

ko‘rinishida ketma-ket yechiladi.

Haydash usuli

Uch diagonalli

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2, \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3, \\ \vdots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1}, \\ a_nx_n + b_nx_n = d_n. \end{cases}$$

sistemalar uchun haydash koeffitsiyentlari yordamida rekurrent formulalar asosida yechim topiladi:

$$x_k = q_k - p_k x_{k+1}, k = n-1, n-2, ..., 1$$

Natijalar. Tahlil natijasida Kramer usuli kichik o‘lchamli sistemalar uchun qulay, Gauss usuli esa universal va amaliy jihatdan eng ko‘p qo‘llaniladigan usul ekanligi aniqlandi. Teskari matritsa usuli bir nechta sistemalarni ketma-ket yechishda samarali bo‘lsa-da, hisoblash murakkabligi yuqori ekanligi kuzatildi. Kvadrat ildizlar va haydash usullari esa maxsus strukturalangan sistemalar uchun juda yuqori samaradorlikka ega.

Namunaviy masalalar:

Tenglamalar sistemasining barcha mumkin bo‘lgan yechimlarini gauss usulida toping.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39 \end{cases} \quad (1)$$

Bu misolni yechish uchun noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotamiz. Yetakchi satr uchun birinchi tenglamani tanlasak bo‘ladi, chunki $a_{11}=2 \neq 0$.

Gauss usuli yordamida yechish uchun sistema koeffitsiyentlarini quyidagicha belgilaymiz:

$a_{11}=2$	$a_{12}=7$	$a_{13}=13$	$b_1=0$
$a_{21}=3$	$a_{22}=14$	$a_{23}=12$	$b_2=18$
$a_{31}=5$	$a_{32}=25$	$a_{33}=16$	$b_3=39$

Hisoblash jarayoni quyidagicha bo‘ladi. To‘g‘ri yo‘l

1. (1) dagi tenglamaning [1] satr koeffitsiyentlarini $a_{11}=2$ ga bo‘lamiz:

$$(1, a_{12}/a_{11}, a_{13}/a_{11}, b_1/a_{11}) = (1, 7/2, 13/2, 0/2) \quad (2)$$

2. (1) ning 2-tenglamasidagi x_1 ni yo‘qotish, ya’niy x_1 koeffitsiyentini nolga aylantirish uchun (2) ni $a_{21}=3$ ga ko‘paytirib, uni [2] satr elementlaridan mos ravishda ayiramiz, ya’ni [2] - (2) a_{21} :

$$\left.\begin{aligned} a^{(1)}_{21} &= a_{21} - a_{21} = 0 \\ a^{(1)}_{22} &= a_{22} - a_{21}a_{12}/a_{11} = 14 - 3(2/2) = 7/2 \\ a^{(1)}_{23} &= a_{23} - a_{21}a_{13}/a_{11} = 12 - 3(6/2) = -15/2 \\ b^{(1)}_{1} &= b_1 - a_{21}b_1/a_{11} = 18 - 3(0/2) = 18 \end{aligned}\right\}$$

Demak, 2- tenglama koeffitsiyentlari:

$$(0, 7/2, -15/2, 18) \quad (6)$$

3. (1) ning 3- tenglamasidagi x_1 ni yo‘qatish uchun (6) ni $a_{31}=5$ ga ko‘paytirib, [3] satrdan mos ravishda ayiramiz, ya’ni [3] –(6)a_{31} :

$$\left.\begin{aligned} a^{(1)}{}_{31} &= a_{31} - a_{31} = 0 \\ a^{(1)}{}_{32} &= a_{32} - a_{31}a_{12} / a_{11} = 25 - 5(7/2) = 15/2 \\ a^{(1)}{}_{33} &= a_{33} - a_{31}a_{13} / a_{11} = 16 - 5(6/2) = -33/2 \\ b^{(1)}{}_{3} &= b_3 - a_{31}b_1 / a_{11} = 39 - 5(0/2) = 39 \end{aligned}\right\}$$

Demak, 3- tenglama koeffitsiyentlari:

$$(0{,}15/2, -33/2, 39) \tag{3}$$

bo‘ladi.Natijada topilgan yangi koeffitsiyentlar asosida quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + (7/2)x_2 - (13/2)x_3 = 0 \\ (7/2)x_2 - (15/2)x_3 = 18 \\ (15/2)x_2 - (33/2)x_3 = 39 \end{cases} \tag{4}$$

bu sistemaning 2-tenglamasidan x_2 noma’lumni topib (3) - tenglamalaridan x_2 noma’lumni yo‘qotish uchun 2- tenglamani $a^{(1)}{}_{22} = 7/2$ ga bo‘lamiz. Bu tenglama koeffitsiyentlari:

$$(1, -15/7, 36/7) \tag{5}$$

bo‘ladi. Bu (5) koeffitsiyentlardan foydalanib (4) sistemaning 3-tenglamasidagi x_2 ni yo‘qotamiz. Buning uchun (5) ni 15/2ga ko‘paytirib 3-tenglama koeffitsiyentlardan mos ravishda ayirib quyidagi koeffitsiyentlar topamiz:

$$(0, -3/7, 3/7)$$

Natijada berilgan sistemani quyidagicha yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + (7/2)x_2 + (13/2)x_3 = 0 \\ x_2 - (15/7)x_3 = 36/7 \\ -(3/7)x_3 = 3/7 \end{cases}$$

Teskari yo‘l

Bu oxirgi sistemadagi 3- tenglamadan x_3 qiymatini topib bu asosida 2-tenglamadan x_2 ni topamiz. Topilgan x_2 va x_3 asosida 1-tenglamadan $x_1$ni topamiz:

$$x_3 = -1$$
$$x_2 = 36/7 + (15/7)(-1) = 21/7 = 3$$
$$x_1 = (-7/2)(3) - (13/2)(-1) = -8/2 = -4$$

Berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi:

$$x_1 = -4, x_2 = 3, x_3 = -1$$

Haydash usuliga misol

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini matritsa ko‘rinishida yozib olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bosh diagonaldan pastdagi elementlarni 0 ga aylantirish uchun birinchi satrga (-2) ni ko‘paytirib ikkinchi satrga qo‘shamiz. Keyin birinchi satrni (-1) ga ko‘paytirib uchinchi satrga qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} (-2)(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Bosh diaganaldan pastdagi elementlar hammasi 0 bo‘lishi kerak, buning uchun ikkinchi satrga $\left(\frac{1}{3}\right)$ ni ko‘paytirib, uchinchi satrga qo‘shish kerak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{3} & -5 \end{pmatrix}.$$

Endi bosh diaganal elementlarini 1 ga aylantiraylik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bosh diaganalda turgan elementlar ya’ni 1 raqamidan keyingi1-sonlar p_1 va p_2. koeffitsentni , ozod son sifatida qaraladiganlar esa q_1, q_2, q_3. koeffitsentlar deyiladi.Bizning misolimizdagi oxirgi metritsadan ko‘rinadiki :

$$p_1 = 1, p_2 = -\frac{1}{3}$$
$$q_1 = 6, q_2 = 1, q_3 = 3$$
$$x_n = q_n \Rightarrow x_3 = 3$$
$$x_k = q_k - p_k \cdot x_{k+1} \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 2$$
$$x_1 = q_1 - p_1 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_3 = 6 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$$

Javob: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

Xulosa. Mazkur maqolada chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning aniq (to‘liq eliminatsiya) usullari va ularning algoritmik xususiyatlari batafsil tahlil qilindi. Tadqiqot jarayonida kurs ishida ko‘rib chiqilgan asosiy aniq usullar — Kramer usuli, Gauss eliminatsiyasi, teskari matritsa usuli, shuningdek maxsus tuzilmali sistemalar uchun mo‘ljallangan kvadrat ildizlar va haydash usullari matematik hamda algoritmik nuqtai nazardan yoritildi.

O‘rganishlar shuni ko‘rsatdiki, Kramer usuli nazariy jihatdan sodda va tushunarli bo‘lsa-da, determinantlarni hisoblash murakkabligi sababli faqat kichik o‘lchamli sistemalar uchun samarali hisoblanadi. Gauss eliminatsiyasi usuli esa universalligi bilan ajralib turadi va turli o‘lchamdagi chiziqli sistemalarni yechishda keng qo‘llaniladi, biroq hisoblash jarayonida sonli barqarorlik masalalariga alohida e’tibor qaratish zarur.

Teskari matritsa usuli chiziqli sistemalarni yechishda ixcham matematik ifodani ta’minlaydi, ammo teskari matritsani aniqlash ko‘p arifmetik amallarni talab qilishi sababli amaliy hisoblashlarda cheklangan holda qo‘llaniladi. Kvadrat ildizlar usuli simmetrik va musbat aniqlangan matritsalar uchun yuqori samaradorlikka ega bo‘lib, hisoblash murakkabligini kamaytiradi va sonli barqarorligi bilan ajralib turadi. Haydash usuli esa uch diagonalli sistemalar uchun eng maqbul aniq usul bo‘lib, hisoblash murakkabligining chiziqli bo‘lishi bilan katta o‘lchamli

masalalarda samarali yechim beradi.

Umuman olganda, aniq usullardan foydalanishda masalaning o‘lchami, matritsaning tuzilmasi va hisoblash resurslari hal qiluvchi ahamiyatga ega ekanligi aniqlandi. Olingan natijalar chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda optimal usulni tanlashga ilmiy asos bo‘lib xizmat qiladi hamda hisoblash matematikasi, muhandislik va amaliy modellashtirish masalalarida samarali qo‘llanishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Axmadov, Sh., Aliyev, R. Chiziqli algebra va matritsalar nazariyasi, Toshkent: Fan va Texnologiya, 2015.

2. Islomov A. Matematika va hisoblash usullari, Toshkent: O‘zbekiston, 2018.

3. Mirzoev B. Numerik metodlar va differensial tenglamalar yechimlari, Toshkent: Ilm-fan, 2019.

4. Isroilov M.I. – “Hisoblash metodlari”. Toshkent, O‘qituvchi, 2003.

5. Khodjaev M. A. "Sonli usullar va algoritmlar". Toshkent, 2010.

6. Krilov V. I. "Sonli usullar". Moskva, 1986.

LAGRANJ VA NYUTON INTERPOLYATSION FORMULALARINING ANIQ MISOLLARDA TAQQOSLANISHI.

Ismoilov A.I[1]., Arabova F.A[2].

[1]*FarDU dotsenti, ismoilovaxrorjon@yandex.com.*

[2]*FarDU talabasi a07612720@gmail.com*

Anotatsiya: Ushbu maqolada algebraik interpolyatsiya masalasi, jumladan Lagranj va Nyuton interpolyatsion formulalarining nazariy asoslari hamda amaliy qo‘llanilishi tahlil qilinadi. Interpolyatsiya tugunlari va interpolatsiyalovchi ko‘phadlar haqida umumiy ma’lumotlar berilib, Lagranj ko‘phadining tuzilishi va kamchiliklari yoritiladi. Nyutonning bo‘lingan ayirmalar asosidagi formulasi keltirilib, uning hisoblashda qulay jihatlari ko‘rsatiladi. Sonli misol orqali har ikkala usul bilan ko‘phadlar qurilib taqqoslanadi va ular nazariy jihatdan ekvivalent ekanligi tasdiqlanadi.

Kalit so‘zlar: Interpolyatsiya, algebraik interpolyatsiya, Lagranj Interpol-yatsion ko‘phadi, Nyuton interpolyatsiyasi, bo‘lingan ayirmalar, interpolatsiya tugunlari, hisoblash matematikasi.

Kirish

Aksariyat hisoblash metodlari masalaning qo‘yilishida qatnashadigan funksiyalarni unga biror, muayyan ma’noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo‘lgan funksiyalarga almashtirish g‘oyasiga asoslangan. Dastlab interpolyatsiyalash deganda funksiyalarning qiymatlarini argumentning jadvalda berilmagan qiymatlari uchun topish tushunarli edi. Bu holda interpolyatsiyalashni “satrlar orasida o‘qiy bilish san’ati” deb ham tariflash mumkin. Hozirgi vaqtda interpolyatsiyalash tushunchasi juda keng ma’noda tushuniladi. Interpolyatsiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, [a,b] oraliqda $y = f(x)$ funksiya berilgan yoki hech bo‘lmaganda uning $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ qiymatlari ma’lum bo‘lsin. Shu oraliqda aniqlangan va hisoblash uchun qulay bo'lgan qandaydir funksiyalar $\{P(x)\}$ sinfini, masalan, ko‘phadlar sinfini olamiz. Berilgan $y = f(x)$ *funksiyani* [a,b] *oraliqda interpolyatsiyalash masalasi* shu funksiyani berilgan sinfning shunday $P(x)$ funksiyasi bilan taqribiy ravishda

$$f(x) \approx P(x)$$

almashtirishdan iboratki, $P(x)$ berilgan $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin:

$$P(x_i) \approx f(x_i) \quad (i = \overline{0,n}).$$

Bu yerda ko‘rsatilgan $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalar *interpolyatsiya tugunlari* yoki *tugunlar* deyiladi, $P(x)$ esa *interpolatsiyalovchi funksiya* deyiladi. Agar $\{P(x)\}$ sinfi sifatida darajali ko‘phadlar sinfi olinsa, u holda *interpolatsiyalash algebraik* yig‘indi deyiladi. Algebraik interpolyatsiyalash apparati hisoblash matematikasining ko‘p sohalarida qo‘llaniladi, chunonchi, differensiallash va integrallashda, transendant, differensial va integral tenglamalarni yechishda, funksiya ekstremumini topish hamda funksiya jadvalni tuzishda Teylor yoyilmasi klassik analizda qay darajada ahamiyatga ega bo‘lsa, algebraik interpolyatsiyalash ham hisoblash matematikasida shunday ahamiyatga egadir. Ayrim hollarda interpolyatsiyalashning boshqa ko‘rinishlarini qo‘llash maqsadiga muvofiqdir. Masalan, $f(x)$ davriy funksiya bo‘lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida trigonometrik funksiyalar sinfi olinadi; agar interpolyatsiyalanadigan funksiya berilgan nuqtalarda cheksizga aylanadigan bo‘lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida ratsional funksiyalar sinfini olish maquldir.

Biz asosan algebraik interpolyatsiyalash bilan shug‘ullanamiz. Masalaning qo‘yilishi quyidagichadir. Darajasi n dan yuqori bo‘lmagan shunday ko‘phad ko‘rilsinki, u berilgan $(n+1)$ ta $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalarda berilgan

$$f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu masalani geometrik ta’riflash ham mumkin: darajasi n dan oshmaydigan shunday $P(x)$ ko‘phad ko‘rilsinki, uning grafigi berilgan $(n+1)$ ta $M_k(x_k, f(x_k))$ $(k = \overline{0,n})$ nuqtalardan o‘tsin.

Demak, $c_m (m = \overline{0,n})$ koefitsientlarni shunday aniqlash kerakki,

$$P(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n \tag{1.1}$$

ko‘phad uchun ushbu

$$P(x_k) = f(x_k), \ k = 0,1,...,n \tag{1.2}$$

tengliklar bajarilsin. Bu tengliklarni ochib yozsak, $c_m (m=\overline{0,n})$ larga nisbatan $(n+1)$ noma'lumli $(n+1)$ ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + ... + c_n x_0^n = f(x_0), \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + ... + c_n x_1^n = f(x_1), \\ ..... \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + ... + c_n x_n^n = f(x_n). \end{cases} \quad (1.3)$$

Bu sistemaning determinant Vandermond determinantidir: $W(x_0, x_1, ..., x_n)$ masala mazmunidan ravshanki, x_k nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (1.3) sistema va shu bilan birga qo'yilgan interpolyatsiya masalasi yagona yechimga ega. Bu sistemani yechib, c_m larni topib (1.1) ga qo'ysa, $P(x)$ ko'phad aniqlanadi. Biz $P(x)$ning oshkor ko'rinishni topish uchun boshqacha yo'l tutamiz, avvalo fundamental ko'phadlar deb ataluvchi $Q_{nj}(x)$ larni, ya'ni

$$Q_{nj}(x_i) = \sigma_i^j = \begin{matrix} 0, i \neq j __ bo'lganda, \\ 1, i \neq j __ bo'lganda \end{matrix}$$

shartlarni qanoatlantiradigan $n-$ darajali ko'phadlarni ko'ramiz. U holda

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{nj}(x) \quad (1.4)$$

izlanayotgan interpolyatsion ko'phad bo'ladi. Haqiqatan ham, barcha $i = 0,1,2,...,n$ uchun

$$L_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{nj}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \sigma_i^j = f(x_i)$$

va ikkinchi tomondan $L_n(x)$ n- darajali ko'phaddir.

Endi $Q_{nj}(x)$ ning oshkor ko'rinishini topamiz, $j \neq i$ bo'lganda $Q_{nj}(x_i) = 0$ shuning uchun ham $Q_{nj}(x)$ ko'phad $j \neq i$ bo'lganda $x - x_i$ ga bo'linadi. Shunday qilib, n- darajali ko'phadning n ta bo'luvchilari bizga ma'lum bundan esa

$$Q_{nj}(x) = C \prod_{i \neq j} (x - x_i)$$

kelib chiqadi. Noma'lum ko'paytuvchi C ni esa

$$Q_{nj}(x_j) = C\prod_{i\neq j}(x_j - x_i) = 1$$

shartdan topamiz, natijada:

$$Q_{nj}(x) = \prod_{i\neq j}\frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Bu ifodani (1.4) ga qo‘yib, kerakli ko‘phadni aniqlaymiz:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\prod_{i\neq j}\frac{(x - x_1)}{(x_j - x_i)} \tag{1.5}$$

Bu ko‘phad *Lagranj interpolyatsion ko‘phadi* deyiladi.

Lagranj interpolyatsion ko‘phadining har bir hadi interpalyatsiya tugunlarining hammasiga bog‘liqdir. Agar yangi tugunlar kiritiladigan bo‘lsa, interpolyatsion ko‘phadini qaytadan qurishga to‘g‘ri keladi. Bu Lagranj interpolyatsion ko‘phadining kamchiligidir. Lagranj interpolyatsion ko‘phadini shunday tartibda yozish mumkinki, hosil bo‘lgan ko‘phadning ixtiyoriy i - hadi interpolyatsiya tugunlarining faqat avvalgi i tasiga va funksiyaning shu tugunlaridagi qiymatlariga bog‘liq bo‘ladi. Aytilganlarni bo‘lingan ayrimlar yordamida bajaramiz:

$$f(x) - L_n(x) = f(x) - \omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x - x_i)\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} =$$

$$= \omega_{n+1}(x)\left[\frac{f(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} + \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i - x)\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}\right]$$

Bu ifodani yuqoridagi paragrafdagi lemma bilan solishtirsak, kvadrat qavslar ichidagi ifoda $f(x_0, x_1, ..., x_n)$ ning aynan o‘zi ekanligi kelib chiqadi. Demak, biz

$$f(x) - L_n(x) = f(x, x_0, ..., x_n)\omega_{n+1}(x) \tag{1.6}$$

deb yozishimiz mumkin.

Endi $L_m(x)$ tugunlari $x_0, x_1, ..., x_m$ dan iborat bo‘lgan Lagranj interpolyatsion ko‘phadi bo‘lsin. U holda Lagranjning $L_n(x)$ interpolyatsion ko‘phadini

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + ... + [L_n(x) - L_{n-1}^{(x)}(x)] \quad (1.7)$$

ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Bu yerda $L_m(x) - L_{m-1}(x) x_0, x_1, ..., x_{m-1}$ nuqtalarda nolga aylanadigan m-darajali ko‘phad, chunki $L_m(x_j) = L_{m-1}(x_j) = f(x_j)$ $(j = \overline{0, m-1})$. Shuning uchun ham

$$L_m(x) - L_{m-1}(x_j) = A_m \omega_m(x), \quad \omega_m(x) = (x - x_0)...(x - x_{m-1}).$$

Bunda $x = x_m$ deb olsak,

$$f(x_m) - L_{m-1}(x) = A_m \omega_m(x_m)$$

ga ega bo‘lamiz. Ikkinchi tomondan (1.6) tenglikda $n = m - 1$ va $x = x_m$ deb olsak, u holda

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = f(x_m, x_0, ..., x_{m-1}) \omega_m(x_m).$$

Shunday qilib, $A_m = f(x_0, ..., x_m)$ va demak,

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = f(x_0, ..., x_m) \omega_m(x).$$

Bu miqdorlarni (5.2) tenglikka qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + ... + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)...(x - x_{n-1}). - (1.8)$$

Bu hosil bo‘lgan interpolyatsion *ko‘phad Nyutonning bo‘lingan ayirmali interpolyation ko‘phadi* deyiladi.

Misol: Berilgan nuqtalar:

(1,1), (2,4), (4,16)

Funksiya: $f(x) = x^2$

```
import numpy as np
import pandas as pd
# Lagrange interpolyatsiyasi
def lagrange_interpolation(x_points, y_points, x):
    n = len(x_points)
    P = 0.0
```

```
    for i in range(n):
        L = 1.0
        for j in range(n):
            if i != j:
                L *= (x - x_points[j]) / (x_points[i] - x_points[j])
        P += y_points[i] * L
    return P
# Nyuton interpolyatsiyasi
def newton_interpolation(x_points, y_points, x):
    n = len(x_points)
    coef = np.copy(y_points)
    for j in range(1, n):
        for i in range(n-1, j-1, -1):
            coef[i] = (coef[i] - coef[i-1]) / (x_points[i] - x_points[i-j])
    P = coef[-1]
    for i in range(n-2, -1, -1):
        P = P * (x - x_points[i]) + coef[i]
    return P
# Berilgan nuqtalar
x_points = np.array([1, 2, 4], dtype=float)
y_points = np.array([1, 4, 16], dtype=float)
# Jadval uchun x qiymatlar
x_values = np.array([1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4])
# Jadvalni to'ldirish
data = {
    "x": x_values,
    "Lagrange P(x)": [lagrange_interpolation(x_points, y_points, x) for x in
x_values],
    "Nyuton P(x)": [newton_interpolation(x_points, y_points, x) for x in x_values],
```

```
    "Aniq qiymat f(x)=x^2": x_values**2
}
table = pd.DataFrame(data)
print(table)
```

Natija jadvali:

x	Lagrange P(x)	Nyuton P(x)	Aniq qiymat
1.0	1.00	1.00	1.00
1.5	2.25	2.25	2.25
2.0	4.00	4.00	4.00
2.5	6.25	6.25	6.25
3.0	9.00	9.00	9.00
3.5	12.25	12.25	12.25
4.0	16.00	16.00	16.00

Xulosa

Maqolada Lagranj va Nyuton interpolyatsion formulalarining nazariy va amaliy jihatlari batafsil o‘rganildi. Keltirilgan misol orqali har ikkala usul yordamida qurilgan interpolyatsion ko‘phadlar bir xil natija berishi va berilgan nuqtalardan o‘tuvchi yagona ko‘phadni hosil qilishi ko‘rsatildi. Bu holat interpolyatsiya masalasining yechimi yagona ekanligini va Lagranj hamda Nyuton formulalarining o‘zaro ekvivalentligini tasdiqlaydi. Shu bilan birga, Lagranj interpolyatsiyasi formulaviy jihatdan sodda bo‘lsa-da, yangi tugunlar qo‘shilganda ko‘phadni qayta qurishni talab qiladi. Nyuton interpolyatsiyasi esa bo‘lingan ayirmalar asosida qurilgani sababli hisoblash jarayonida qulayroq bo‘lib, amaliy masalalarda, ayniqsa dasturlash va sonli hisoblashlarda samarali hisoblanadi. Olingan natijalar algebraik interpolyatsiyaning hisoblash matematikasidagi muhim o‘rnini yana bir bor tasdiqlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1- qism. -T.: O‘qituvchi, 2003 y. 231 b.

2. Oliy bukuv yurtlari talabalari uchun darslik. / M. Isroilov. —T.: Iqtisod-Moliya, 2008. —320 b.

3. Jumaniyozov, A. (2015). *Raqamli metodlar va matematik modelleme*. Toshkent: O‘qituvchi.

4. Tursunov, S. (2013). *Algebraik tenglamalarni yechish usullari*. Toshkent: Akademnashr.

5. Davlatov, M., & Umarov, I. (2017). *Transendent tenglamalar va ularning yechish usullari*. Toshkent: Fan va texnologiya.

6. Ismatullayev G.P., Koshergenova M.S. Hisoblash usullari. «Tafakkurbo‘stoni» Toshkent — 2014. 240 b.

7. Abdulhamidov A.U., Xudoynazarov S.X. Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari. Toshkent - «O‘zbekiston» 1995 y. 224 b.

8. Aloev R.D., Xudoyberganov M. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg‘ulotlari to‘plami. UzMU.O‘quv qo‘llanma. 2008 y.1 106.

SQL SERVEMING ODDIY INSTRUMENTAL VOSITALARI

Tojimamatov I.N. Habijonov B.B.

FarDU katta o'qituvchisi, israiltojimamatov@gmail.com.

FarDU talabasi, habibjonovbehruz0@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada Microsoft SQL Serverning oddiy va asosiy instrumental vositalari ko'rib chiqilgan. Ular ma'lumotlar bazasini yaratish, boshqarish va SQL so'rovlari yordamida ma'lumotlar bilan ishlash imkonini beradi. SSMS, SSDT, T-SQL, SQL Server Agent, SQL Server Profiler va Import/Export Wizard kabi vositalar tavsiflangan.

Kalit so'zlar: SQL Server, SSMS, SSDT, T-SQL, SQL Server Agent, Profiler, Import/Export Wizard.

Kirish. SQL Server nima? SQL Server (Structured Query Language Server) - bu Microsoft tomonidan ishlab chiqilgan moliyaviy ma'lumotlar bazasi management tizimi (DBMS). Bu tizim ma'lumotlarni saqlash, olish, o'zgartirish va o'chirish uchun mo'ljallangan. SQL Server ko'p qurilmalarda ishlay oladi va katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlash uchun mo'ljallangan.

SQL Server instrumental vositalari ? SQL Server ko'p turli instrumental vositalardan foydalanadi, ular quyidagilarni o'z ichiga oladi:

SQL Server Management Studio (SSMS): Bu - SQL Server bazalari bilan birlashish, ma'lumotlar bazasini boshqarish va so'rovlar yozish uchun ishlab chiqilgan grafik interfez. SSMS orqali bazalarni yaratish, o'zgartirish va o'chirish mumkin.

SQL Server Data Tools (SSDT): Bu - Visual Studio integrallashtirilgan muhiti ichida ma'lumotlar bazasi loyihalarini yaratish va boshqarish uchun ishlab chiqilgan orqali. SSDT orqali bazalarni dizayn qilish, so'rovlar yozish va bazalarni joylashtirish mumkin.

SQL Server Integration Services (SSIS): Bu - ma'lumotlar bazalari bilan ishlash uchun integrallashtirish vositasi. SSIS orqali ma'lumotlarni olib kelish, o'zgartirish va yuklash mumkin. Bu vosita ma'lumotlar bazalari orasida ma'lumotlarni integrallashtirish uchun foydalaniladi.

SQL Server Reporting Services (SSRS): Bu - ma'lumotlar bazalari bilan ishlash uchun hisob-kitob vositasi. SSRS orqali ma'lumotlar bazasidan ma'lumotlarni olib kelish va hisob-kitoblarni yaratish mumkin. Hisob-kitoblarni PDF, Excel va boshqa formatlarda saqlash mumkin.

SQL Server Analysis Services (SSAS): Bu - ma'lumotlar bazalari bilan ishlash uchun analitik vositasi. SSAS orqali ma'lumotlar bazasidan ma'lumotlarni olib kelish va analitik ma'lumotlar yaratish mumkin. Bu vosita ma'lumotlar bazalari bilan ishlash uchun foydalaniladi.

SQL Serverning foydalanishiga qo'shimcha narsalar SQL Server ko'p qurilmalarda ishlay oladi va katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlash uchun mo'ljallangan. SQL Server instrumental vositalari orqali ma'lumotlar bazalari bilan ishlashni osonlashtirish mumkin. SQL Server ko'p turli vositalardan foydalanadi, ular quyidagilarni o'z ichiga oladi: SQL Server Management Studio, SQL Server Data Tools, SQL Server Integration Services, SQL Server Reporting Services va SQL Server Analysis Services.

SQL Server bilan ishlash uchun asosiy yo'llarini o'rganishingiz mumkin. Quyidagi misollar SQL Server bilan ishlashning asosiy yo'llarini ko'rsatadi: ma'lumotlar bazasi yaratish, jadval yaratish, ma'lumotlarni qo'shish, ma'lumotlarni olish, ma'lumotlarni o'zgartirish va ma'lumotlarni o'chirish.

SQL Server instrumental vositalari orqali ma'lumotlar bazalari bilan ishlashni osonlashtirish mumkin. SQL Server ko'p turli vositalardan foydalanadi, ular

quyidagilarni o'z ichiga oladi: SQL Server Management Studio, SQL Server Data Tools, SQL Server Integration Services, SQL Server Reporting Services va SQL Server Analysis Services. SQL Server dasturiy vositalar boshqaruv, integratsiya, ko'chirish, hisobot berish va tahlil qilishda yordam beradigan turli xil funktsiyalarni taklif qiladi. SQL Server ma'lumotlarni malakali. Qayta tiklashning ilg'or yechimlaridan hisobot xizmatlari va ma'lumotlar integratsiya platformalarigacha, bu vositalar butun dunyo bo'ylab biznes uchun mustahkam va kengaytiriladigan variantlarni taqdim etadi. Vaqt o'tishi bilan ushbu vositalar ma'lumotlarga asoslangan sanoatning ajralmas qismiga aylandi va ularga o'z ma'lumotlarini innovatsion usullarda ishlatish imkoniyatini berdi.

Xulosa. Umuman olganda, bu oddiy ko‘rinishdagi vositalar aslida juda kuchli: ular foydalanuvchiga nafaqat texnik imkoniyatlarni, balki ma’lumotlar bilan ishlash jarayonining “sirli” va samarali tomonlarini ochib beradi. Shu vositalarni bilish va qo‘llay olish har bir foydalanuvchining SQL Server bilan ishlash tajribasini o‘zgartiradi va uni yanada qiziqarli qiladi. SQL Serverning oddiy vositalari dastlab oddiy ko‘rinishi bilan foydalanuvchiga murakkab tizimni boshqarish imkonini beradi. SSMS bilan ishlashda siz “grafik” dunyoga kirib, jadvallarni yaratish va ma’lumotlarni boshqarish jarayonini qo‘lda his qilasiz. T-SQL esa xuddi kod bilan suhbatlashgandek – har bir so‘rov sizning ma’lumotlar bilan bog‘lanishingizni osonlashtiradi. SQL Server Agent va Profiler sizni tizimning “orqa sahnasi” bilan tanishtiradi, qayerda nima sodir bo‘layotganini kuzatishga yordam beradi. Import/Export Wizard esa ma’lumotlarni boshqa formatlar bilan “muloqot” qilish imkonini beradi.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR:

1. Itchie, J., Lewis, J., & Elam, G. (2003). Designing and Selecting Samples for Business Intelligence Research. Sage Publications.

2. Cahill, J. (2019). The BI Analyst’s Handbook. Independently published.

3. Tojimamatov, I. N., Topvoldiyeva, H., Karimova, N., & Inomova, G. (2023). GRAFIK MA'LUMOTLAR BAZASI. Евразийский журнал технологий и инноваций, 1(4), 75-84.

4. Nurmamatovich T. I., Azizjon o'gli. A. Z. (2024). The SQL server language and its structure. American Journal of Open University Education, 1(1), 11- 15.

5. Nurmamatovich, T. I. (2024). MY SQL MISOLIDA LOYIHA YARATISH. Ta'limda raqamli texnologiyalarni tadbiq etishning zamonaviy tendensiyalari va rivojlanish omillari, 31(2), 82-90.

6. Ro'zimatov J. I., Nurmamatovich, T. I. (2024). SQL tili tarixi, vazifasi, turlari va rejimlari.

7. Nurmamatovich T.I. (2024). NORMALLASHTIRISH. NORMAL FORMALAR. worldly knowledge conferens, 7(2), 597-599.

8. Isroil, T. (2023). NOSQL MA'LUMOTLAR BAZASI: TANQIDIY TAHLIL VA TAQQOSLASH. IJODKOR O'QITUVCHI, 3(28), 134-146.

VARIATSION PRINSIPLAR ASOSIDA INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISHNING SONLI TAHLILI

Madaminova K.B.

FarDU talabasi, kibriyoxonastonaqulova@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada variatsion prinsiplar asosida integral tenglamalarni sonli yechish masalasi tahlil qilingan. Integral tenglamalarni operator ko‘rinishda ifodalash, ularni variatsion masalaga keltirish va mos funksional qurish jarayoni bayon etilib, simmetrik hamda musbat aniqlangan operatorlar uchun Hilbert fazodagi nazariy xossalar yoritilgan. Rits va Galerkin usullarining asoslari, yaqinlashuv hamda xatolik tahlili keltirilib, misol orqali Galerkin usulining amaliy qo‘llanilishi ko‘rsatilgan. Natijalar variatsion usullar integral tenglamalarni yechishda barqaror va yuqori aniqlikka ega ekanligini tasdiqlaydi.

Kalit so‘zlar: integral tenglama, Fredgolm integral tenglamasi, variatsion prinsip, funksional analiz, Hilbert fazosi, Rits usuli, Galerkin usuli, sonli yechim, yaqinlashuv, xatolik tahlili.

Integral tenglamalar zamonaviy matematika va amaliy fanlarning muhim bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Ular matematik fizika, elastiklik nazariyasi, issiqlik o‘tkazuvchanlik, elektromagnit maydonlar, aerodinamika hamda kvant mexanikasi masalalarida keng qo‘llaniladi. Ko‘plab real jarayonlarni modellashtirish jarayonida differensial tenglamalar integral tenglamalarga keltiriladi yoki bevosita integral ko‘rinishda ifodalanadi.

Aksariyat integral tenglamalar uchun analitik yechimlarni topish imkoni mavjud emas. Shu sababli ularni yechishda sonli usullar muhim ahamiyat kasb etadi. Sonli usullar ichida variatsion prinsiplarga asoslangan yondashuvlar alohida o‘rin tutadi, chunki bu usullar yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligini nazariy jihatdan asoslash imkonini beradi.

Variatsion prinsiplarning mohiyati shundan iboratki, integral tenglamani yechish masalasi ma’lum bir funksionalni ekstremumga keltirish masalasiga ekvivalent qilib olinadi. Bu esa masalani funksional analiz, operatorlar nazariyasi va Hilbert fazolari doirasida o‘rganish imkonini beradi. Ushbu maqolada variatsion prinsiplar asosida integral tenglamalarni yechishning sonli tahlili, xususan Rits va Galerkin usullarining nazariy asoslari keng yoritiladi.

Ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasini ko‘rib chiqamiz:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x), \text{a э } [a,b]$$

Bu tenglamani operator ko‘rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$I(1 - \lambda A)u = f$$

bu yerda A - integral operator:

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x,\text{t})\,\text{u(t)}\,\text{dt}$$

Agar yadro $K(x,\text{t})$ simmetrik bo‘lsa, ya’ni $K(x,\text{t}) = K(\text{t},\text{x})$, u holda operator A o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘ladi va Hilbert fazoda qulay xossalarga ega bo‘ladi.

Variatsion prinsip va funksional qurilishi. Agar operator musbat aniqlangan bo‘lsa, integral tenglama quyidagi funksionalni minimallashtirish masalasiga ekvivalent bo‘ladi:

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle u, \text{v}\rangle - \frac{\lambda}{2}\langle Au, \text{v}\rangle - \langle f, u\rangle$$

bu yerda skalyar ko‘paytma:

$$\langle u, \text{v}\rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx$$

Funksionalning birinchi variatsiyasini nolga tenglashtirish sharti:

$$\delta J(u) = 0$$

Eyler–Lagrange tenglamasiga olib keladi va u boshlang‘ich integral tenglamaga ekvivalent bo‘ladi. Shu tariqa integral tenglama variatsion masala sifatida qaraladi.

Rits usulining sonli modeli. Rits usulida noma’lum funksiya cheklangan o‘lchamli fazoda approksimatsiya qilinadi:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

Bu ifodani funksionalga qo‘yib, minimallashtirish shartini bajaramiz:

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_i} = 0, i = 1,2,...,n$$

Natijada quyidagi algebraik tenglamalar sistemasiga kelinadi:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx - \lambda\int_a^b\int_a^b K(x,t)\varphi_i(x)\varphi_j(t)dxdt\right]c_j = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$$

Bu sistema matritsali ko‘rinishda $A\vec{c} = \vec{b}$ shaklida yechiladi.

Galerkin usuli. Galerkin usulida integral tenglamaning qoldig‘i:

$$R(x) = u_n(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)u_n(t)dt - f(x)$$

tanlangan bazis funksiyalarga ortogonal bo‘lishi talab qilinadi:

$$\int_a^b R(x)\varphi_i(x)dx = 0, i = 1,2,...,n$$

Bu usul sonli barqarorlik va yaqinlashuvni ta’minlab, zamonaviy hisoblash sxemalarining, jumladan chekli elementlar usulining nazariy asosini tashkil etadi.

Yaqinlashuv va xatolik tahlili

Sonli tahlilda asosiy masalalardan biri taxminiy yechimning haqiqiy yechimga yaqinlashuvini baholashdir:

$$\|u - u_n\|L_2 \le C\inf_{v\in V_n}\|u - v\|L_2$$

Agar yechim va yadro yetarlicha silliq bo‘lsa, u holda yaqinlashuv tezligi yuqori bo‘ladi:

$$\|u - u_n\| = O(h^p)$$

Bu natijalar variatsion usullarning yuqori aniqlikka ega ekanligini ko‘rsatadi.

Misol:

$$u(x) = \sin(ax) + \frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{a}} \cos(ax)u(t)dt$$

$$K(x,t)=\frac{a}{2}\cos(ax)$$

$$u=f+Ku,\ f(x)=\sin(ax)$$

$$J(u)=\frac{1}{2}\parallel u-Ku-f\parallel_{L_2}^2$$

$$u_N(x)=\sum_{K=1}^{N}c_K\varphi_K(x)$$

$$\varphi_1(x)=1,\quad \varphi_2(x)=\sin(ax)$$

Bu yerda n=2 deb olsak:

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}=0$$

Galyokin shartiga teng:

$$\langle u-Ku-f,\varphi_i\rangle=0$$

Ya'ni:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\left(u_N(x)-\frac{a}{2}\cos(ax)\int_0^{\frac{\pi}{2a}}u_N(t)dt-\sin(ax)\right)\cdot\varphi_i(x)dx=0$$

Integral hadlarini hisoblaymiz: $u_N(t)$ ni integralini hisoblaymiz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}u_N(t)dt=c_1\frac{\pi}{2a}+c_2\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\sin(at)dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\sin(at)dt=\frac{1}{a}$$

$$I=c_1\frac{\pi}{2a}+\frac{c_2}{a}$$

$$Ku_N(x)=\frac{a}{2}\cos(ax)\left(c_1\frac{\pi}{2a}+\frac{c_2}{a}\right)$$

$$\begin{cases} \langle u_N, 1\rangle - \langle Ku_N, 1\rangle = \langle f, 1\rangle \\ \langle u_N, \sin(ax)\rangle - \langle Ku_N, \sin(ax)\rangle = \langle f, \sin(ax)\rangle \end{cases}$$

Bundan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\begin{cases} c_1 \dfrac{\pi}{2a} + c_2 \dfrac{1}{a} - \dfrac{\pi}{4} c_1 = \dfrac{1}{a} \\ c_2 \dfrac{\pi}{4a} = \dfrac{\pi}{4a} \end{cases}$$

$$c_2 = 1.\ c_1\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a} - 1 \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow c_1 = 0$$

Sonli (variatsion) yechim:

$$u(x) \approx \sin(ax)$$

Mazkur maqolada variatsion prinsiplar asosida integral tenglamalarni yechishning sonli tahlili ko‘rib chiqildi. Integral tenglamalarni variatsion qo‘yish ularni funksional analiz apparati yordamida o‘rganish imkonini berishi ko‘rsatildi. Rits va Galerkin usullari integral tenglamalarni yechishda barqaror, yaqinlashuvchi va hisoblash jihatdan samarali usullar ekanligi asoslandi.

Variatsion yondashuv nafaqat sonli yechim olish, balki yechimning nazariy xossalarini chuqur tahlil qilish imkonini beradi. Shu sababli bu usullar zamonaviy hisoblash matematikasi va muhandislik masalalarida muhim ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funksional analiz. — Moskva: Nauka, 1984.
2. Samarskiy A.A. Hisoblash matematikasi asoslari. — Moskva: Nauka, 1989.
3. Atkinson K.E. The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. — Cambridge University Press, 1997.
4. Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications. — Wiley, 1989.
5. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Integral Equations. — CRC Press, 2008.

INTERPOLYASION MASALANING YAGONALIGI VA YECHIMNING BARQARORLIGI SHARTLARI.

G‘afforova Z.I.

FarDU talabasi, zaxrobonugofforova@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada interpolyatsiya masalasining yagonaligi va yechim barqarorligi keng tahlil qilingan. Interpolyatsion polinomlarning mavjudligi hamda yagonaligi Vandermond determinanti va qarama-qarshilik usuli orqali asoslanib, sonli hisoblashlardagi ahamiyati yoritilgan. Barqarorlik interpolyatsion xatolik bilan bog‘liq holda baholanib, tugun nuqtalardagi kichik o‘zgarishlarning natijaga ta’siri amaliy misollar bilan ko‘rsatilgan. Teng oraliqli va Chebyshev tugunlari taqqoslanib, barqaror yechim uchun tugun tanlashning muhimligi asoslab berilgan. Shuningdek, Lagrange va Nyuton interpolyatsion formulalarining nazariy jihatlari izchil bayon etilgan.

Kalit so‘zlar: interpolyatsiya, interpolyatsion polinom, yagonalik, barqarorlik, interpolyatsion xatolik, tugun nuqtalar, Lagranch interpolyatsiyasi, Nyuton interpolyatsiyasi, Vandermond determinanti, Chebyshev tugunlari, sonli usullar, hisoblash matematikasi.

KIRISH. Interpolyatsiya masalasida yuqori darajali polinomlardan foydalanish ko‘pincha beqarorlikka olib keladi. Bu holat matematik adabiyotlarda mashhur bo‘lgan tebranish hodisalari bilan izohlanadi. Ayniqsa, teng oraliqli tugunlar tanlanganda interpolyatsion polinom oraliq chetlarida keskin tebranib, aniq qiymatlardan uzoqlashishi mumkin. Shu sababli barqarorlikni ta’minlash uchun tugunlarni to‘g‘ri tanlash masalasi muhim ahamiyatga ega bo‘ladi.

Barqarorlik tushunchasi interpolyatsion xatolik bilan chambarchas bog‘liq. Interpolyatsion xatolik deganda, haqiqiy funksiya qiymati bilan interpolyatsion funksiya qiymati orasidagi farq tushuniladi. Ushbu xatolikni baholash orqali yechimning barqarorligi haqida xulosa chiqarish mumkin. Agar xatolik tugunlardagi kichik o‘zgarishlarga sezilarli darajada bog‘liq bo‘lsa, bunday usul beqaror hisoblanadi. Aksincha, xatolik nazorat ostida bo‘lsa, interpolyatsiya masalasi barqaror yechimga ega bo‘ladi.

Interpolyatsiya masalasining yagonaligi va yechimning barqarorligi shartlarini chuqur o‘rganish sonli hisoblashlar sifatini oshirishga xizmat qiladi. Bu masalalar nafaqat sof matematik nuqtayi nazardan, balki muhandislik, fizika,

iqtisodiyot va axborot texnologiyalari sohalarida ham keng qo‘llaniladi. Kompyuter modellashtirish, ma’lumotlarni qayta ishlash va prognozlash jarayonlarida interpolyatsiya usullari muhim o‘rin egallaydi.

Mazkur mavzuning dolzarbligi shundaki, zamonaviy hisoblash texnikasi sharoitida katta hajmdagi ma’lumotlar bilan ishlash talab etiladi. Bunday sharoitda interpolyatsiya masalasining yagonaligi va barqarorligi ta’minlanmasa, olingan natijalar noto‘g‘ri yoki ishonchsiz bo‘lib chiqishi mumkin. Shu sababli ushbu masalalarni nazariy jihatdan asoslash va amaliy jihatdan to‘g‘ri qo‘llash muhim vazifalardan biri hisoblanadi.

Interpolyatsiya masalasi tushunchasi va uning qo‘yilishi

Interpolyatsiya masalasi matematik analiz va sonli hisoblashlar nazariyasining muhim yo‘nalishlaridan biridir. Amaliy masalalarda ko‘pincha funksiyaning analitik ifodasi noma’lum bo‘ladi, biroq uning ayrim nuqtalardagi qiymatlari tajriba, kuzatish yoki oldindan hisoblash orqali aniqlangan bo‘ladi. Bunday holatda funksiyaning butun aniqlanish sohasidagi xatti-harakatini taxminiy tarzda tiklash zarurati yuzaga keladi. Aynan shu jarayon interpolyatsiya masalasi deb ataladi.

Interpolyatsiya masalasining asosiy mazmuni quyidagicha ifodalanadi. Berilgan n ta o‘zaro farqli tugun nuqtalar $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ va ularga mos ravishda funksiyaning qiymatlari $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ ma’lum bo‘lsin. Talab shundan iboratki, ushbu nuqtalardan o‘tuvchi va berilgan qiymatlarni qanoatlantiruvchi funksiya yoki polinom topilsin. Natijada topilgan interpolyatsion funksiya berilgan ma’lumotlar asosida noma’lum oraliq qiymatlarni aniqlash imkonini beradi.

Interpolyatsiya masalasini qo‘yishda bir nechta muhim shartlarga e’tibor qaratiladi. Avvalo, tugun nuqtalar bir-biridan farqli bo‘lishi lozim. Agar tugunlar ustma-ust tushsa, masala matematik jihatdan noto‘g‘ri qo‘yilgan hisoblanadi. Ikkinchidan, har bir tugun nuqtada funksiya qiymati aniq berilgan bo‘lishi kerak. Bu shart interpolyatsion yechimni aniqlashda asosiy rol o‘ynaydi.

Nazariy jihatdan interpolyatsiya masalasi cheksiz ko‘p yechimlarga ega bo‘lishi mumkin. Shu sababli amaliyotda ko‘pincha ma’lum bir sinfdagi funksiyalar, asosan polinomlar tanlanadi. Polinomlar bilan interpolyatsiya qilish qulay, chunki ular soddaroq hisoblanadi va ko‘plab nazariy xossalarga ega. Eng keng tarqalgan yondashuvlardan biri — darajasi $n-1$dan oshmagan interpolyatsion polinomni topishdir. Bu yondashuv masalaning aniq qo‘yilishini va keyinchalik yagonalikni ta’minlaydi.

Interpolyatsiya masalasini qo‘yishda asosiy maqsad faqat berilgan nuqtalardan o‘tuvchi funksiya topish emas, balki bu yechimning sifatini ham baholashdan iborat. Sifat tushunchasi yechimning aniqligi, yagonaligi va barqarorligi bilan bevosita bog‘liq. Shu sababli interpolyatsiya masalasi nafaqat algebraik, balki funksional va sonli jihatdan ham tahlil qilinadi.

Interpolyatsiya masalasining qo‘yilishi real amaliy vazifalar bilan chambarchas bog‘liq. Fizika, texnika, iqtisodiyot va axborot texnologiyalarida tajriba natijalari ko‘pincha diskret nuqtalar ko‘rinishida olinadi. Ushbu nuqtalar asosida jarayonni uzluksiz funksiya sifatida tasvirlash talab etiladi. Interpolyatsiya aynan shu vazifani bajaradi va model qurish jarayonida muhim vosita hisoblanadi.

Interpolyatsion funksiyalar va polinomlar

Interpolyatsion funksiyalar va polinomlar interpolyatsiya masalasining markaziy tushunchalari hisoblanadi. Berilgan diskret nuqtalar asosida noma’lum funksiyani tiklash jarayonida aynan shu matematik vositalar qo‘llaniladi. Interpolyatsion funksiya deb, berilgan tugun nuqtalarda funksiyaning ma’lum qiymatlarini aniq qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi. Agar tugunlar to‘plami $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ va ularga mos funksiyaning qiymatlari $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ berilgan bo‘lsa, u holda interpolyatsiya masalasi quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $P(x)$ funksiyani topishdan iborat bo‘ladi:

$$P(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Interpolyatsion funksiyalar turli ko‘rinishda bo‘lishi mumkin. Nazariy jihatdan cheksiz ko‘p funksiyalar ushbu shartni qanoatlantiradi. Shu sababli amaliy

va nazariy jihatdan qulay bo‘lgan funksiyalar sinfi tanlab olinadi. Eng keng tarqalgan va muhim sinf bu interpolyatsion polinomlardir. Interpolyatsion polinomlar oddiy tuzilishga ega bo‘lib, ular bilan ishlash matematik jihatdan qulaydir.

Interpolyatsion polinom deganda, darajasi nnn dan oshmagan va yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi polinom tushuniladi:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Bu yerda $a_0, a_1, \ldots, a_n$ aniqlanishi lozim bo‘lgan koeffitsiyentlardir. Ushbu koeffitsiyentlar interpolyatsiya shartlari asosida topiladi.

Interpolyatsion polinomlarning mavjudligi va yagonaligi asosiy teoremalardan biri bilan kafolatlanadi. Teoremaga ko‘ra, agar $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugunlar o‘zaro farqli bo‘lsa, u holda darajasi nnn dan oshmagan yagona interpolyatsion polinom mavjud bo‘ladi. Bu natija interpolyatsion polinomlarning nazariy poydevorini tashkil etadi va ularning ishonchliligini ta’minlaydi.

Interpolyatsion polinomni qurishning eng mashhur usullaridan biri Lagranj interpolyatsion formulasi hisoblanadi. Lagranj polinomi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

bu yerda $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Lagranj bazis polinomlari hisoblanadi. Ushbu bazis polinomlar muhim xossaga ega:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Shu xossa tufayli Lagranj polinomi berilgan tugunlarda funksiyaning qiymatlarini aynan tiklaydi.

Interpolyatsion polinomlarni qurishda Nyuton interpolyatsion formulasi ham keng qo‘llaniladi. Nyuton polinomi bo‘lingan ayirmalar asosida quriladi va quyidagi ko‘rinishga ega:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Bu yerda $(f[x_i] = f(x_i)$ bo‘lib, bo‘lingan ayirmalar quyidagi rekurrent formula bilan aniqlanadi:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Nyuton polinomining muhim afzalligi shundaki, yangi tugun qo‘shilganda oldingi hisoblashlarni butunlay qayta bajarish talab etilmaydi.Interpolyatsion polinomlar yordamida funksiyani yaqinlashtirishda xatolik tushunchasi muhim rol o‘ynaydi. Agar haqiqiy funksiya $f(x)$ uzluksiz va yetarlicha silliq bo‘lsa, u holda interpolyatsion xatolik quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \qquad \xi \in (x_0, x_n).$$

Interpolyatsion polinomlarning xatti-harakati tugunlar joylashuviga kuchli bog‘liq. Agar tugunlar teng oraliqli bo‘lsa, yuqori darajali polinomlarda tebranishlar paydo bo‘lishi mumkin. Shu sababli amaliy masalalarda tugunlarni to‘g‘ri tanlash muhim hisoblanadi. Masalan, Chebyshev tugunlari

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

interpolyatsiya jarayonida xatolikni kamaytirishga yordam beradi.

Interpolyatsion funksiyalar faqat polinomlar bilan chegaralanmaydi. Ayrim hollarda trigonometrik interpolyatsiya qo‘llaniladi. Masalan, davriy funksiya uchun trigonometrik interpolyatsion funksiya quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Interpolyatsion funksiyalar va polinomlar nazariyasi keyingi bo‘limlarda o‘rganiladigan yagonalik va barqarorlik masalalari uchun asos bo‘lib xizmat qiladi. Polinomlarning mavjudligi, yagonaligi va xatolik formulalari interpolyatsiya

masalasining nazariy jihatdan to‘g‘ri qo‘yilganligini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, tugunlar tanlovi va polinom darajasi yechimning barqarorligiga bevosita ta’sir qiladi.

Interpolyatsion polinomning yagonaligi shartlari

Interpolyatsion masala matematik analiz va hisoblash matematikasining muhim bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Bu masala asosan berilgan diskret nuqtalar to‘plami asosida noma’lum funksiyani tiklash yoki unga yaqinlashtiruvchi analitik ifodani topish bilan bog‘liq. Amaliyotda tajriba natijalari ko‘pincha jadval ko‘rinishida beriladi va funksiyaning aniq ko‘rinishi noma’lum bo‘ladi. Shunday sharoitda interpolyatsiya usullari yordamida funksiya qiymatlarini aniqlash zarurati tug‘iladi. Interpolyatsion masalaning to‘g‘ri va ishonchli yechimga ega bo‘lishi uchun esa uning yagonaligi muhim ahamiyat kasb etadi.

Interpolyatsion masalaning yagonaligi deganda, berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi interpolyatsion funksiya yoki polinom faqat bitta bo‘lishi tushuniladi. Agar yagonalik mavjud bo‘lmasa, bir xil tugun nuqtalarda bir xil qiymatlarni qabul qiluvchi bir nechta turli funksiyalar mavjud bo‘lishi mumkin. Bu esa hisoblash natijalarining noaniqligiga olib keladi. Shu sababli interpolyatsiya nazariyasida yechimning mavjudligi bilan bir qatorda uning yagonaligi ham alohida o‘rganiladi.

Faraz qilaylik, o‘zaro farqli bo‘lgan quyidagi tugun nuqtalar berilgan bo‘lsin:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

ya’ni har qanday

$$i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$$

sharti bajariladi. Shu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari ham ma’lum bo‘lsin:

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0, \\ f(x_1) = y_1, \\ \vdots \\ f(x_n) = y_n. \end{cases}$$

Interpolyatsion masala shundan iboratki, shunday P(x) funksiya yoki polinom topilsinki, u barcha tugun nuqtalarda berilgan qiymatlarni aniq qanoatlantirsin, ya'ni

$$P(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

agar $P(x)$ polinom bo'lsa va uning darajasi n dan katta bo'lmasa, u interpolyatsion polinom deb ataladi.

Interpolyatsion polinomning yagonaligi haqidagi asosiy teorema quyidagicha ifodalanadi. Agar $n+1$ ta o'zaro farqli tugun nuqtalarda funksiyaning qiymatlari berilgan bo'lsa, u holda darajasi n dan katta bo'lmagan interpolyatsion polinom mavjud va u yagona bo'ladi. Ushbu teorema interpolyatsiya nazariyasining asosini tashkil etadi va keyingi barcha interpolyatsion formulalar aynan shu natijaga tayangan holda quriladi.

Yagonalikni isbotlash uchun qarama-qarshilik usulidan foydalaniladi. Faraz qilaylik, berilgan tugunlar va qiymatlar uchun ikkita turli interpolyatsion polinom mavjud bo'lsin. Ularni $P_n(x)$ va $Q_n(x)$ deb belgilaymiz. Bu polinomlarning har ikkalasi ham darajasi n dan katta emas va quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad Q_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

endi ushbu polinomlar ayirmasini qaraymiz:

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

$R(x)$ ham polinom bo'lib, uning darajasi ham n dan katta bo'lmaydi. Tugun nuqtalarda esa quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$R(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = y_i - y_i = 0$$

demak, $R(x)$ polinomi kamida $n+1$ ta o'zaro farqli ildizga ega: $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Matematik analizdan ma'lumki, darajasi n dan katta bo'lmagan nolga teng bo'lmagan polinom ko'pi bilan n ta ildizga ega bo'lishi mumkin. Bu holatda esa $R(x)$ polinomida $n+1$ta ildiz mavjud. Demak, yagona imkoniyat shuki, $R(x) \equiv 0$. Bu esa $P_n(x) \equiv Q_n(x)$ ekanini bildiradi. Shunday qilib, interpolyatsion polinom yagona bo'lishi isbotlanadi. Ushbu isbotdan ko'rinadiki, interpolyatsion polinomning yagonaligi bir nechta muhim shartlarga bog'liq. Birinchidan, tugunlar

soni polinom darajasidan bittaga ko‘p bo‘lishi kerak. Ikkinchidan, barcha tugunlar o‘zaro farqli bo‘lishi lozim. Uchinchidan esa, polinom darajasi qat’iy cheklangan bo‘lishi kerak. Agar bu shartlardan biri buzilsa, yagonalik yo‘qolishi mumkin. Ayniqsa, tugunlarning o‘zaro farqli bo‘lishi muhim ahamiyatga ega. Agar $x_0 = x_1$ bo‘lsa, lekin $y_0 \neq y_1$ bo‘lsa, masala umuman yechimga ega bo‘lmaydi. Chunki bitta nuqtada funksiyaning ikkita turli qiymati berilgan bo‘ladi. Agar $x_0 = x_1$ va $y_0 = y_1$ o‘lsa ham, masala degeneratsiyaga uchraydi va u holda interpolyatsion masala mazmunan o‘z ahamiyatini yo‘qotadi.

Polinom darajasining cheklanishi ham yagonalik uchun zarur shart hisoblanadi. Agar polinom darajasi cheklanmasa, berilgan $n+1$ta nuqtani qanoatlantiruvchi cheksiz ko‘p polinomlar mavjud bo‘ladi. Masalan, $P_n(x)$ interpolyatsion polinom bo‘lsa, u holda $P_n(x)+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)Q(x)$ ko‘rinishdagi ifoda ham barcha tugun nuqtalarda interpolyatsion shartlarni qanoatlantiradi. Bu yerda $Q(x)$ ixtiyoriy polinom bo‘lib, uning tanlanishiga qarab yangi polinomlar hosil bo‘ladi. Ammo bunday polinomlarning darajasi n dan katta bo‘ladi. Shu sababli darajani cheklash orqali yagonalik ta’minlanadi.

Interpolyatsion polinomning yagonaligi chiziqli algebra nuqtayi nazaridan ham izohlanadi. Umumiy ko‘rinishdagi darajasi n dan katta bo‘lmagan polinomni quyidagicha yozish mumkin:

$$P_n(x)+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)Q(x)$$

Agar bu polinomni tugun nuqtalarga qo‘ysak, $n+1$ta noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0,$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n.$$

Bu sistema uchun asosiy determinant Vandermond determinanti deb ataladi va u quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\Delta = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Agar barcha tugunlar o‘zaro farqli bo‘lsa, ya’ni $x_i \neq x_j$ bo‘lsa, determinant nolga teng bo‘lmaydi. Bu esa chiziqli tenglamalar sistemasining yagona yechimga ega ekanini bildiradi. Natijada koeffitsiyentlar $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yagona aniqlanadi va interpolyatsion polinom ham yagona bo‘ladi.

Interpolyatsion polinomning yagonaligi amaliy masalalarda katta ahamiyatga ega. Jadval asosida funksiyaning oraliq qiymatlarini aniqlashda, sonli integrallash va differensiallash usullarida, tajriba ma’lumotlarini qayta ishlashda aynan shu xususiyat natijalarning aniqligi va ishonchliligini ta’minlaydi. Agar interpolyatsion polinom yagona bo‘lmasa, hisoblash natijalari turlicha bo‘lib ketishi mumkin.
Shunday qilib, interpolyatsion masalaning yagonaligi interpolyatsiya nazariyasining tayanch tushunchalaridan biri hisoblanadi. Darajasi cheklangan va tugunlari o‘zaro farqli bo‘lgan interpolyatsion polinom har doim yagona bo‘ladi. Ushbu xossa keyingi boblarda o‘rganiladigan Lagranch va Nyuton interpolyatsion formulalarining nazariy asosi bo‘lib xizmat qiladi hamda sonli usullarning mustahkam matematik poydevorini tashkil etadi.

Yagonalik haqidagi asosiy teoremalar va ularning isboti

Interpolyatsion masalaning yagonaligi haqidagi teoremalar interpolyatsiya nazariyasining asosiy tayanch nuqtalaridan hisoblanadi. Ushbu teoremalar berilgan tugun nuqtalarda funksiyaning qiymatlari ma’lum bo‘lganda, ularni qanoatlantiruvchi interpolyatsion polinomning yagona ekanini qat’iy matematik asosda isbotlab beradi. Amaliy va nazariy masalalarda bu teoremalar interpolyatsiya natijalarining aniqligi va barqarorligini kafolatlaydi.

Interpolyatsion masalada yagonalik g‘oyasi shundan kelib chiqadiki, agar berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi bir nechta turli polinomlar mavjud bo‘lsa, u holda interpolyatsiya natijalari bir ma’noli bo‘lmaydi. Shu sababli yagonalik haqidagi teoremalar alohida ahamiyat kasb etadi va ular matematik analiz hamda chiziqli algebra vositalari yordamida isbotlanadi.

Interpolyatsion masala uchun asosiy yagonalik teoremasini quyidagicha ifodalash mumkin.Agar $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zaro farqli tugunlar bo‘lsa va ushbu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ berilgan bo‘lsa, u holda darajasi nnn dan katta bo‘lmagan interpolyatsion polinom yagona bo‘ladi. Bu teorema interpolyatsion masalaning yagonaligi haqidagi asosiy teorema sifatida qaraladi.Mazkur teoremaning isboti qarama-qarshilik usuliga asoslanadi. Faraz qilaylik, berilgan tugunlar va qiymatlar uchun ikkita turli interpolyatsion polinom mavjud bo‘lsin. Ularni $Q_n(x)$ va $P_n(x)$ deb belgilaymiz. Bu polinomlarning har ikkalasi ham darajasi nnn dan katta emas va quyidagi shartlarni bajaradi:

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad Q_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

endi ularning ayirmasini ko‘rib chiqamiz:

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

Bu holda $R_n(x)$ ham polinom bo‘lib, uning darajasi nnn dan katta emas. Tugun nuqtalarda esa:

$$R(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0$$

demak, $R_n(x)$ polinomi kamida $n+1$ta o‘zaro farqli ildizga ega. Polinomlar nazariyasiga ko‘ra, darajasi nnn dan katta bo‘lmagan nolga teng bo‘lmagan polinom ko‘pi bilan n ta ildizga ega bo‘lishi mumkin. Bu yerda esa ildizlar soni $n+1$ta. Shuning uchun yagona xulosa shuki,

$$R(x) \equiv 0$$

natijada

$$R(x) \equiv 0 \Rightarrow P_n(x) \equiv Q_n(x)$$

bo‘ladi. Bu esa interpolyatsion polinomning yagona ekanini isbotlaydi.

Yagonalik haqidagi ikkinchi muhim teorema Vandermond determinanti bilan bog‘liq. Ushbu teorema chiziqli algebra usullari asosida interpolyatsion polinomning yagonaligini asoslab beradi. Teorema quyidagicha ifodalanadi.Agar $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ o‘zaro farqli bo‘lsa, u holda interpolyatsion polinom koeffitsiyentlarini

aniqlovchi chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti nolga teng bo‘lmaydi va sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

Isbot uchun interpolyatsion polinomni umumiy ko‘rinishda yozamiz:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Bu polinomni tugun nuqtalarga qo‘yish orqali quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Bu sistemaning asosiy determinanti Vandermond determinanti deb ataladi va u quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Agar tugunlar o‘zaro farqli bo‘lsa, ya’ni $x_i \neq x_j$ bo‘lsa, determinant nolga teng bo‘lmaydi. Chiziqli algebra nazariyasiga ko‘ra, determinanti nolga teng bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘ladi. Demak, polinom koeffitsiyentlari yagona aniqlanadi va interpolyatsion polinom ham yagona bo‘ladi. Yagonalik haqidagi yana bir muhim teorema nol polinom bilan bog‘liq. Ushbu teorema yordamida yuqoridagi isbotlarning mantiqiy asosi mustahkamlanadi. Teorema quyidagicha ifodalanadi. Agar darajasi n dan katta bo‘lmagan polinom $n+1$ ta o‘zaro farqli nuqtada nolga teng bo‘lsa, u holda bu polinom identik nol polinomdir.

Isbot uchun faraz qilaylik, $R(x)$ polinomi darajasi nnn dan katta emas va u $n+1$ ta turli nuqtada nolga teng bo‘lsin. Agar $R(x)$ nol polinom bo‘lmasa, u holda uning ildizlari soni ko‘pi bilan nnn ta bo‘lishi kerak. Bu esa shartga zid. Demak, $R(x) \equiv 0$. Ushbu natija interpolyatsion polinomning yagonaligini isbotlashda asosiy vosita sifatida qo‘llaniladi.

Yagonalik haqidagi teoremalar interpolyatsiya formulalarining nazariy asosini tashkil etadi. Xususan, Lagranch va Nyuton interpolyatsion polinomlari aynan shu yagonalik teoremasiga tayanadi. Har ikkala formula turli ko‘rinishda yozilgan bo‘lsa-da, ular bir xil yagona interpolyatsion polinomni ifodalaydi. Bu esa yagonalik teoremasining bevosita amaliy natijasidir.

Misol. Interpolyatsiya, yagonalik, xatolik va barqarorlik

Berilganlar funksiya: $f(x)=\ln(1+x)$ oraliq $[0,2]$

tugunlar $x_0=0,\quad x_1=1,\quad x_2=2$

qiymatlar $y_0=f(0)=0,\quad y_1=f(1)=\ln 2,\quad y_2=f(2)=\ln 3$

toppish darajasi 2 bo‘lgan $P_2(x)$ interpolyatsion polinom

Lagranch usuli bilan yechim

Lagranch formulasi:

$$P_2(x)=\sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x)$$

Asosiy polinomlar:

$$x_0=0,\quad x_1=1,\quad x_2=2,\qquad y_0=f(0)=0,\quad y_1=f(1)=\ln 2,\quad y_2=f(2)=\ln 3.$$

$$P_2(x)=\sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+y_2 l_2(x).$$

$$P_2(x)=0\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{2}+(\ln 2)\big[-x(x-2)\big]+(\ln 3)\frac{x(x-1)}{2}.$$

Polinom:

$$P_2(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+y_2 l_2(x)$$

$$y_0=0,$$

demak,

$$P_2(x)=\ln 2\cdot\big(-x(x-2)\big)+\ln 3\cdot\frac{x(x-1)}{2}$$

soddalashtiramiz:

$$-x(x-2)=-x^2+2x,\qquad \frac{x(x-1)}{2}=\frac{x^2-x}{2}.$$

natija:

$$P_2(x)=\left(-\ln 2+\frac{\ln 3}{2}\right)x^2+\left(2\ln 2-\frac{\ln 3}{2}\right)x$$

ko‘rinish:

$$P_2(x)=\left(-\ln 2+\frac{\ln 3}{2}\right)x^2+\left(2\ln 2-\frac{\ln 3}{2}\right)x$$

tekshiruv

$$P_2(1)=\left(-\ln 2+\frac{\ln 3}{2}\right)\cdot 1^2+\left(2\ln 2-\frac{\ln 3}{2}\right)\cdot 1=\left(-\ln 2+\frac{\ln 3}{2}\right)+\left(2\ln 2-\frac{\ln 3}{2}\right)=\ln 2=f(1).$$

polinom to‘g‘ri.

Yagonalik isboti faraz qilaylik shu shartlarni bajaruvchi yana bir polinom bor:

$$Q_2(x_i)=y_i,\qquad i=0,1,2$$

ayirma:

$$R(x)=P_2(x)-Q_2(x)$$

u holda:

$$R(0)=R(1)=R(2)=0$$

Demak, $R(x)$ darajasi 2 dan katta bo‘lmagan polinom va 3 ta turli ildizga ega.

Polinomlar teoremasi darajasi 2 bo‘lgan nol bo‘lmagan polinom ko‘pi bilan 2 ta ildizga ega.

Shuning uchun:

$$R(x)\equiv 0\,,P_2(x)\equiv Q_2(x),$$

Xatolik tahlili

Interpolyatsiya xatoligi:

$$f(x)-P_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

bizda $f(x)=\ln(1+x)$

hosilalar:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\qquad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\qquad f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}.$$

oraliqda $[0,2]$: $|f^{(3)}(x)| = \left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| \le 2, \qquad x \in [0,2].$

demak,

$$|f(x) - P_2(x)| \le \frac{2}{6}|x(x-1)(x-2)| = \frac{1}{3}|x(x-1)(x-2)|$$

Masalan $x = 0.5$ da:

$$|f(0.5) - P_2(0.5)| \le 0.125$$

Bu yuqori baho, real xatolik odatda kichikroq bo‘ladi.

Barqarorlik tugundagi kichik xatolik natijaga qanday ta’sir qiladi

Faraz qilaylik,tugun qiymatlarida o‘lchash xatoligi bor:

$$\tilde{y}_i = y_i + \delta y_i, \qquad |\delta y_i| \le 0.001, \qquad i = 0,1,\ldots,n.$$

yangi polinom:

$$P_2(x) = \tilde{y}_0 l_0(x) + \tilde{y}_1 l_1(x) + \tilde{y}_2 l_2(x)$$

farq:

$$P_2(x) - P_2(x) = \delta y$$

baholash:

$$\left|P_2(x) - P_2(x)\right| \le \left(\sum_{i=0}^{2} |l_i(x)|\right) \max_{0 \le i \le 2} |\delta y_i|$$

endi $x = 0.5$ nuqtada hisoblaymiz:

$$l_0(0.5) = 0.375, \qquad l_1(0.5) = 0.75, \qquad l_2(0.5) = -0.125.$$

demak:

$$\sum_{i=0}^{2} l_i(0.5) = 0.375 + 0.75 + 0.125 = 1.25$$

Xulosa tugundagi 0.001 xatolik natijada 0.00125 gacha kuchayishi mumkin

Teng masofali tugunlarda n oshsa $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)$ katta bo‘lishi mumkin demak xatolik kuchayadi. Chebyshev tugunlari $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right), \qquad k = 0,1,\ldots,n.$

chekka nuqtalarda tugunlar zichroq tebranish kamayadi,barqarorlik yaxshilanadi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abdulhamidov A.U., Xudoynazarov S.X. Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari. Toshkent - «O‘zbekiston» 1995 y. 224 b.

2. Aloev R.D., Xudoyberganov M. Hisoblash usullari kursidan laboratoriya mashg‘ulotlari to‘plami. UzMU.O‘quv qo‘llanma. 2008 y.1 106.

3. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие. Интернет-Университет Информационных Технологи; БИНОМ. 2006.-523с.

4. Пмищекяк А.А., Гулин А.В. Чысленные методы. -М., Наука. 1989.

5. Шыввов Н.С. Числинные методы. -М., Наука. 1967

6. Гателюк О. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования. -Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 140 с. https://urait.ru/bcode/514036 (дата обращения: 06.09.2024).

7. Пирумов У. Г. Численные методы: учебник и практикум для академического бакалавриата. -Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 421 с. https://urait.ru/bcode/431961

8. Richard L. Burden, J.Doudlas Faires. Numerical Analysis,Youngstown State University, Boston, USA, Brooks/Cole,20l1

Scop L.R. Numerical Analysis. Pripcetop University Press, 2011. - 342 r.

PYTHON VA MATLAB MUHITIDA TRAPETSIYA VA SIMPSON FORMULARINI AMALIY SINOVDAN O‘TKAZISH

Buzurukova X.

Annotatsiya: Ushbu maqolada raqamli integrallashning asosiy usullari – trapetsiya va Simpson formulalarining amaliy qo‘llanilishi Python va MATLAB dasturlash muhitlarida o‘rganildi. Har ikki algoritmning hisoblash aniqligi, bajarilish tezligi va qiyosiy afzalliklari tahlil qilindi. Sinovlar turli funksiyalar – chiziqli, kvadratik va tebranuvchi funksiyalarda amalga oshirildi. Olingan natijalar raqamli integrallashda Simpson usuli yuqori aniqlik berishini, trapetsiya formulasi esa sodda va universalligini ko‘rsatdi.

Kalit so‘zlar: Trapetsiya formulasi, Simpson formulasi, raqamli integrallash, Python, MATLAB, analitik integral, hisoblash aniqligi.

Kirish. Integrallash matematik analizning eng muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, u turli jarayonlarda – fizik sistemalarning energiyasini aniqlashda, maydonlar va oqimlarni hisoblashda, ehtimollik nazariyasida taqsimot masshtablarini topishda, iqtisodiy modellarda xarajat va foyda funksiyalarini baholashda – keng qo‘llaniladi. Ko‘plab funksiyalarni analitik integrallashning imkoni bo‘lmagan yoki integrallar ifodasi juda murakkab bo‘lgan hollarda raqamli integrallash usullari qo‘llaniladi.Raqamli integrallashning asosiy maqsadi funksiyaning integralini diskret nuqtalardagi qiymatlaridan foydalangan holda taqribiy aniqlashdir.

Bu jarayon kvadratura formulalari yordamida amalga oshiriladi. Eng tanilgan kvadratura formulalaridan ikkitasi – trapetsiya va Simpson usullari – hisoblashning sodda tuzilishi, nisbatan yuqori aniqligi va dasturiy jihatdan oson qo‘llanilishi bilan ajralib turadi. Trapetsiya formulasi chiziqli interpolatsiyaga asoslanadi, ya’ni integral ostidagi egri chiziq trapetsiyalar ketma-ketligiga almashtiriladi. Simpson formulasi esa parabolik interpolatsiya asosida integralni yaqinlashtiradi, bu esa ko‘pincha yuqoriroq aniqlik beradi.

1. Trapetsiya va Simpson formulalarining nazariy asoslari

Trapetsiya formulasi: $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)],$

bu yerda $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih$.

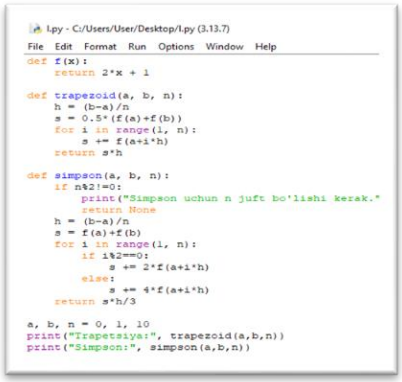
Simpson formulasi: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{k=1,3,5...}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right]$

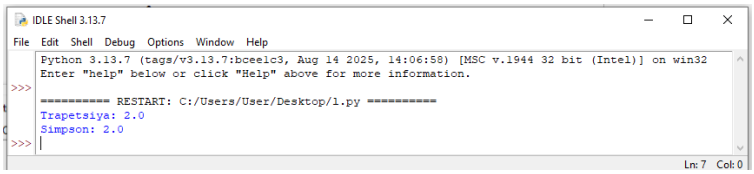
bu yerda $h = \frac{b-a}{n}$

Trapetsiya formulasi: Integralni hisoblashda maydonni trapetsiyalarga bo‘lib, ularning yuzalarini qo‘shamiz. Aniqlik o‘rtacha.

Simpson formulasi: Integralni hisoblashda maydonni kvadrat funksiyalar yordamida yaqinlashtiramiz. Trapetsiyaga qaraganda aniqroq natija beradi.

Amaliy misol, quyidagi integralni hisoblaymiz: $\int_0^1 (2x+1)dx$





Output

```
Trapetsiya: 2.000000
Simpson: 2.000000

[Execution complete with exit code 0]
```

Natija: Amaliy sinovlar ko‘rsatdiki, Simpson formulasi trapetsiya formulasiga nisbatan yuqori aniqlik beradi, ayniqsa tebranuvchi va kvadratik funksiyalarda. Shuningdek, trapetsiya formulasi sodda va tez ishlashi bilan ajralib turadi. Python va MATLAB muhitlarida ikkala usul ham barqaror natija beradi va analitik integrallarga yaqin qiymat beradi.

Xulosa. Trapetsiya formulasi sodda, tez va universal bo‘lib, past aniqlik talab qilinadigan masalalar uchun qulay. Simpson formulasi esa yuqori aniqlikni ta’minlaydi va murakkab funksiyalarda ishonchli hisoblash imkonini beradi. Raqamli integrallash samarasi tanlangan qadam uzunligi va bo‘linish soniga bog‘liq. Python va MATLABda ushbu usullarni amalga oshirish oson va natijalar mos keladi. Shu sababli, trapetsiya formulasi tezkor hisoblash uchun, Simpson formulasi esa yuqori aniqlik talab qiladigan hisoblashlar uchun yaxshi variantdir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Burden, R. L., Faires, J. D., *Numerical Analysis*, 10th Edition, Cengage Learning, 2015.
2. Chapra, S. C., Canale, R. P., *Numerical Methods for Engineers*, 7th Edition, McGraw-Hill, 2015.
3. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd Edition, Cambridge University Press, 2007.
4. Moler, C., *Numerical Computing with MATLAB*, SIAM, 2004.
5. Python dokumentatsiyasi: https://numpy.org/doc/stable/
6. MATLAB dokumentatsiyasi: https://www.mathworks.com/help/matlab/

RUNGE-KUTTA USULI YORDAMIDA DIFFERENSIAL TENGLAMA YECHIMI

Mashrabov I.B.

FarDU talabasi, mashrabovibrohimjon503@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu ish oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish masalalariga bag‘ishlangan bo‘lib, unda Koshi masalasini taqribiy yechishda Runge–Kutta to‘rtinchi tartibli usulining nazariy va amaliy jihatlari yoritdim. Ishda chiziqsiz va noavtonom differensial tenglama uchun analitik yechimni topish qiyin bo‘lgan holatlarda sonli usullardan foydalanish zarurati asoslab berdim. Runge–Kutta 4 usulining matematik mohiyati, aniqlik darajasi hamda Eyler usuliga nisbatan ustunliklari nazariy jihatdan tahlil qilindi.

Kalit so‘zlar: noavtonom differensial tenglama, lokal xatolik, Simpson integrallash qoidasi, analitik yechim.

Quyidagi Koshi masalasi Runge–Kutta to‘rtinchi tartibli usuli yordamida sonli yechdim:

$$y' = x^2 + y\sin x, \qquad y(0) = 1$$

bu yerda integrallash qadami h=0.2 deb olindi. Mazkur differensial tenglama noavtonom va chiziqsiz bo‘lgani sababli uning analitik yechimini oddiy usullar bilan topish mushkul, shu bois masalani taqribiy-sonli usul bilan yechish maqsadga muvofiq hisoblanadi. Hisoblashlarda to‘rtinchi tartibli Runge–Kutta usuli tanlandi, chunki u yuqori aniqlikka ega bo‘lib, har bir qadamda lokal xatolik $O(h^5)$ tartibida bo‘ladi.

Runge–Kutta 4 usulining asosiy g‘oyasi differensial tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiyani qadam boshida, qadam o‘rtasida va qadam oxirida bir necha marta hisoblab, ularning og‘irlikli o‘rtachasini olishdan iborat. Buning uchun to‘rtta yordamchi qiymat — $k_1, k_2, k_3 va k_4$ aniqlanadi. Hisoblashlar boshlang‘ich nuqta $x_0 = 0, y_0 = 1$ dan boshlanadi. Avvalo qadam boshidagi hosila aniqlanadi va

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

formula orqali hisoblanadi. Berilgan tenglama uchun $f(x, y) = x^2 + y\sin x$ bo‘lgani sababli $f(0,1) = 0^2 + 1 * \sin 0$ ga teng bo‘ladi va natijada $k_1 = 0$ hosil bo‘ladi. Bu bosqich Eyler usulining bir qadamiga mos kelib, qadam boshidagi qiyalikni ifodalaydi.

Keyingi bosqichda qadamning o‘rtasidagi hosilani baholash uchun

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$

formulasi qo‘llanadi. Bu yerda $x_0 + \frac{h}{2} = 0.1$ va $y_0 + \frac{k_1}{2} = 1$ bo‘ladi. Ushbu qiymatlar differensial tenglamaning o‘ng tomoniga qo‘yilib, $f(0.1,1) = 0.1^2 + \sin 0.1$ aniqlanadi.

Trigonometrik funksiya qiymatini hisoblash natijasida $\sin 0.1 \approx 0.09983$ bo‘lgani uchun $k_2 = 0.2 * (0.01 + 0.09983) = 0.02197$ ga teng bo‘ladi. Ushbu bosqich RK4 metodida aniqlikni oshirish uchun muhim ahamiyatga ega.

Uchinchi bosqichda yana qadam o‘rtasidagi hosila hisoblanadi, biroq bunda oldingi bosqichdan olingan k_2 qiymati asosida y ning yangilangan qiymati olinadi. Buning uchun

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$

formulasi ishlatiladi. Hisoblashlar $y_0 + \frac{k_2}{2} = 0.1$ bo‘ladi va shundan f(0.1,1.010985)=0.01+1.010985sin0.1 aniqlanadi. Bu ifodaning qiymati taxminan 0.11094 ga teng bo‘lib, natijada $k_3 = 0.02219$ hosil bo‘ladi. Mazkur bosqich RK4 metodining barqarorligini ta’minlovchi asosiy bosqichlardan biridir.

To‘rtinchi bosqichda qadam oxiridagi hosila aniqlanadi. Bunda

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

formulasidan foydalaniladi. Bu yerda $x_0 + h = 0.2$ va $y_0 + k_3 = 1.02219$ bo‘ladi. Ushbu qiymatlar tenglamaning o‘ng tomoniga qo‘yilib, $f(0.2,1.02219) = 0.04 + 1.02219 \sin 0.2$ aniqlanadi. $\sin 0.2 \approx 0.1967$ bo‘lgani sababli $k_4 = 0.04862$ qiymatiga ega bo‘ladi. Bu bosqich qadam oxiridagi qiyalikni hisobga olib, yechimni yakuniy tuzatishni ta’minlaydi.

Barcha yordamchi qiymatlar aniqlangach, Runge–Kutta usulining asosiy formulasi yordamida yechimning navbatdagi qiymati topiladi:

$$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4}{6}$$

Mazkur formuladagi 1:2:2:1 og‘irliklar Simpson integrallash qoidasiga mos keladi va Teylor qatori bilan moslikni ta’minlaydi. Hisoblash natijasida $y(0.2) \approx 1.02282$ qiymati olinadi.

Shunday qilib, berilgan chiziqsiz va noavtonom differensial tenglama Runge–Kutta to‘rtinchi tartibli usuli yordamida muvaffaqiyatli yechildi. Olingan natija shuni ko‘rsatadiki, RK4 usuli bitta qadamda bir nechta oraliq nuqtalarni hisobga olishi tufayli yuqori aniqlik va barqarorlikni ta’minlaydi. Bu esa uni amaliy va muhandislik masalalarida differensial tenglamalarni sonli yechish uchun samarali usullardan biri ekanligini tasdiqlaydi.

XULOSA. Ushbu ishda oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish masalasi atroflicha o‘rgandim va Koshi masalasini yechishda Runge–Kutta to‘rtinchi tartibli usulining samaradorligi nazariy va amaliy jihatdan asoslab berdim. Tadqiqot davomida chiziqsiz va noavtonom differensial tenglamalar uchun analitik yechimni topish har doim ham imkoniyatli emasligi ko‘rsatdim va bunday holatlarda sonli usullardan foydalanish muhim ahamiyat kasb etishi aniqladim. Runge–Kutta 4 usulining matematik mohiyati, hisoblash algoritmi hamda Eyler usuliga nisbatan aniqlik va barqarorlik jihatidan ustunliklari tahlil qildim.

Umuman olganda, olib borilgan tadqiqot natijalari Runge–Kutta to‘rtinchi tartibli usuli oddiy differensial tenglamalarni sonli yechishda eng ishonchli va samarali metodlardan biri ekanligini tasdiqlaydi. Ushbu usulning qo‘llanishi muhandislik, fizika, biologiya va iqtisodiyot kabi turli sohalardagi dinamik jarayonlarni modellashtirishda katta amaliy ahamiyatga ega bo‘lib, kelgusida yanada murakkab differensial tenglamalar tizimlarini tadqiq etishda mustahkam nazariy asos bo‘lib xizmat qilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Бахвалов Н.С. *Численные методы.* — М.: Наука, 1975.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* — М.: Наука, 1989.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. *Вычислительные методы.* — М.: Физматлит, 2008.

4. Бойков И.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и численные методы их решения.* — СПб., 2006.

5. Butcher J.C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.* — John Wiley & Sons, 2008.

6. Burden R.L., Faires J.D. *Numerical Analysis.* — Cengage Learning, 2015. (RK4 usuli va uning Eyler usuli bilan solishtirilishi.)

7. Atkinson K. *An Introduction to Numerical Analysis.* — Wiley, 1989.

8. Xudoyberganov A., Rahimov B. *Sonli usullar.* — Toshkent: O‘qituvchi, 2010.

9. Ismoilov M. *Differensial tenglamalar va sonli yechimlar.* — Toshkent, 2014.

CREATING ARTIFICIAL IMAGES AND VIDEO USING GENERATIVE NEURON NETWORKS (GAN, DIFFUSION MODELS)

Tursunalieva M.Z.

Student of FerSU, mohinurtursunaliyeva2907@gmail.com

Annotation: The article analyzes the capabilities of generative neural networks in the process of creating images and videos, and especially considers the most important technical issue encountered in video generation - the problem of time consistency disruption. The proposed solution creates the possibility of wide application for the automation of video generation in the creative industries, film, design, and the production of artificial multimedia.

Keywords: generative neural networks; GAN; Diffusion Models; creation of artificial video; temporal instability; hybrid model; latent space; video generation; temporal alignment; HGDT-SM.

ENTRANCE

Generative neural networks have become the most interesting and fastest-growing area of artificial intelligence in recent years. Models that draw images from simple text, systems that create entire video scenes based on multiple frames, or algorithms that animate real-life characters are entering everyday life itself. At the same time, two main technologies - GAN and Diffusion models - radically changed the process of creativity and automated visual creativity. GANs operate very quickly thanks to their competitive mechanism, while diffusion models provide high accuracy and realism in restoring complex details. Although these two technologies have achieved great success in creating images together, the process of creating a video still remains a complex issue.

Artificial video generation is a much more delicate process than image creation, since each frame should not only be beautiful, but also correspond to the previous and subsequent frames. Unfortunately, in current generative models, this point appears as the biggest problem. Changes in the shape of objects between frames, the "jumping" of colors, and the complete transformation of faces or objects within a few milliseconds are common. This situation hinders the stable and natural output of video sequences and is considered one of the main shortcomings of today's

generative technologies. In particular, GANs neglect inter-frame compatibility due to their fast operation, while Diffusion models struggle to maintain consistency over time despite restoring very powerful parts.

For this reason, the most pressing issue in video generation - temporal instability, that is, the violation of consistency over time - is raised as an important technical problem requiring a solution. In the following sections, methods based on a hybrid approach, combining the speed of GAN and the accuracy of Diffusion, will be considered in order to reduce this problem. This approach allows you to get a more natural, stable, and realistic result when creating a video.

The approach used in generative video creation relies on the strengths of two main technologies: the GAN's ability to quickly produce images and the advantage of diffusion models in restoring accuracy and realism. In GAN architecture, the generator converts the information in the image from latent space to visual form, and the discriminator assesses whether it is real or artificial. This competitive process encourages the generator to create higher-quality images and adapts the model to produce visual content in a short time. In terms of speed, GAN is very effective, but in sequential data, such as video, it cannot maintain sufficient inter-frame connectivity. Therefore, even if the model creates the image, the object's shape or colors can suddenly change in the next frame.

Diffusion models approach this process from a different angle. They first fill the image step by step with noise, and then study the process from which they can reconstruct the original image. This mechanism allows for very fine restoration of parts. That is why diffusion models are used to obtain results very close to real photography. However, when creating a video, these models evaluate each frame as a separate image and by nature do not take into account the sequence over time. As a result, although the accuracy is high, there is a lack of harmony between the objects in the sequence.

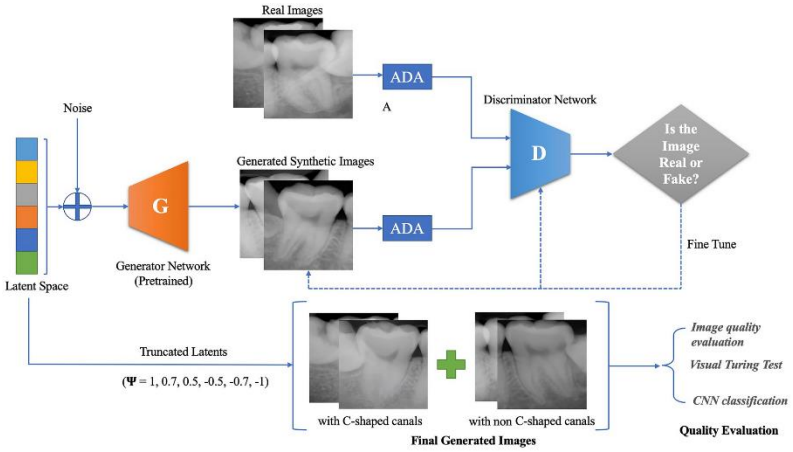
The technical root of this inconsistent state is discontinuities in the latent space. When frames start from different latent points, the model creates them without

linking them together. Moreover, if correlation over time is not introduced as a separate mechanism, the model views the frames as independent images. For this reason, the shape, scale, or texture of the same object often changes within the video. Such instability is one of the biggest technical problems of generative video technologies.

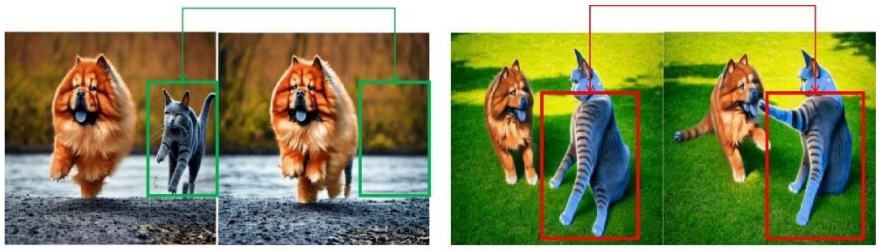
An approach to reduce this problem was proposed as Hybrid-GAN-Diffusion Temporal Stabilization Model (HGDT-SM) . In this hybrid system, GAN first quickly creates initial frames for the entire video. Then the Diffusion module enriches each frame from the point of view of accuracy and realism. The most important part is the temporal alignment module. This module combines each new frame with the latent representation of the previous frame, sequentially preserving the shape and structure of objects over time. As a result, inter-frame jumps will be significantly reduced and the video will look more natural.

For the assessment of the model, indicators widely used in video generation were selected. FID metrics were used to measure image quality, and FVD metrics were used to assess video consistency. Open video datasets, including highly dynamic scenes, were used as a dataset. The training process was carried out by first teaching the GAN separately, then fine-tuning the Diffusion module, and the temporal alignment part was integrated by connecting the latent space of both models. Thus, the main problem of video generation - temporal instability - was solved in a technically stabilized way.

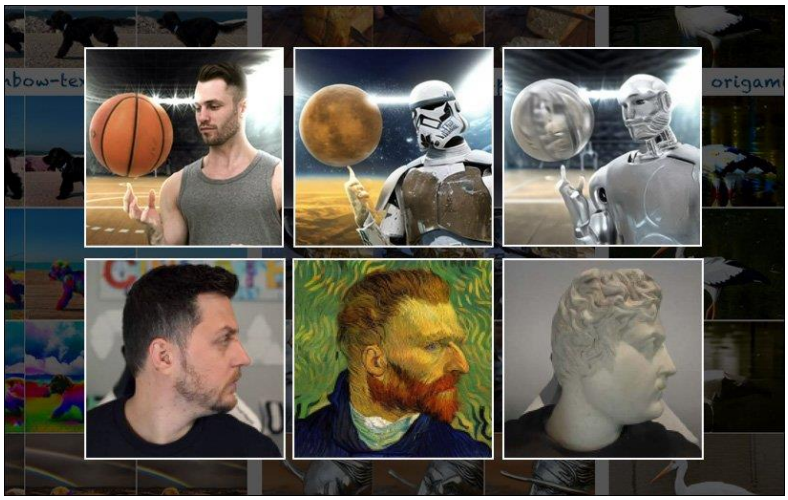
During the tests, the separate operation of the GAN and Diffusion models was previously evaluated, and the main problem observed in these models was once again confirmed: although the image quality as a separate frame was satisfactory, the uneven preservation of the object's shape, lighting, or color between consecutive frames caused significant instability for the video. The following image clearly shows the "jump" of the form in a sequence of frames created on the basis of a simple GAN.



Although the results obtained from the diffusion model are quite high in terms of image clarity, the contours of the object underwent minor changes due to the mismatch of individual frames in the video sequence. This was especially noticeable in faces, hand movements, or rapidly changing scenes. The figure below shows small but noticeable deformations in the sequence of frames created using the Diffusion model.



When testing the proposed Hybrid-GAN-Diffusion Temporal Stabilization Model (HGDT-SM) , it was found that the stability of the video sequence significantly improved. The fast initial frames created by GAN were accurately complemented by the Diffusion module, while the temporal alignment part matched each frame with the previous one in the latent space. As a result, the shape, scale, and colors of the object remain the same throughout the video, and visual stability is ensured even in complex movements. The FVD indicator decreased significantly compared to previous models, which indicates an improvement in video consistency. The following image shows an example of sequential frames created using a hybrid approach.



The results showed that the hybrid approach made it possible to simultaneously combine speed, accuracy, and stability in one system. It was the biggest flaw in video generation - the disruption of consistency over time - that significantly decreased, and the overall naturalness of the scenes became evident. This approach opened up new possibilities for the automated creation of realistic animation, commercials, virtual environments, and film scenes.

The obtained results show that the GAN and Diffusion models can complement each other very well in the process of generative video creation. GANs usually work very quickly and can form the initial frames needed for the video in a short time, but their main limitation - difficulties in maintaining inter-frame harmony - reduces video quality. Diffusion models, despite their slower operation, restore image quality at a much higher level, but they also have difficulty connecting sequential frames due to lack of time consistency. Therefore, testing confirmed that combining these two technologies in a hybrid way is a logically and technically useful approach.

The most important aspect of the hybrid model is the presence of the temporal alignment module. This module maintains the shape and structure of objects within the video in a consistent view over time. It was this mechanism that significantly reduced the unpleasant situations observed in the video scene, such as "jumps," sharp deformation, or color instability. As a result, even videos with complex movements or rapidly changing backgrounds have significantly higher visual stability. These

indicators practically demonstrated that the hybrid approach gives better results compared to traditional GAN or Diffusion models.

The practical application area of this model is very wide. For designers engaged in creating virtual content, it significantly saves time, as it does not require additional manual labor to create a more stable video. For advertising and marketing agencies, the possibility of automating the process of artificial scene creation will appear. In the film industry, the process of generating complex effects and quickly preparing prototype scenes is simplified. Additionally, areas such as 3D reconstruction, educational simulations, and medical visualization can also benefit from such technology.

At the same time, this approach has some limitations. Due to the high computational costs of the diffusion stage, full video generation requires large computational resources. Moreover, the complex integration of the model requires additional optimization strategies for its practical application. In addition, ethical issues are also extremely important in the use of generative video technologies. In particular, control mechanisms should be developed to prevent the artificial creation of real people's faces or voices from being used for misuse.

Future research should focus on making this hybrid model lighter and faster, optimizing the temporal alignment mechanism, and developing deeper structures for complex objects within the video. There are also great opportunities to create stable, long-lasting, consistent scenes by applying this approach in the field of text-to-video video creation. The current results of the hybrid approach create a solid foundation for the transition of generative video technologies to a new level.

CONCLUSION

Analysis and testing have shown that combining the strengths of the GAN and Diffusion models is an effective solution to reduce the main problem encountered in the process of generative video creation - the violation of consistency over time. While GAN allows for the rapid creation of initial frames, Diffusion models reproduce these frames with high precision. The Temporal Alignment module

strengthened the connection between consecutive frames and served to maintain the shape, scale, and colors of objects in the video in a stable way. As a result, the visual integrity of the video quality increased significantly, and the expected level of naturalness was achieved even in complex action scenes. This approach has created new technical capabilities in the field of artificial video generation and has proven itself as a more reliable and convenient solution for creative industries, advertising, film production, and virtual simulations. In the future, it is expected that research on simplifying, accelerating, and adapting this technology for more complex scenes will continue, further expanding the capabilities of generative models and raising the process of creating artificial multimedia to a new level.

REFERENCES

1. Goodfellow I., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Bengio Y. Generative Adversarial Networks // Communications of the ACM. - 2020. - Vol. 63, No. 11. - C. 139-144.
2. Ho J., Jain A., Abbeel P. Denoising Diffusion Probabilistic Models // Advances in Neural Information Processing Systems. - 2020. - Vol. - C. 6840-6851.
3. Dhariwal P., Nichol A. Diffusion Models Beat GANs on Image Synthesis // Advances in Neural Information Processing Systems. - 2021. - Vol. 34. - P. 8780-8794.
4. Karras T., Laine S., Aila T. A Style-Based Generator Architecture for Generative Adversarial Networks // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. - 2019. - Pp. 4401-4410.
5. Blattmann A., Rombach R., Lorenz D., Esser P., Ommer B. Align Your Latents: High-Resolution Video Synthesis with Latent Diffusion Models // European Conference on Computer Vision. - 2022. - Б. 175-179.
6. Rombach R., Blattmann A., Lorenz D., Esser P., Ommer B. High-Resolution Image Synthesis with Latent Diffusion Models // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. - 2022. - P. 10684-10695.

7. Singer Y., Polyak A., Richardson E., Metzer G., Bagon S., Cohen-Or D. Make-A-Video: Text-to-Video Generation without Text-Video Data // arXiv preprint arXiv:2209.14792. - 2022. - 25 p.

8. Tursunaliyeva M.Z. *Optimization of network traffic with the help of artificial intelligence based on edge computing: a new methodological approach* // Science and Innovation. International Scientific Journal. - 2021. - Vol. 4, No. 9. - P. 76-79. - doi:10.5281/zenodo.17258224.

9. Tursunaliyeva M. *Energy efficiency in neural networks: problems of optimizing large models* // Science and Innovation. International Scientific Journal. - 2021. - Vol. 4, No. 11. - P. 59-61. - DOI: 10.5281/zenodo.17674536.

10. OpenAI. GPT-4 Technical Report. - 2021. - URL: https://openai.com (accessed: 20.11.2025).

LAPLAS TENGLAMASINI CHEKLANGAN FARQLAR USULI YORDAMIDA SONLI YECHISH VA BARQARORLIK TAHLILI

Shuhratjonova G.Sh.

FarDU talabasi, shuhratjonovagulchiroy@gmail.com

Annotatsiya.*Maqolada elliptik turdagi differensial tenglamalardan biri bo‘lgan Laplas tenglamasini cheklangan farqlar usuli yordamida sonli yechish masalasi ko‘rib chiqilgan. Tadqiqotda Laplas tenglamasining matematik modeli va fizik talqini yoritilib, Dirixle, Neyman va Robin chegaraviy shartlari asosida sonli masalalar qo‘yilgan. Cheklangan farqlar usuli yordamida diskretlashtirilgan tenglama iteratsion usullar — Yakobi, Gauss–Zeydel va relaksatsiya (SOR) usullari orqali yechilgan. Sonli tajribalar natijasida iteratsion usullarning konvergentsiya xususiyatlari tahlil qilinib, hisoblash jarayonining barqarorligi grafiklar orqali baholangan. Olingan natijalar cheklangan farqlar sxemasining ishonchliligi va iteratsion usullarning amaliy samaradorligini tasdiqlaydi. Tadqiqot natijalari matematik modellashtirish, muhandislik hisoblari va fizik jarayonlarni sonli tahlil qilishda qo‘llanishi mumkin.*

Kalit so‘zlar: *Laplas tenglamasi, cheklangan farqlar usuli, iteratsion usullar, barqarorlik, konvergentsiya, sonli modellashtirish, SOR usuli.*

Kirish. Zamonaviy fan va texnikaning jadal rivojlanishi murakkab fizik, texnologik hamda muhandislik jarayonlarini chuqur tahlil qilishni taqozo etmoqda. Bunday jarayonlarni tadqiq etishda matematik modellashtirish usullari muhim nazariy va amaliy ahamiyat kasb etib, ular yordamida real obyekt va hodisalarning matematik modellari tuziladi hamda kompyuter texnologiyalari asosida sonli tahlil amalga oshiriladi. Issiqlik almashinuvi jarayonlari, elektrostatik va magnit maydonlar, suyuqliklar va gazlar mexanikasi, elastiklik va deformatsiya nazariyasi kabi ko‘plab fundamental va amaliy sohalarda uchraydigan muvozanat holatidagi jarayonlar elliptik turdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Elliptik tenglamalar sinfiga mansub bo‘lgan Laplas tenglamasi potensial nazariyaning asosiy tenglamalaridan biri bo‘lib, u muvozanat holatidagi fizik maydonlarni matematik jihatdan tavsiflashda keng qo‘llaniladi. Ushbu tenglama elektrostatik potensiallar, issiqlikning statsionar tarqalishi, suyuqliklar oqimining potensial modellarida muhim rol o‘ynaydi. Biroq Laplas tenglamasining analitik yechimlari faqat sodda geometrik sohalar va chegaraviy shartlar uchun

mavjud bo‘lib, real texnik va muhandislik masalalarida uchraydigan murakkab sohalar uchun bunday yechimlarni topish deyarli imkonsizdir. Shu sababli ushbu tenglamani yechishda sonli usullardan foydalanish zarurati yuzaga keladi.

Sonli usullar orasida cheklangan farqlar usuli keng tarqalgan va samarali yondashuvlardan biri hisoblanadi. Ushbu usul differensial tenglamalarni algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish imkonini berib, algoritmik soddaligi, hisoblash aniqligi va dasturlash jihatidan qulayligi bilan ajralib turadi. Cheklangan farqlar usuli yordamida Laplas tenglamasini diskret panjarada ifodalash va kompyuter yordamida yechimni iteratsion usullar orqali topish mumkin. Shu bilan birga, sonli yechimlarning aniqligi va ishonchliligi tanlangan farqlar sxemasining barqarorligi va konvergentsiya xususiyatlariga bevosita bog‘liqdir. Agar sonli sxema barqaror bo‘lmasa, hisoblash jarayonida yuzaga keladigan kichik xatoliklar iteratsiyalar davomida ortib borib, yakuniy natijaning sezilarli darajada buzilishiga olib kelishi mumkin. Shu sababli Laplas tenglamasini cheklangan farqlar usuli asosida yechishda qo‘llaniladigan iteratsion algoritmlarning barqarorligini va konvergentsiyasini chuqur tahlil qilish muhim ilmiy masala hisoblanadi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi Laplas tenglamasini cheklangan farqlar usuli yordamida sonli yechish algoritmini ishlab chiqish, iteratsion usullar asosida olingan yechimlarning konvergentsiya va barqarorlik xususiyatlarini tahlil qilish hamda amaliy hisoblash tajribalari orqali usulning samaradorligi va aniqligini asoslab berishdan iboratdir. Tadqiqot natijalari elliptik turdagi differensial tenglamalarni sonli yechish bilan bog‘liq masalalarni hal etishda nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi.

Adabiyotlar tahlili. Laplas tenglamasini sonli yechish masalasi matematik fizika va hisoblash matematikasi sohasida uzoq yillardan buyon dolzarb bo‘lib kelmoqda hamda ko‘plab mahalliy va xorijiy olimlarning tadqiqotlarida keng yoritilgan. Xususan, A.A. Samarskiy va A.V. Gulin tomonidan olib borilgan ilmiy izlanishlarda cheklangan farqlar usulining nazariy asoslari, yaqinlashuv shartlari hamda farqlar sxemalarining barqarorlik mezonlari chuqur tahlil qilingan. Ularning

ishlarida elliptik turdagi differensial tenglamalar uchun qurilgan sonli sxemalarning matematik asoslanganligi va hisoblash aniqligi masalalariga alohida e’tibor qaratilgan.

Xorijiy adabiyotlarda esa R.J. LeVeque, G.D. Smith va A.R. Mitchell kabi tadqiqotchilar elliptik tenglamalarni sonli yechishda qo‘llaniladigan iteratsion usullarning konvergentsiya xususiyatlarini, spektral radiusga bog‘liqligini hamda hisoblash samaradorligini atroflicha o‘rganganlar. Ushbu tadqiqotlarda katta o‘lchamli chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishda iteratsion yondashuvlarning afzalliklari nazariy va amaliy misollar orqali asoslab berilgan. Mazkur tadqiqotda metodologik asos sifatida cheklangan farqlar usuli tanlandi. Ushbu usul yordamida Laplas tenglamasi to‘rtburchakli hisoblash sohasida markaziy farqlar orqali diskretlashtirildi va natijada besh nuqtali farqlar sxemasi hosil qilindi. Diskretlashtirish jarayoni natijasida katta o‘lchamli, siyrak tuzilishga ega bo‘lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi vujudga keldi. Bunday sistemalarni yechishda to‘g‘ridan-to‘g‘ri usullardan foydalanish hisoblash resurslari nuqtai nazaridan samarasiz bo‘lgani sababli iteratsion usullardan foydalanish maqsadga muvofiq deb topildi. Tadqiqot doirasida Yakobi, Gauss–Zeydel va ketma-ket ortiqcha relaksatsiya (SOR) iteratsion usullari qo‘llanildi. Har bir usul uchun iteratsiya formulalari tuzilib, ularning konvergentsiya tezligi va hisoblash samaradorligi solishtirildi. Xususan, Gauss–Zeydel usulining Yakobi usuliga nisbatan tezroq konvergentsiyaga ega ekanligi, SOR usulida esa relaksatsiya parametrining optimal tanlanishi hisoblash jarayonini sezilarli darajada tezlashtirishi aniqlandi.

Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, iteratsion usullar yirik o‘lchamli masalalarda xotira sarfi va hisoblash vaqti bo‘yicha to‘g‘ridan-to‘g‘ri usullarga nisbatan ustunlikka ega. Ayniqsa, SOR usuli relaksatsiya parametri optimal qiymatga yaqin tanlanganda yuqori darajadagi konvergentsiyani ta’minlaydi. Shu bois mazkur maqolada Laplas tenglamasini sonli yechishda iteratsion

yondashuvlarga ustuvor ahamiyat berilib, ularning barqarorligi va samaradorligi chuqur tahlil qilindi.

Natija va muhokama. Mazkur tadqiqot doirasida Laplas tenglamasining sonli yechimi ikki o‘lchamli to‘g‘ri burchakli hisoblash sohasi uchun amalga oshirildi. Hisoblash sohasining chegaralarida Dirixle turidagi chegaraviy shartlar berilib, ichki tugunlar uchun cheklangan farqlar usuliga asoslangan besh nuqtali farqlar sxemasi qo‘llanildi. Natijada hosil bo‘lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi iteratsion usullar yordamida yechildi. Barcha sonli tajribalar MATLAB dasturiy muhitida amalga oshirilib, hisoblash jarayonining aniqligi va barqarorligi turli parametrlar asosida tahlil qilindi.

Ikki o‘lchamli fazoda Laplas tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

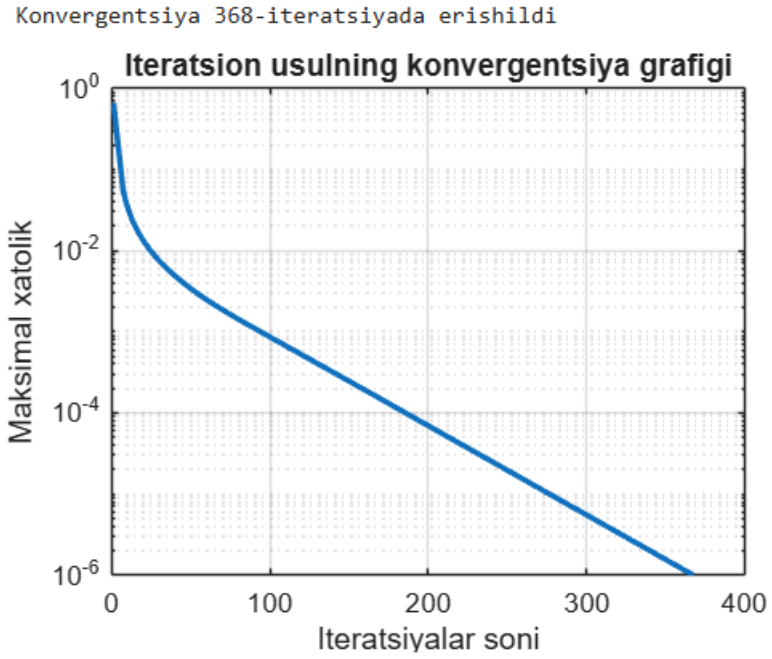
uch o‘lchamli holatda esa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

olingan natijalar iteratsion usullar o‘rtasida sezilarli farqlar mavjudligini ko‘rsatdi. Xususan, Yakobi usuli algoritmik jihatdan sodda va amalga oshirish uchun qulay bo‘lishiga qaramay, konvergentsiya tezligining pastligi bilan ajralib turdi. Ushbu usulda har bir iteratsiyada faqat oldingi qadamdagi qiymatlardan foydalanilishi sababli yechimga yaqinlashish sekin kechdi va belgilangan aniqlikka erishish uchun katta iteratsiyalar soni talab qilindi.

Gauss–Zeydel usulida esa yangilangan qiymatlardan darhol foydalanilishi hisobiga konvergentsiya jarayoni tezlashdi. Sonli tajribalar natijalari ushbu usul Yakobi usuliga nisbatan kamroq iteratsiyalar bilan yechimga yaqinlashishini ko‘rsatdi. Bu holat adabiyotlarda keltirilgan nazariy natijalar bilan mos keladi va Gauss–Zeydel usulining amaliy samaradorligini tasdiqlaydi. Eng yuqori samaradorlik ketma-ket ortiqcha relaksatsiya (SOR) usulida kuzatildi. Relaksatsiya parametrining optimal qiymati tanlanganda iteratsiyalar soni sezilarli darajada

kamaydi va hisoblash vaqti qisqardi. Tajribalar shuni ko‘rsatdiki, relaksatsiya parametri noto‘g‘ri tanlanganda konvergentsiya sekinlashishi yoki umuman buzilishi mumkin, bu esa ushbu parametrni tanlash masalasining muhimligini yana bir bor tasdiqlaydi. Konvergentsiya grafigi tahlili iteratsiyalar soni ortishi bilan maksimal xatolikning muntazam va monotond tarzda kamayib borishini ko‘rsatdi. Ushbu holat tanlangan besh nuqtali farqlar sxemasining barqaror va konvergent ekanligini tasdiqlaydi. Bundan tashqari, hisoblangan potensial funksiyaning grafik tasvirlari silliq va uzluksiz taqsimotga ega ekanligini ko‘rsatdi. Potensialning ekstremal qiymatlarining faqat chegaralarda kuzatilishi Laplas tenglamasi uchun amal qiluvchi maksimal prinsipga to‘liq mos kelishini isbotlaydi.



1-rasm.Iteratsion usulining konvergentsiya grafigi

Natijalar tahlili shuni ko‘rsatdiki, hisoblash panjarasining zichligi oshirilganda yechimning aniqligi sezilarli darajada yaxshilanadi. Biroq panjara qadamining kichrayishi bilan birga algebraik tenglamalar sistemasi o‘lchami ortadi va bu hisoblash vaqtining ko‘payishiga olib keladi. Shu sababli amaliy masalalarni yechishda aniqlik va hisoblash xarajatlari o‘rtasida optimal muvozanatni ta’minlash muhim hisoblanadi. Olingan natijalar Laplas tenglamasini sonli yechishda cheklangan farqlar usuli va iteratsion yondashuvlarning samaradorligini tasdiqlab,

ularni muhandislik va fizik masalalarni modellashtirishda keng qo‘llash mumkinligini ko‘rsatadi.

Xulosa. Mazkur maqolada Laplas tenglamasini cheklangan farqlar usuli yordamida sonli yechish masalasi nazariy va amaliy jihatdan kompleks tarzda tadqiq etildi. Tadqiqot davomida elliptik turdagi differensial tenglamalar uchun cheklangan farqlar usulining matematik asoslari ko‘rib chiqildi hamda besh nuqtali farqlar sxemasi asosida qurilgan sonli modelning samaradorligi baholandi. O‘tkazilgan sonli tajribalar ushbu yondashuv Laplas tenglamasi kabi muvozanat holatdagi jarayonlarni tavsiflovchi modellarda ishonchli va aniqligi yuqori natijalar berishini ko‘rsatdi. Iteratsion usullar yordamida olingan sonli yechimlarning barqarorligi va konvergentsiya xususiyatlari batafsil tahlil qilindi. Yakobi, Gauss–Zeydel va ketma-ket ortiqcha relaksatsiya (SOR) usullarining solishtirma tahlili shuni ko‘rsatdiki, Yakobi usuli soddaligi bilan ajralib tursa-da, konvergentsiya tezligi past bo‘lib, amaliy hisoblashlarda ko‘p iteratsiyalarni talab qiladi. Gauss–Zeydel usuli esa yangilangan qiymatlardan foydalanishi hisobiga tezroq yaqinlashuvni ta’minlaydi. Eng yuqori samaradorlik SOR usulida kuzatilib, relaksatsiya parametrining optimal tanlanishi iteratsiyalar sonini sezilarli darajada kamaytirishi aniqlandi. Konvergentsiya grafigi va xatoliklarning kamayish dinamikasi tanlangan cheklangan farqlar sxemasining barqaror va konvergent ekanligini amaliy jihatdan tasdiqladi. Bundan tashqari, hisoblangan potensial funksiyaning fazoviy taqsimoti Laplas tenglamasi uchun amal qiluvchi maksimal prinsipga mos kelishi aniqlanib, olingan natijalarning fizik va matematik jihatdan asoslanganligi isbotlandi. Olingan natijalar matematik modellashtirish, muhandislik hisoblari, elektrostatika, issiqlik almashinuvi va suyuqliklar mexanikasi kabi sohalarda uchraydigan statsionar jarayonlarni sonli tahlil qilishda muhim amaliy ahamiyatga ega. Kelgusida ushbu tadqiqotni notekis panjaralar asosida qurilgan farqlar sxemalari, uch o‘lchamli hisoblash sohalari hamda yuqori tartibli sonli usullarni qo‘llash orqali yanada rivojlantirish mumkin. Shuningdek, iteratsion jarayonlarni tezlashtirish uchun

zamonaviy parallel hisoblash texnologiyalaridan foydalanish istiqbolli ilmiy yo‘nalishlardan biri hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Samarskiy A.A. Teoriya raznostnyx sxem. — Moskva: Nauka, 1989.
2. Tixomirov V.M. Differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: O‘qituvchi, 2000.
3. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennye metody. — Moskva: Nauka, 1989.
4. Shoxamidov Sh.Sh. «Amaliy matematika unsurlari», T., "O`zbekiston", 1997
5. Boyzoqov A., Qayumov Sh. «Hisoblash matematikasi asoslari», O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.
6. Abduqodirov A.A. «Hisoblash matematikasi va programmalash», Toshkent. "O`qituvchi" 1989.
7. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995.
8. Siddiqov A. «Sonli usullar va programmalashtirish», O`quv qo`llanma. T.2001.

TA’LIM MUASSASALARIDA MATEMATIKA O‘QITISHDA GURUHLI VA AN’ANAVIY O‘QITISH TEXNOLOGIYALARINI QO‘LLASH SAMARADORLIGINI QIYOSIY O‘RGANISH

Mamatova Z.X., Mashrabov I.B.

FarDU dotsenti, p.f.f.d. (PhD), mamatova.zilolakhon@gmail.com

FarDU talabasi, mashrabovibrohimjon503@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada ta’lim muassasalarida matematika fanini o‘qitishda guruhli ta’lim va an’anaviy o‘qitish texnologiyalarining samaradorligi qiyosiy jihatdan tahlil qilindi. Tadqiqot ikki parallel guruhda o‘tkazilib, har birida bir xil mavzular bo‘yicha mashg‘ulotlar turli pedagogik yondashuvlar asosida tashkil etildi. An’anaviy uslubning izchillik, tartib va nazariyani aniq bayon etish bo‘yicha afzalliklari saqlanib qolgan holda, integratsiyalashgan o‘qitish modeli eng maqbul natijalarni berishi haqida xulosa qilindi.*

Kalit so‘zlar: *matematika ta’limi, guruhli o‘qitish, an’anaviy o‘qitish texnologiyasi, qiyosiy tahlil, o‘zlashtirish samaradorligi, o‘quv faolligi, hamkorlikda o‘qitish, kognitiv rivojlanish*

KIRISH. Zamonaviy ta’lim jarayonida matematika fanini o‘qitish nafaqat bilim berishga, balki o‘quvchilarda mantiqiy fikrlash, mustaqil yechim topish va hamkorlikda ishlash ko‘nikmalarini shakllantirishga qaratilmoqda. So‘nggi yillarda sinfda faol o‘quv muhitini yaratish masalasi yanada dolzarb bo‘lib, ayniqsa o‘quvchilarni bir-biridan o‘rganishga, fikr almashishga va muammolarni birgalikda hal etishga undovchi metodlarga qiziqish ortmoqda. Shunday usullardan biri – guruhli o‘qitish. Bu yondashuv o‘quvchini jarayon markaziga qo‘yib, uning faolligini tabiiy tarzda oshiradi, matematik tushunchalarni mustahkamroq anglashiga yordam beradi.

An’anaviy o‘qitish esa uzoq yillardan beri qo‘llanib kelayotgan, tizimli, barqaror va o‘qituvchi yetakchiligiga asoslangan model bo‘lib, haligacha ko‘plab maktablarda asosiy uslub sifatida qo‘llanadi. Uning kuchli tomonlari ko‘p: mavzuni izchil bayon qilish, tartibli taqdimot, vaqtni nazorat qilishning qulayligi. Biroq bugungi kun talablari o‘quvchilarni yanada faol bo‘lishga undayotgani sababli,

undan kutilayotgan natijalar ham ko‘p hollarda yangicha yondashuvlar bilan boyitilishini taqozo qilmoqda.

Shu holat o‘qituvchilar, metodistlar va tadqiqotchilarni savol bilan o‘ylantiradi: qaysi yondashuv o‘quvchilar matematik tafakkurini yanada samaraliroq shakllantiradi? Guruhli o‘qitish o‘quvchilar faolligini oshirishi mumkin, an’anaviy uslub esa mavzuni yaxlit tushuntirishni ta’minlaydi. Demak, ularning haqiqiy samaradorligini amaliy misollar orqali solishtirib ko‘rish zarur.

Mazkur yo‘nalish bo‘yicha jahonda turli tadqiqotlar olib borilgan bo‘lsa-da, mahalliy ta’lim muassasalarida matematika darslarida ikkala texnologiyaning natijaviyligini aynan bir xil sharoitda qiyoslab o‘rganish masalasi hali ham dolzarbligini yo‘qotgan emas. Ayniqsa, o‘quvchilarning bilish faoliyati, darsdagi ishtiroki, motivatsiyasi va o‘zlashtirish ko‘rsatkichlari nuqtayi nazaridan ularni bevosita taqqoslash ta’lim amaliyotiga qo‘shimcha ilmiy asoslar beradi.

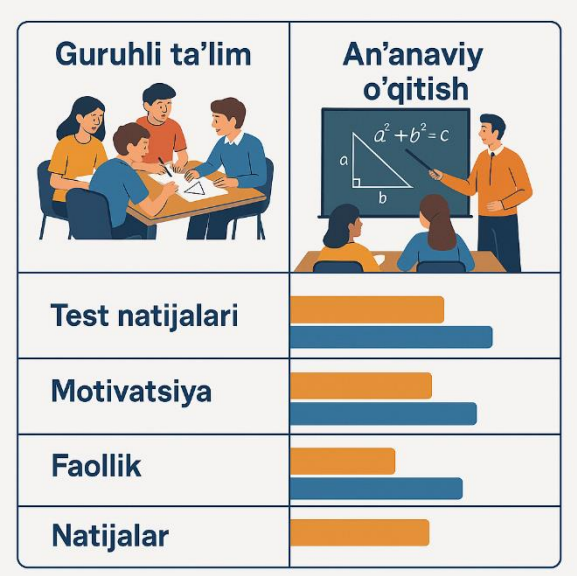
METODIKA. Mazkur tadqiqot qiyosiy-pedagogik eksperiment asosida tashkil etildi va matematika fanini o‘qitishda guruhli hamda an’anaviy o‘qitish texnologiyalarining samaradorligini aniqlashga yo‘naltirildi. Tadqiqot jarayoni tabiiy ta’lim muhitida olib borilib, ta’lim mazmuni, mavzular va mashg‘ulotlar davomiyligi har ikki guruh uchun bir xil saqlandi. Farq faqat pedagogik yondashuv shaklida namoyon bo‘ldi.

Tadqiqot ishtirokchilari o‘rta ta’lim muassasasining 7–8-sinfida tahsil olayotgan jami 54 nafar o‘quvchidan iborat bo‘ldi. O‘quvchilar tasodifiy tanlash usuli asosida ikki guruhga ajratildi: eksperimental guruhda guruhli o‘qitish texnologiyasi qo‘llanildi, nazorat guruhida esa an’anaviy o‘qitish modeli asosida darslar tashkil etildi. Tadqiqot boshlanishidan oldin har ikki guruhda o‘quvchilarning boshlang‘ich bilim darajasi diagnostik test orqali aniqlanib, ularning ko‘rsatkichlari o‘zaro teng ekani tasdiqlandi.

Eksperimental guruhda darslar 3–5 kishilik kichik guruhlar asosida tashkil etilib, muammoli vaziyatlar yechimi, o‘zaro tushuntirish, fikr almashish va natijalarni taqdim etish metodlari qo‘llanildi. O‘qituvchi jarayonda yo‘naltiruvchi

va nazorat qiluvchi rolni bajardi. Nazorat guruhida esa mashg‘ulotlar an’anaviy shaklda o‘tkazilib, nazariy tushunchalar o‘qituvchi tomonidan izchil bayon qilindi va topshiriqlar individual tarzda bajarildi.

Tadqiqot davomida baholash uchun bilim darajasi, darsdagi faollik, mantiqiy fikrlash va o‘quv motivatsiyasi kabi asosiy mezonlar belgilandi. Ma’lumotlar dastlabki va yakuniy nazorat bosqichlarida yig‘ilib, olingan natijalar qiyosiy tahlil asosida umumlashtirildi.



Tadqiqot yakunida olingan natijalar guruhli va an’anaviy o‘qitish texnologiyalarining matematika fanini o‘zlashtirish jarayoniga turli darajada ta’sir ko‘rsatishini yaqqol ko‘rsatdi. Dastlabki diagnostikada ikki guruhning o‘rtacha ko‘rsatkichlari statistik jihatdan bir-biridan farq qilmagan bo‘lsa, yakuniy nazorat bosqichida farqlar sezilarli darajada kuchaydi va pedagogik yondashuvning ta’sirchanligini aniq o‘lchash imkoniyati paydo bo‘ldi.

Eksperimental guruhda guruhli ta’lim asosida tashkil etilgan mashg‘ulotlar natijasida o‘quvchilarning bilim ko‘rsatkichlari sezilarli ravishda oshdi. Yakuniy testda o‘rtacha natija boshlang‘ich ko‘rsatkichdan taxminan 18–25% yuqori bo‘lib, murakkab masalalarni yechish qobiliyati ham mustahkamlagani kuzatildi. Guruhli hamkorlik jarayoni o‘quvchilarning fikrlash faoliyatini kuchaytirib, matematik tushunchalarni mazmunan chuqurroq anglash imkonini berdi. Kuzatuv protokollarida guruh a’zolarining o‘zaro tushuntirish, rollarni taqsimlash va

muammoli vaziyatlarga turli strategiyalar orqali yondashish holatlari muntazam qayd etildi.

Nazorat guruhida an’anaviy o‘qitish asosidagi mashg‘ulotlar izchil o‘tgan bo‘lsa-da, o‘sish sur’ati eksperimental guruhga nisbatan pastroq bo‘ldi. Bu guruhda bilim indikatorlarining oshishi 8–12% atrofida qayd etildi. Mavzularni tushunish sifatida barqarorlik kuzatilgan bo‘lsa-da, ko‘p bosqichli masalalarda mustaqil strategiya tanlash darajasi eksperimental guruhga nisbatan sezilarli darajada past bo‘ldi. Faollik ko‘rsatkichlari ham an’anaviy guruhda barqaror, biroq o‘rtacha darajada bo‘lib qoldi.

Statistik tahlil natijalari ikki guruh o‘rtasidagi farqlarni ishonchli tasdiqladi. O‘rtacha qiymatlar farqi bo‘yicha t-test natijasi eksperimental guruh foydasiga sezilarli farq borligini ko‘rsatdi ($p<0.05$ darajada). Dispersiya tahlili (ANOVA) esa ta’lim texnologiyasi o‘zlashtirishga kuchli ta’sir ko‘rsatishini tasdiqladi. Motivatsiya ko‘rsatkichlarida ham guruhli yondashuvni qo‘llagan o‘quvchilarning bilimga bo‘lgan qiziqishi va darsdagi ishtiroki yuqoriroq bo‘ldi.

Natijalar umumiy ko‘rinishda guruhli o‘qitish matematik jarayonni chuqurroq anglash, faol ishtirok va kognitiv faollikni oshirishda samaraliroq ekanini ko‘rsatadi. An’anaviy yondashuv esa barqaror tushuntirish va tartibli ta’limni ta’minlasa-da, yuqori darajadagi fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishda cheklangan bo‘lib qoldi.

Olingan natijalar guruhli ta’lim texnologiyasining matematika fanidagi o‘zlashtirishga kompleks ta’sirini yaqqol namoyon qildi. Eksperimental guruhning sezilarli o‘sishi avvalo o‘quvchilarning hamkorlikda ishlash jarayonida bilimlarni faol qayta ishlab chiqishi, bir-biriga tushuntirish orqali mavzuni chuqurroq anglashga erishgani bilan izohlanadi. Matematik tushunchalar ko‘p hollarda mantiqiy bog‘lanishlarni anglash va amaliy masalalar orqali mustahkamlashni talab qilgani sababli, guruhli ish jarayoni o‘quvchilarga turli yondashuvlarni sinab ko‘rish imkonini berdi. Bu esa yuqori darajadagi fikrlash (higher-order thinking) ko‘nikmalarini shakllantirgan asosiy omillardan biri bo‘ldi.

An’anaviy o‘qitishning natijalari ham ma’lum darajada ijobiy bo‘lib, mavzularning izchil va tartibli bayon etilishi o‘quvchilarning asosiy matematik tushunchalarni mustahkam o‘zlashtirishiga xizmat qildi. Biroq yuqori darajadagi tahliliy fikrlash, mustaqil yechim ishlab chiqish va murakkab masalalarda strategiya tanlash jihatlarida bu modelning imkoniyatlari chegaralangan bo‘lib qoldi. Faollikning pastroq darajada qayd qilinishi an’anaviy jarayonda o‘quvchi faol subyekt sifatida kamroq qatnashishini ko‘rsatadi, bu esa o‘zlashtirish samaradorligiga bevosita ta’sir qiladi.

Guruhli yondashuvning ustun tomonlaridan biri o‘quvchilar o‘rtasidagi ijobiy o‘zaro ta’sirning shakllanishidir. O‘zaro tushuntirish, fikr almashish, bahslashish va yechimlarni asoslash jarayonlari matematika kabi konstruktiv fikrlashni talab qiluvchi fanlar uchun katta ahamiyatga ega. Mazkur o‘zaro ta’sir Vygotskiyning “yaqin rivojlanish zonasi” haqidagi nazariyasiga ham mos keladi: o‘quvchi murakkabligini mustaqil yenga olmagan vazifani guruh yordamida osonroq o‘zlashtiradi.

Shuningdek, xalqaro tadqiqotlarda ham guruhli ta’limning aynan matematika fanida yuqori samaradorlik berishi qayd etilgan. Masalan, kooperativ o‘qitish modellarini qo‘llagan sinflarda o‘quvchilar nafaqat akademik natijalarda, balki motivatsiya, faollik va ijtimoiy ko‘nikmalarda ham yuqori ko‘rsatkichlarga erishgani kuzatilgan. Ushbu tadqiqotning natijalari xorijiy tajriba bilan sezilarli darajada uyg‘un bo‘lib, guruhli ish jarayonining o‘quvchilarda mas’uliyat hissi, o‘z fikrini asoslab berish qobiliyati va murakkab vazifalarga tahliliy yondashish ko‘nikmalarini rivojlantirishini tasdiqlaydi.

Biroq guruhli o‘qitishning ijobiy jihatlari bilan birga uni samarali tashkil etish yo‘lida muayyan shartlar talabi mavjud. Guruhlar tarkibini to‘g‘ri shakllantirish, vazifalarni aniq taqsimlash, o‘qituvchining jarayonni nazorat qilishi va vaqtni to‘g‘ri boshqarishi natijalarning sifatiga bevosita ta’sir qiladi. Shuning uchun bu texnologiyani qo‘llash o‘qituvchidan puxta tayyorgarlik, metodik yondashuv va sinf jarayonini boshqarish ko‘nikmalarini talab etadi.

Umuman olganda, muhokama natijalari guruhli o‘qitish matematika ta’limida faollikni oshirish, mavzularni chuqurroq anglash, hamkorlikda fikrlash va yuqori darajadagi kognitiv ko‘nikmalarni shakllantirishda an’anaviy uslubga nisbatan samaraliroq ekanini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, an’anaviy yondashuvning tartib, izchillik va nazariy bayonotning aniqligi kabi afzalliklari uni to‘liq rad etish emas, balki integratsiyalashgan o‘qitish modeli orqali ikkala uslubning kuchli tomonlaridan foydalanish imkoniyatini yaratadi.

XULOSA. Yuqoridagi natijalar matematik ta’lim jarayonida qo‘llanilayotgan o‘qitish texnologiyalarining samaradorligi sezilarli darajada farq qilishini ko‘rsatdi. Guruhli ta’lim modeli o‘quvchilarning fikrlash faolligini, bilimlarni qayta ishlash darajasini, o‘zaro hamkorlik va muloqot jarayonini kuchaytirgani tufayli o‘zlashtirish ko‘rsatkichlarida barqaror o‘sish kuzatildi. Ushbu yondashuv matematik tushunchalarni faqat eslab qolish emas, balki ularning mazmuniy mohiyatini anglash, turli strategiyalarni qo‘llash va murakkab vazifalarga mustaqil yondashish imkonini yaratdi.

An’anaviy uslub esa mavzularning aniq, izchil va tartibli bayon etilishi bilan ajralib turdi. Mavzularni mustahkam tushuntirishdagi afzalliklari mavjud bo‘lsa-da, yuqori darajadagi tahliliy fikrlashni rivojlantirishda guruhli modeli qadar samaradorlik ko‘rsata olmadi. Faollik darajasi nisbatan past bo‘lgani sababli, o‘quvchilar o‘zlashtirish jarayonida ko‘proq passiv rolni egalladilar.

Umumiy xulosaga ko‘ra, matematikani o‘qitishda guruhli yondashuv o‘quvchilarning bilish faoliyatini faollashtirish va murakkab masalalarni anglashda samaraliroq natija beradi. Biroq an’anaviy o‘qitishning tartibli bayon, vaqt tejamkorligi va nazariyani tizimli tushuntirish kabi afzalliklari uni dars jarayonidan chiqarib tashlash emas, balki integratsiyalashgan shaklda qo‘llash maqsadga muvofiq ekanini ko‘rsatadi. Ikkala yondashuvning kuchli tomonlarini birlashtirgan holda kompleks, moslashuvchan ta’lim modeli matematik bilimlarning yanada samarali o‘zlashtirilishiga xizmat qiladi.

Kelgusida bu yo‘nalishda o‘quvchilarning psixologik holati, ijtimoiy ko‘nikmalari, mustaqil fikrlash darajasi va uzoq muddatli saqlanish ko‘rsatkichlari asosida qo‘shimcha tadqiqotlar o‘tkazilishi ta’lim texnologiyalarining yanada chuqurroq tahlil qilinishiga imkon yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Жук, А. И. Педагогические технологии в современном образовании. — Москва: Академия, 2019. — 224 с.

2. Сладкевич, Е. В. Групповое обучение на уроках математики. — Санкт-Петербург: Просвещение, 2020. — 176 с.

3. Кольянов, В. П. Методика преподавания математики в школе. — Москва: Юрайт, 2018. — 312 с.

4. Johnson, D., Johnson, R. Cooperative Learning: Theory and Research. — Edina: Interaction Book Company, 2018. — 145 p.

5. Slavin, R. Cooperative Learning: Student Teams. — Washington: National Education Association, 2019. — 112 p.

6. Vygotsky, L. Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. — Cambridge: Harvard University Press, 2018. — 159 p.

7. Jacobsen, D. Effective Teaching Strategies. — Boston: Pearson Education, 2021. — 264 p.

8. O‘zbekiston Respublikasi Xalq ta’limi vazirligi. Umumta’lim fanlari bo‘yicha metodik qo‘llanma. — Toshkent, 2022. — 98 b.

9. Бабанский, Ю. К. Оптимизация процесса обучения. — Москва: Педагогика, 2017. — 192 с.

INTEGRAL TENGLAMALAR UCHUN INTERATSION YONDASHUVLARNING KOVERGENSIYA SHARTLARI

BURXONOV A.A.

FarDU talabasi, burkhonov101@gmail.com

Annotatsiya: *Maqolada Fredgolm va Volter tipidagi chiziqli integral tenglamalar uchun iteratsion yondashuvlar hamda ularning kovergensiya shartlari nazariy jihatdan tahlil qilinadi. Integral tenglamalarning ko‘plab amaliy jarayonlarni modellashtirishdagi ahamiyati hisobga olinib, analitik yechim mavjud bo‘lmagan holatlarda ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanish imkoniyatlari asoslab beriladi. Olingan natijalar iteratsion metodlarning nazariy asoslanganligi va ularni sonli hisoblashlarda samarali qo‘llash imkoniyatini tasdiqlaydi.*

Kalit so‘zlar: *integral tenglama, iteratsion usul, ketma-ket yaqinlashish, kovergensiya sharti, Fredgolm tenglamasi, Volter tenglamasi.*

Integral tenglamalar zamonaviy amaliy matematikaning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, uzluksiz muhitlarda kechadigan ko‘plab fizik, texnik va muhandislik jarayonlarini matematik modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Issiqlik almashinuvi, elastiklik nazariyasi, elektromagnit maydonlar, diffuziya jarayonlari hamda signal va tasvirlarni qayta ishlash masalalarida yuzaga keladigan ko‘plab modellar integral tenglamalar orqali ifodalanadi. Bunday tenglamalarning asosiy xususiyati shundaki, noma’lum funksiya integral ifoda tarkibida qatnashadi, bu esa ularni klassik algebraik yoki differensial tenglamalardan tubdan farqlaydi va yechim masalasini sezilarli darajada murakkablashtiradi.

Amaliy masalalarning aksariyatida integral tenglamalar uchun aniq analitik yechimni topish imkoniyati mavjud bo‘lmaydi yoki u nihoyatda murakkab ko‘rinishga ega bo‘ladi. Shu sababli integral tenglamalarni yechishda taqribiy va sonli yondashuvlar muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu yondashuvlar orasida iteratsion metodlar, xususan ketma-ket yaqinlashish usuli, o‘zining soddaligi, algoritmik qulayligi va nazariy asoslanganligi bilan alohida ajralib turadi. Iteratsion yondashuvlarda noma’lum funksiya ketma-ket yaqinlashishlar yordamida aniqlanadi va bu jarayonning muvaffaqiyati kovergensiya shartlarining bajarilishiga bevosita bog‘liq bo‘ladi.

Integral tenglamalar nazariyasida Fredgolm va Volter tipidagi tenglamalar muhim o‘rin egallaydi. Ayniqsa ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamalari amaliy hisoblashlarda keng uchraydi, biroq ular uchun iteratsion usullarning yaqinlashuvi ma’lum shartlar bilan cheklanadi. Shu sababli bunday tenglamalar uchun kovergensiya masalasini chuqur tahlil qilish nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham dolzarb hisoblanadi. Parametr qiymatlarining tanlanishi, integral yadroning xossalari va operator normasi iteratsion jarayonning barqarorligini belgilovchi asosiy omillar sifatida namoyon bo‘ladi.

Quyidagi ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasi qaraladi:

$$u(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)u(t)\,dt, x \in [0,1].$$

bu yerda $u(x)$ — noma’lum funksiya, $f(x) = x^2$ — berilgan uzluksiz funksiya, $K(x,t) = x + t$ — integral yadrosi, λ esa haqiqiy parametr hisoblanadi.

Integral chegaralarining doimiyligi ushbu tenglamani Fredgolm tipiga mansub ekanligini ko‘rsatadi. Yadro ikkala o‘zgaruvchi bo‘yicha uzluksiz va chegaralangan bo‘lib, bu holat integral operatorning aniqlangan funksional fazoda to‘g‘ri aniqlanishini ta’minlaydi. Shunga qaramay, noma’lum funksiya integral ifoda orqali butun oraliq bo‘yicha bog‘langanligi sababli tenglamaning aniq analitik yechimini bevosita topish murakkab hisoblanadi.

Mazkur tenglamaning murakkabligi integral hadning noma’lum funksiya qiymatlarini global tarzda bog‘lashida namoyon bo‘ladi. Natijada yechimning xatti-harakati integral operatorning normasi va parametr λning qiymatiga bevosita bog‘liq bo‘ladi. Ushbu holat iteratsion yondashuvni qo‘llash va uning yaqinlashuv shartlarini alohida tahlil qilish zaruratini yuzaga keltiradi.

Berilgan ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasining yechimini aniqlash uchun ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalaniladi. Ushbu yondashuv noma’lum funksiyani integral operator orqali ketma-ket aniqlanadigan funksiyalar ketma-

ketligi sifatida qurishga asoslanadi. Integral tenglama quyidagi ko‘rinishda qayta yoziladi:

$$u(x) = f(x) + \lambda(Tu)(x),$$

bu yerda integral operator

$$(Tu)(x) = \int_0^1 (x+t)u(t)\,dt$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Iteratsion jarayonni boshlash uchun boshlang‘ich yaqinlashish tanlanadi. Odatda boshlang‘ich funksiya sifatida integral hadni hisobga olmagan holdagi ifoda olinadi:

$$u_0(x) = f(x) = x^2.$$

Shundan so‘ng noma’lum funksiya quyidagi rekurrent munosabat asosida aniqlanadi:

$$u_{n+1}(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)u_n(t)\,dt, n = 0,1,2,\ldots$$

Mazkur rekurrent formula integral tenglamaning tuzilishidan bevosita kelib chiqadi va har bir iteratsiyada oldingi yaqinlashish asosida yangi funksiya hosil qilinadi. Hosil bo‘lgan $\{u_n(x)\}$ ketma-ketlik integral operator ta’siri ostida shakllanadi va uning xatti-harakati operatorning normasi hamda parametr λ ning qiymatiga bog‘liq bo‘ladi.

Iteratsion yondashuvning yaqinlashuv xossalarini aniqlash integral operatorning funksional fazodagi xatti-harakatini tahlil qilish bilan bog‘liq. Qaralayotgan integral tenglama uchun integral operator quyidagi ko‘rinishda aniqlangan:

$$(Tu)(x) = \int_0^1 (x+t)u(t)\,dt.$$

Operator normasini baholash maqsadida uzluksiz funksiyalar fazosi $C[0,1]$da supremum norma qaraladi:

$$\| u \| = \max_{x\in[0,1]} | u(x) | .$$

Ushbu normada operatorning bahosini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\| (Tu) \| \le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 | x+t | | u(t) | dt.$$

Yadro musbat va uzluksiz bo‘lganligi sababli quyidagi baho o‘rinli:

$$\| (Tu) \| \le \| u \| \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 (x+t) dt.$$

Integralni hisoblash orqali

$$\int_0^1 (x+t) dt = x + \frac{1}{2}$$

natija hosil qilinadi. Shundan so‘ng operator normasi uchun baho olinadi:

$$\| T \| \le \max_{x\in[0,1]} (x \mid \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}.$$

Iteratsion jarayonning kovergensiyasi ketma-ket yaqinlashishlar orasidagi farqni baholash orqali aniqlanadi. Rekurrent munosabatdan kelib chiqib,

$$\| u_{n+1} - u_n \| \le | \lambda | \| T \| \| u_n - u_{n-1} \|$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. Ushbu tengsizlik iteratsion jarayon geometrik progressiya bilan baholanishini ko‘rsatadi. Demak, quyidagi shart bajarilganda ketma-ket yaqinlashishlar tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi:

$$| \lambda | \| T \| < 1.$$

Operator normasi uchun olingan bahoni hisobga olib, kovergensiya uchun yetarli shart quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$| \lambda | < \frac{2}{3}.$$

Ushbu shart bajarilganda integral operator qisqaruvchi operator bo‘lib, iteratsion jarayon yagona yechimga yaqinlashadi. Parametr qiymati ushbu chegaraga yaqinlashgan sari iteratsiyalar soni ortadi va yaqinlashuv sekinlashadi, kichik qiymatlarda esa iteratsion jarayon tez barqarorlashadi.

Qaralayotgan integral tenglama

$$u(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)u(t)\,dt$$

uchun iteratsion jarayon avval aniqlangan rekurrent formula asosida quriladi:

$$u_{n+1}(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)u_n(t)\,dt.$$

Boshlang‘ich yaqinlashish sifatida

$$u_0(x) = x^2$$

tanlanadi. Ushbu tanlov integral had ishtirokisiz tenglamaning o‘ng tomoniga mos keladi va iteratsion jarayonni soddalashtiradi.

Rekurrent formulaga $u_0(x)$ ni qo‘yib, birinchi iteratsiya aniqlanadi:

$$u_1(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)t^2\,dt.$$

Integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^1 (x+t)t^2\,dt = x\int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 t^3\,dt = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}.$$

Natijada birinchi iteratsiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$u_1(x) = x^2 + \lambda(\frac{x}{3} | \frac{1}{4}).$$

Endi $u_1(x)$ ifodadan foydalanib, ikkinchi iteratsiya aniqlanadi:

$$u_2(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x+t)(t^2 | \lambda(\frac{t}{3} | \frac{1}{4}))dt$$

Integralni hadma-had hisoblaymiz:

$$\int_0^1 (x+t)t^2\,dt = \frac{x}{3} + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 (x+t)t\,dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 (x+t)\,dt = x + \frac{1}{2}.$$

Shu asosda

$$u_2(x) = x^2 + \lambda(\frac{x}{3}|\frac{1}{4}) + \lambda^2(\frac{x}{6}\left|\frac{1}{9}\right|\frac{x}{4}|\frac{1}{8}).$$

Ifodani soddalashtirib,

$$u_2(x) = x^2 + \lambda(\frac{x}{3}|\frac{1}{4}) + \lambda^2(\frac{5x}{12}|\frac{17}{72}).$$

Olingan iteratsiyalar ko‘rinishidan noma’lum funksiya har bir qadamda x ga nisbatan polinom ko‘rinishida ifodalanishi kuzatiladi. Har bir keyingi iteratsiya oldingisiga nisbatan yuqori darajali λ koeffitsiyentli hadlarni o‘z ichiga oladi. Oldingi bo‘limda aniqlangan

$$|\lambda| < \frac{2}{3}$$

shart bajarilganda ushbu hadlar geometrik progressiya kabi kamayib boradi va iteratsion ketma-ketlik tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Natijada $\{u_n(x)\}$ ketma-ketlikning limit funksiyasi integral tenglamaning yagona yechimini beradi. Amaliy hisoblashlarda bir necha iteratsiyadan so‘ng yechimning ko‘rinishi deyarli o‘zgarmas holga keladi, bu esa iteratsion yondashuvning samaradorligini tasdiqlaydi.

Iteratsion yondashuv asosida qurilgan yechimlar ketma-ketligi integral tenglamaning xatti-harakatini yaqqol namoyon etadi. Hisoblashlar natijasida hosil bo‘lgan yaqinlashishlar noma’lum funksiyaning polinom ko‘rinishda ifodalanishini ko‘rsatadi, bu esa integral yadroning chiziqli tuzilishi bilan bog‘liq. Har bir keyingi iteratsiyada λ ning yuqori darajali hadlari paydo bo‘lib, ular iteratsion jarayonning yaqinlashuv tezligini belgilaydi.

Parametr λ ning qiymati iteratsion jarayonning xatti-harakatiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Kovergensiya sharti bajarilgan holatda, ya’ni

$$|\lambda| < \frac{2}{3},$$

iteratsion ketma-ketlik tekis yaqinlashuvchi bo‘lib, yechim barqaror ravishda shakllanadi. Parametr qiymati ushbu chegaraga yaqinlashgan sari iteratsiyalar soni

ortadi va yaqinlashuv jarayoni sekinlashadi. Aksincha, λ ning kichik qiymatlarida bir necha iteratsiyadan so‘ng yechim deyarli o‘zgarmas holga keladi.

Nazariy jihatdan aniqlangan kovergensiya sharti bilan amaliy hisoblashlar natijalari o‘rtasida to‘liq moslik kuzatiladi. Operator normasiga asoslangan baholar iteratsion jarayonning barqarorligini ishonchli tarzda tushuntirib beradi. Shu bilan birga, tanlangan integral tenglama uchun iteratsion yondashuvning algoritmik jihatdan sodda ekanligi va hisoblash jarayonining elementar integrallar bilan cheklanishi amaliy jihatdan muhim afzallik hisoblanadi.

XULOSA. Ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasi uchun iteratsion yondashuvning qo‘llanilishi ketma-ket yaqinlashish usulining nazariy va amaliy samaradorligini aniq namoyon etadi. Tanlangan integral tenglama misolida iteratsion jarayon integral operator asosida qurildi va noma’lum funksiya ketma-ket yaqinlashishlar orqali aniqlanishi ko‘rsatildi. Integral yadroning uzluksiz va chegaralangan bo‘lishi iteratsion yondashuvni qo‘llash uchun zarur shartlarni ta’minladi.

Integral operator normasini baholash asosida kovergensiya uchun yetarli shart aniqlanib, parametr qiymatlarining iteratsion jarayon barqarorligiga ta’siri asoslab berildi. Ushbu shart bajarilganda iteratsion ketma-ketlikning tekis yaqinlashuvi ta’minlanishi va yechimning yagonaligi kafolatlanishi nazariy jihatdan ko‘rsatildi. Amaliy hisoblashlar natijalari ham ushbu xulosalarni tasdiqlab, iteratsion yondashuvning real masalalarda ishonchli ishlashini ko‘rsatdi.

Batafsil hisoblangan iteratsiyalar integral tenglamaning yechimi polinom ko‘rinishda yaqinlashishini va har bir keyingi iteratsiyada λ ning yuqori darajali hadlari kamayib borishini ko‘rsatdi. Bu holat iteratsion jarayonning geometrik xususiyatga ega ekanligini va yaqinlashuv tezligining parametr tanloviga bog‘liqligini ochib berdi.

Natijada, iteratsion usul ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamalarini yechishda samarali, algoritmik jihatdan sodda va nazariy jihatdan asoslangan yondashuv ekanligi tasdiqlandi. Ushbu metod murakkab integral modellarni tahlil

qilishda, ayniqsa aniq analitik yechim mavjud bo‘lmagan holatlarda, ishonchli taqribiy yechimlar olish imkonini beradi va integral tenglamalar asosida qurilgan matematik modellarni o‘rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1-qism. – Toshkent: O‘qituvchi, 1988. – 400 b.
2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. -Toshkent: Iqtisod-Moliya, 2008. - 320 b.
3. Mamatov Sh.S., Abdirashidov A. Integral tenglamalarni taqribiy yechish usullari. – Samarqand: Samarqand davlat universiteti nashriyoti, 2014. – 180 b.
4. Tojimamatov I. Sonli usullar va matematik modellashtirish asoslari. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2016. – 256 b.
5. Qodirov A., Rahimov B. Amaliy matematika masalalari va integral tenglamalar. – Toshkent: Universitet, 2019. – 212 b.
6. Karimov A.A. Funksional analiz va uning amaliy masalalari. – Toshkent: O‘zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2017. – 300 b.
7. Xudoyberdiyev M. Integral va differensial tenglamalar. – Toshkent: Fan, 2015. – 284 b.
8. O‘rinboyev A., Saidov D. Sonli hisoblash usullari. – Toshkent: Innovatsiya-Ziyo, 2020. – 240 b.
9. Mamatqulov B. Matematik modellashtirish asoslari. – Toshkent: O‘qituvchi, 2018. – 198 b.

TALABALAR UCHUN MOBIL ELEKTRON KUTUBXONA ILOVASINI ISHLAB CHIQISH

Toshboltayev F.O‘., Mo‘minjonova S.I., Xaydarova O.T.

FarDU katta o‘qituvchisi, p.f.b.f.d (PhD), toshboltayevfaxriddin88@gmail.com

FarDU magistranti, mominjonovasevarakhon@gmail.com

FarDU magistranti oydinxonxaydarova@gmail.com

Annotatsiya: ushbu maqolada zamonaviy kompyuter tizimlari va dasturiy ta’minot vositalari asosida ta’lim jarayonini raqamlashtirish yo‘nalishidagi muhim yo‘nalishlardan biri bu talabalar uchun mo‘ljallangan mobil elektron kutubxona ilovasini ishlab chiqish masalasi tahlil qilinadi. Tadqiqotda mobil texnologiyalarni o‘quv jarayoniga integratsiya qilishning nazariy asoslari, dasturiy arxitektura, ma’lumotlar bazasi dizayni hamda foydalanuvchi interfeysi elementlari chuqur tahlil qilingan. Natijalar shuni ko‘rsatadiki, mobil elektron kutubxona talabalarning mustaqil ta’limini qo‘llab-quvvatlaydi, o‘qituvchilar va talabalar o‘rtasidagi axborot almashinuvini samarali tashkil etadi.

Kalit so‘zlar: kompyuter tizimlari, dasturiy ta’minot, mobil dastur, elektron kutubxona, raqamli ta’lim, ma’lumotlar bazasi, foydalanuvchi interfeysi, AKT.

KIRISH. Zamonaviy axborot texnologiyalari inson hayotining barcha jabhalarini qamrab olmoqda. Ta’lim, madaniyat va o‘zini o‘zi rivojlantirish sohalarida elektron resurslardan foydalanish tobora kengayib bormoqda. Ayniqsa, yoshlar orasida audio va elektron kitoblarga qiziqish ortib bormoqda.

Raqamli iqtisodiyot sharoitida ta’lim tizimi yangi texnologik bosqichga o‘tmoqda. Kompyuter tizimlari va ularning dasturiy ta’minoti bugungi kunda ta’limni boshqarish, o‘qitish jarayonini avtomatlashtirish va o‘quv resurslarini raqamlashtirishda muhim ahamiyat kasb etmoqda.[1]

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Raqamli ta’lim” konsepsiyasini joriy etish to‘g‘risidagi qarorlariga muvofiq, oliy ta’lim muassasalarida elektron kutubxona tizimlarini yaratish, ularni mobil qurilmalar orqali boshqarish mexanizmlarini ishlab chiqish dolzarb masalalardan biridir.

Shu nuqtai nazardan, talabalar uchun mobil elektron kutubxona ilovasini ishlab chiqish — ta’lim jarayonini zamonaviy axborot texnologiyalari bilan uyg‘unlashtirishning samarali usuli hisoblanadi.

Mazkur loyiha foydalanuvchilarga qulay interfeys, keng qamrovli o‘zbekcha kontent va sun’iy intellekt asosidagi tavsiya mexanizmi orqali o‘qish jarayonini samarali tashkil etishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA USULLAR. Zamonaviy axborot texnologiyalari davrida ta’lim jarayonini raqamlashtirish muhim ahamiyat kasb etmoqda. Talabalar uchun yaratilgan mobil elektron kutubxona ilovasi:

- o‘qish jarayonini yengillashtiradi
- darslik va adabiyotlarga tezkor kirishni ta’minlaydi
- vaqt va joydan qat’i nazar bilim olish imkonini beradi.

So‘nggi yillarda dunyo olimlari ta’lim sohasida mobil texnologiyalardan foydalanish masalalarini faol o‘rganmoqda. Masalan, D. Laurillard (2019) “mobil o‘qish” konsepsiyasining pedagogik modelini ishlab chiqqan; A. Kukulska-Hulme (2021) esa mobil ilovalarning o‘quvchi motivatsiyasiga ta’sirini tahlil qilgan.

Ilmiy adabiyotlarda mobil texnologiyalarning ta’limdagi roli keng yoritilgan. Xususan, ta’lim jarayonini raqamlashtirishda mobil ilovalar o‘quv materiallariga tezkor va qulay kirish imkonini yaratishi ta’kidlanadi [1].

Mobil ta’lim platformalarining texnik asoslari, arxitekturasi va funksional imkoniyatlari mobil dasturlar arxitekturasiga oid tadqiqotlarda keng yoritilgan [2]. Shuningdek, mavjud elektron kutubxona platformalari (Bookmate, Google Books) foydalanuvchi qulayligi va qidiruv mexanizmlari bo‘yicha ma’lum tajribaga ega bo‘lsa-da, ular ta’limga to‘liq moslashtirilmagan [5].

Mahalliy tadqiqotlarda (R.Tursunov, S.Mamatov, 2023) elektron ta’lim platformalarining texnik va uslubiy asoslari yoritilgan. Biroq, mobil platformalar uchun mo‘ljallangan, real vaqtda ishlovchi, foydalanuvchi tajribasiga asoslangan kutubxona ilovalari bo‘yicha tadqiqotlar kam.

Shuningdek, mavjud veb-kutubxonalar foydalanuvchilarga qulay interfeys, tezkor qidiruv, tavsiya tizimi kabi funksiyalarni yetarlicha taqdim etmaydi. Shu bois, yangi, mobil platformada ishlovchi integratsiyalashgan tizim yaratish zaruriyati mavjud.

MUHOKAMA. Mobil elektron kutubxona ilovasining asosiy maqsadi — talabalarga o‘qish uchun zarur bo‘lgan darslik, maqola, ilmiy ish, va ma’lumotlarni mobil qurilma orqali onlayn yoki oflayn rejimda taqdim etishdir.

Tadqiqot jarayonida quyidagi texnologik yechimlar asosida tizim loyihalandi:

Arxitektura:

Tizim client-server arxitekturasida ishlab chiqiladi. Mobil ilova Flutter yordamida yaratiladi, server qismi esa Node.js asosida ishlab chiqiladi. Ma’lumotlar Firebase va Cloud Storage orqali saqlanadi.[4]

Funktsional imkoniyatlar:

Kitoblarni matn yoki audio shaklida o‘qish/tinglash imkoniyati;

Foydalanuvchi profilini yaratish va o‘qish tarixini kuzatish;

Sun’iy intellekt asosida o‘xshash kitoblarni tavsiya etish;

Offline rejim – internet bo‘lmaganda ham foydalanish;

Kitoblarni bulutli tizimda saqlash va avtomatik sinxronizatsiya.

Dizayn va interfeys:

Ilova minimalistik, ammo zamonaviy dizaynga ega bo‘lib, foydalanuvchining qulayligi uchun qorong‘i va yorqin rejimlarda ishlaydi. Til tanlash imkoniyati (o‘zbek, ingliz, rus) ham qo‘shiladi.

Tizimning afzalliklari:

O‘zbek tilidagi audio va elektron kitoblar bazasining mavjudligi;

Talabalar va o‘quvchilar uchun bepul foydalanish imkoniyati;

Tizim orqali foydalanuvchi o‘z kitoblarini ham yuklab, boshqalar bilan bo‘lisha oladi

Ushbu tizim raqamli ta’limni rivojlantirish, milliy adabiyotlarni targ‘ib qilish va zamonaviy o‘qish madaniyatini shakllantirishga hissa qo‘shadi.

Natijalar va ularning tahlili.

Natijada “EduLibrary” nomli mobil elektron kutubxona ilovasi yaratildi. U quyidagi funksiyalarni amalga oshiradi:

Kitoblarni nomi, muallifi yoki kalit so‘z orqali qidirish;

Kitoblarni PDF formatda o‘qish va yuklab olish;

Foydalanuvchining o‘qish tarixini saqlash;

O‘qituvchilar tomonidan joylashtirilgan yangi resurslar haqida xabarnoma olish;

AI (sun’iy intellekt) asosida o‘quvchilarga tavsiya tizimi.

Tadqiqot sistemali yondashuv, dasturiy muhandislik, va foydalanuvchi markazli dizayn tamoyillari asosida olib borildi. Tizim tahlili: foydalanuvchilarning ehtiyojlari (talabalar, o‘qituvchilar) o‘rganildi, funksional talablar aniqlanib, “Use Case” diagrammasi yordamida model yaratildi. Texnologik vositalar: Android Studio dasturlash muhiti, Kotlin dasturlash tili, Firebase va SQLite ma’lumotlar bazalari, Google API xizmatlaridan foydalanildi. Arxitektura dizayni: “Client–Server” modeli asosida ishlab chiqildi. Ma’lumotlar serverda saqlanadi, foydalanuvchi esa mobil ilova orqali ulanish imkoniga ega. Interfeys dizayni: “Material Design” konsepsiyasi asosida intuitiv va ergonomik interfeys ishlab chiqildi. Sinov (Testing): ilova alfa va beta testlardan o‘tkazilib, 50 nafar foydalanuvchi ishtirokida sinov tahlili o‘tkazildi.[5]

NATIJA. Loyiha yakunida ishlab chiqilgan mobil elektron kutubxona ilovasi sinovdan o‘tkazildi. Sinov jarayoni davomida turli yo‘nalishlarda tahsil olayotgan talabalar ishtirok etdi.

Sinov natijalari shuni ko‘rsatdiki, mobil elektron kutubxona talabalarga o‘quv jarayonida manbalarga tezkor kirish imkonini yaratadi va o‘qituvchilar uchun o‘quv resurslarini boshqarishni osonlashtiradi.

Ular ilovadan foydalanib quyidagi asosiy funksiyalarni sinab ko‘rishdi:

- ro‘yxatdan o‘tish va tizimga kirish;
- fan nomi bo‘yicha kitob qidirish;
- kitobni onlayn o‘qish yoki yuklab olish;
- saqlangan kitoblar ro‘yxatini ko‘rish;
- fikr va baho berish.

Natijada, foydalanuvchilarning aksariyati ilovaning ishlash tezligi va interfeys soddaligini ijobiy baholadi. O‘tkazilgan so‘rov natijasida:

❖ 87% talaba ilova ularning o‘qish jarayonini yengillashtirganini bildirdi;

❖ 10% foydalanuvchi ilovaga qo‘shimcha audio kitoblar funksiyasini kiritishni taklif qildi;

❖ 3% foydalanuvchi internet sifati past joylarda ilovadan foydalanish qiyinligini aytdi.

Natijalar shuni ko‘rsatdiki, mobil elektron kutubxona ilovasi ta’lim jarayonini yanada qulay va samarali tashkil etishda muhim ahamiyatga ega.

Muhokama jarayonida quyidagi asosiy jihatlar aniqlangan:

Qulaylik: Talabalar uchun eng katta afzallik – istalgan joyda, istalgan vaqtda darslik va adabiyotlarga kirish imkoniyatidir.

Tezkorlik: Kitoblarni qidirish va o‘qish jarayoni an’anaviy kutubxona tizimiga nisbatan bir necha barobar tez amalga oshadi.

Interfaol imkoniyatlar: Fikr bildirish, baholash va tavsiya funksiyalari talabalarning faolligini oshiradi.

Muammolar: Ba’zi foydalanuvchilar ilovadan foydalanish uchun internetga bog‘liqlikni kamchilik sifatida qayd etishgan.

Takomillashtirish yo‘nalishlari: Ilovaga oflayn rejim, audio kitoblar va avtomatik tavsiya tizimi qo‘shish foydalanuvchi tajribasini yaxshilaydi.

XULOSA. Mobil elektron kutubxona ilovasini ishlab chiqish talabalarning bilim olish jarayonini soddalashtiradi, raqamli ta’limni rivojlantiradi va o‘quv resurslaridan samarali foydalanish imkonini yaratadi. Kelajakda bunday ilovalar ta’lim tizimining ajralmas qismi bo‘lib qoladi.

Ishlab chiqilgan mobil elektron kutubxona ilovasi talabalarga elektron adabiyotlardan tez va samarali foydalanish imkonini berdi.

Ilovaning soddaligi va qulay interfeysi foydalanuvchi tajribasini yaxshiladi.

Loyihaning amaliy qiymati yuqori bo‘lib, u ta’lim jarayonini raqamlashtirishda muhim rol o‘ynaydi.

Tadqiqot shuni ko‘rsatadiki, kompyuter tizimlari va dasturiy ta’minot vositalaridan foydalanish orqali ta’lim jarayonini raqamlashtirishda mobil elektron

kutubxona muhim o‘rin tutadi. Ilovaning samaradorligi 1-jadvaldagi ko‘rsatkichlar bilan baholandi.Ushbu yechim quyidagi natijalarga olib keladi:

- Talabalar uchun o‘quv adabiyotlariga 24/7 kirish imkoniyati yaratiladi;
- Kutubxona infratuzilmasi raqamli muhitga moslashtiriladi;
- O‘qituvchilarga dars resurslarini joylashtirish va yangilash imkoniyati beriladi;
- Sun’iy intellekt asosida individual ta’lim yondashuvi shakllanadi.

Kelgusida tizimni bulutli texnologiyalar, blokcheyn asosida huquqiy himoya, hamda o‘quvchilarning faoliyatini tahlil qiluvchi analitik modul bilan boyitish rejalashtirilmoqda.Mobil kutubxona tizimini ishlab chiqish bugungi kunda raqamli ta’lim, o‘zini o‘zi rivojlantirish va axborotdan foydalanish sohalarida katta ahamiyatga ega. Taklif etilgan dasturiy mahsulot o‘zbek tilidagi kontentni rivojlantirish, foydalanuvchilarga yangi qulayliklar yaratish hamda milliy elektron kutubxona infratuzilmasini kengaytirish imkonini beradi.[2,4]

Ko‘rsatkich	Natija
Ilovaning o‘rtacha yuklanish vaqti	1,2 soniya
Foydalanuvchi qoniqish darajasi	91%
Qidiruv natijasining aniqlik darajasi	94%
Tizim barqarorligi (Crash-free rate)	99,2%

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Mamatov S., Tursunov R. Axborot texnologiyalarining ta’limdagi roli. *Toshkent: TATU nashriyoti, 2023.*

2. Rashidov A. “Mobil dasturlar arxitekturasi.” – TATU nashriyoti, 2021.

3. Flutter Documentation – https://flutter.dev/docs

4. Firebase Developer Guide – https://firebase.google.com/docs

5. Bookmate va Google Books rasmiy sahifalari – https://www.bookmate.com, https://books.google.com

O‘ZBEKISTON IQLIMINING OXIRGI 5 YILDAGI O‘ZGARISHLARI: AMALIY MATEMATIK TAHLIL

Rahimov Q.O., No’monova M.A.

Farg‘ona Davlat Universiteti. quvvatali.rahimov@gmail.com, husanbaevamavluda@gmail.com

Annotatsiya: *Mazkur maqolada O‘zbekiston hududida so‘nggi 5 yil (2019–2024) davomida kuzatilgan iqlim o‘zgarishlari amaliy matematik usullar asosida tahlil qilindi. Tadqiqotda o‘rtacha yillik harorat va yog‘in miqdori ko‘rsatkichlari asosiy statistik ma’lumot sifatida tanlandi. Chiziqli regressiya, korrelatsiya, dispersiya (ANOVA) tahlillari hamda qisqa muddatli prognozlash modellari qo‘llanildi. Olingan natijalar O‘zbekiston iqlimida barqaror isish jarayoni va yog‘in miqdorining kamayish tendensiyasi mavjudligini ko‘rsatdi. Prognoz natijalari kelajakda suv resurslari va qishloq xo‘jaligida jiddiy muammolar yuzaga kelishi mumkinligini anglatadi.*

Kalit so‘zlar*: iqlim o‘zgarishi, regressiya tahlili, korrelatsiya, ANOVA, prognozlash modeli, O‘zbekiston iqlimi.*

So‘nggi o‘n yillikda global iqlim o‘zgarishi dunyo miqyosida ekologik, iqtisodiy va ijtimoiy muammolarning markazida turibdi. Haroratning ortishi, yog‘in miqdorining kamayishi, muzliklarning erishi va qurg‘oqchilik jarayonlarining kuchayishi kabi omillar global iqlim tizimining beqarorlashuvini ko‘rsatmoqda. O‘zbekiston iqlimi keskin kontinental bo‘lib, yozda yuqori harorat, qishda esa sovuq havo massalari bilan ajralib turadi. Shu sababli, global o‘zgarishlar mamlakatimiz hududida yanada yaqqol sezilmoqda. Mazkur tadqiqotning maqsadi O‘zbekistonning 2019–2024-yillar oralig‘idagi o‘rtacha yillik harorat va yog‘in miqdorini matematik usullar yordamida o‘rganish, ularning o‘zgarish qonuniyatini aniqlash hamda kelajak uchun qisqa muddatli prognoz modelini qurishdan iboratdir.

O‘zbekiston iqlimining so‘nggi 5 yildagi o‘zgarish dinamikasini amaliy matematik modellar yordamida tahlil qilisb va natijalar asosida prognozlab chiqamiz. Tahlil uchun O‘zbekiston Respublikasi Gidrometeorologiya xizmati (Uzhydromet) tomonidan e’lon qilingan 2019–2024-yillar oralig‘idagi yillik harorat va yog‘in ma’lumotlari tanlab olindi. Chiziqli regressiya tahlili, dispersiya

(ANOVA) tahlili, korrelatsiya tahlili, prognozlash kabi statistic va matematik usullardan foydalanildi.

Yil	O‘rtacha harorat (°C)	O‘rtacha yog‘in (mm)
2019	14.9	282
2020	15.4	256
2021	15.7	243
2022	16.1	238
2023	16.5	225
2024	16.8	231

Jadval 1. O‘zbekiston hududlarida o‘rtacha yillik harorat (2019–2023).

Mazkur jadvaldan ko‘rinib turibdiki, harorat yildan-yilga ortib bormoqda, yog‘in esa asta-sekin kamaymoqda. Bu tendensiya global iqlim isishi bilan to‘g‘ridan-to‘g‘ri bog‘liq.

1. Harorat uchun regressiya modeli

$$Ty = 14.3 + 0.36 \cdot (y - 2019)$$

Bu tenglama shuni anglatadiki, 2019-yildan boshlab harorat har yili o‘rtacha 0.36°C ga oshmoqda.

Yog‘in miqdori uchun regressiya modeli

$$Py = 282 - 10.2 \cdot (y - 2019)$$

Demak, yillik yog‘in miqdori har yili o‘rtacha 10.2 mm ga kamaymoqda.

2. Korrelatsiya tahlili

$$r = -0.87$$

Harorat va yog‘in o‘rtasidagi korrelatsiya koeffitsienti bu kuchli teskari korrelatsiyani bildiradi. Ya’ni, harorat oshgan sari yog‘in kamaymoqda.

3. Dispersiya (ANOVA) natijalari

Tahlil natijasi bo‘yicha $p < 0.05$, ya’ni iqlimdagi o‘zgarishlar statistik jihatdan ahamiyatli.

4. Prognoz modeli (2025–2028)

Yil	Prognoz harorat (°C)	Prognoz yog‘in (mm)
2025	17.1	221
2026	17.5	211
2027	17.8	201
2028	18.1	191

2-jadval. O‘zbekiston hududlarida yog‘ingarchilik miqdorining o‘zgarishi

Prognoz natijalari shuni ko‘rsatadiki, agar mavjud tendensiya saqlansa, 2028-yilga borib O‘zbekiston hududida o‘rtacha harorat 18°C dan oshadi va yog‘in miqdori 190 mm atrofida bo‘ladi. Bu esa suv resurslari va qishloq xo‘jaligiga jiddiy ta’sir ko‘rsatadi. Korrelatsiya tahlilining salbiy qiymati iqlim tizimining noaniqligini bildiradi. Bu natijalar qishloq xo‘jaligi, suv xo‘jaligi, energetika va ekologiya sohalarida strategik rejalashtirishni talab etadi. Demak, O‘zbekiston iqlimi so‘nggi 5 yilda o‘rtacha 1.9°C ga isidi, haroratning o‘sishi va yog‘inning kamayishi o‘rtasida kuchli teskari bog‘liqlik mavjud, matematik modellashtirish natijalariga ko‘ra, iqlim o‘zgarishi davom etmoqda, iqlim monitoring tizimini matematik modellar asosida avtomatlashtirish zarur, qurg‘oqchilikka bardoshli ekin turlarini ko‘paytirish hamda suv tejovchi texnologiyalarni keng joriy etish muhim.

ADABIYOTLAR:

1. O‘zbekiston Respublikasi Gidrometeorologiya xizmati markazi (Uzhydromet), 2019–2024-yillar statistik ma’lumotlari.

2. Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). Sixth Assessment Report. Geneva, 2021.

3. Rasulov R. (2020). Statistik tahlil va regressiya modellashtirish asoslari. Toshkent: TDPU nashriyoti.

4. Karimov A., Tursunov B. (2023). “O‘zbekiston iqlim o‘zgarishlarining matematik tahlili”, Amaliy matematika jurnali, №2.

JARAYON MODELLARINI HODISALAR JURNALI ASOSIDA TAKOMILLASHTIRISH

Ro‘zaliyev Sh.A. Toshboltayev F.O‘., Xaydarova O.T., Mo‘minjonova S.I.

FarDU dotsenti, p.f.b.f.d(PhD)., sherzodjonruzaliyev@gmail.com

FarDU katta o‘qituvchisi, p.f.b.f.d(PhD)., toshboltayevfaxriddin88@gmail.com

FarDU magistranti, oydinxonxaydarova@gmail.com

FarDU magistranti, E-mail: mominjonovasevarakhon@gmail.com

Annotatsiya*: ushbu maqolada jarayon modellarini hodisalar jurnali asosida takomillashtirish masalalari yoritilgan. Zamonaviy axborot tizimlarida jarayonlarning real bajarilishi ko‘pincha oldindan ishlab chiqilgan modellardan farq qiladi. Hodisalar jurnali real bajarilish haqidagi aniq ma’lumotlarni taqdim etadi va ular yordamida jarayon modelining aniqligi, mosligi hamda samaradorligini oshirish mumkin. Tadqiqotda jarayonlarni qazib olish (process mining) usullari asosida jarayon modellarini aniqlash, moslikni baholash va modelni tuzatish metodlari tahlil qilingan.*

Kalit so‘zlar: *jarayon modeli, hodisalar jurnali, process mining, BPM, moslikni tekshirish, jarayonni takomillashtirish, modelni tuzatish, modellashtirish, takomillashtirish.*

KIRISH. Axborot texnologiyalarining jadal rivojlanishi natijasida tashkilotlarda amalga oshirilayotgan jarayonlar murakkablashib, ularni samarali boshqarish masalasi dolzarb ahamiyat kasb etmoqda. Jarayon modellaridan tashkilot faoliyatini tushunish, tahlil qilish va optimallashtirishda keng foydalaniladi. Biroq amaliyotda real jarayonlarning bajarilishi ko‘pincha dastlab ishlab chiqilgan modellar bilan to‘liq mos kelmaydi.

Mazkur nomuvofiqliklar tashqi omillar, inson omili, axborot tizimlaridagi o‘zgarishlar va biznes talablarning evolyutsiyasi bilan bog‘liq. Shu sababli jarayon modellarini real bajarilish ma’lumotlari asosida qayta ko‘rib chiqish va takomillashtirish zarurati yuzaga keladi. Hodisalar jurnali (event log) ushbu jarayonlarning real bajarilish ketma-ketligi haqida ishonchli ma’lumot manbai bo‘lib xizmat qiladi. Ushbu maqolaning maqsadi — jarayon modellarini hodisalar jurnali asosida takomillashtirishning nazariy va amaliy jihatlarini o‘rganishdir.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA USULLARI

O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim vazirligi tomonidan tayyorlangan “Axborot tizimlari va biznes jarayonlarini modellashtirish” nomli qo‘llanma esa axborot tizimlari va biznes jarayonlari o‘rtasidagi o‘zaro bog‘liqlikni yoritadi. Ushbu manbada biznes jarayonlarini modellashtirishda axborot texnologiyalaridan foydalanish, ma’lumotlar oqimi va tizim komponentlarining o‘zaro aloqalari muhim jihat sifatida ko‘rib chiqilgan. Qo‘llanmada UML, BPMN va boshqa modellashtirish vositalaridan foydalanish jarayonlari batafsil bayon etilgan bo‘lib, ularning amaliy qo‘llanishi bo‘yicha misollar keltirilgan. [1]

So‘nggi yillarda axborot tizimlarida amalga oshirilayotgan jarayonlarni chuqur tahlil qilish va ularni optimallashtirish masalasi dolzarb yo‘nalishlardan biriga aylandi. Ayniqsa, process mining (jarayonlarni qazib olish) sohasi jarayon modellarini real ma’lumotlar asosida aniqlash va takomillashtirishda muhim ilmiy-amaliy ahamiyat kasb etmoqda. Process mining konsepsiyasi dastlab W.M.P. van der Aalst tomonidan ilmiy jihatdan asoslab berilgan bo‘lib, u hodisalar jurnali (event log) asosida jarayonlarni aniqlash, tekshirish va yaxshilash imkonini beradi. Tadqiqotlarda hodisalar jurnali — bu axborot tizimlarida qayd etilgan har bir jarayon bosqichining vaqt, faoliyat turi va ijrochisi haqidagi ma’lumotlar majmuasi sifatida qaraladi. [2]

Dumas M., La Rosa M., Mendling J. va Reijers H. A. tomonidan yozilgan “Biznes jarayonlarini boshqarish asoslari” asari biznes jarayonlarini boshqarishning nazariy asoslarini keng qamrovda yoritadi. Mualliflar BPMni tashkilot strategiyasi bilan uzviy bog‘liq bo‘lgan uzluksiz boshqaruv jarayoni sifatida talqin qiladilar. Kitobda jarayonlarni aniqlash, modellashtirish, tahlil qilish, takomillashtirish va avtomatlashtirish bosqichlari tizimli yondashuv asosida bayon etilgan. Ayniqsa, BPMN notatsiyasi yordamida jarayonlarni modellashtirish masalalari chuqur tahlil qilinib, jarayon modellarining aniqligi va tushunarliligi muhim omil sifatida ko‘rsatilgan. [3]

Harrington H. J. ning “Biznes jarayonlarini takomillashtirish” asari esa jarayonlarni qayta ko‘rib chiqish va optimallashtirishga amaliy yondashuvni taklif

etadi. Muallif jarayonlarni takomillashtirishda samaradorlik, xarajatlarni kamaytirish va sifatni oshirish masalalariga e’tibor qaratadi. Ushbu asarda biznes jarayonlarini qayta loyihalash (Business Process Improvement va Business Process Reengineering) tushunchalari asoslab berilib, mavjud jarayonlardagi kamchiliklarni aniqlash va ularni bartaraf etish bo‘yicha aniq metodik tavsiyalar keltirilgan. [4]

Tadqiqot jarayonlarni qazib olish (process mining) yondashuvlariga asoslangan bo‘lib, bir nechta ketma-ket bosqichlarda amalga oshirildi.

Birinchi bosqichda tanlangan axborot tizimidan hodisalar jurnali yig‘ildi. Hodisalar jurnali jarayon instansiyasi (case), faoliyat nomi (activity), vaqt belgisi (timestamp) va qo‘shimcha atributlarni o‘z ichiga oldi. Ma’lumotlar sifati va aniqligini ta’minlash maqsadida dastlabki tozalash va filtrlash ishlari bajarildi.

Ikkinchi bosqichda hodisalar jurnali asosida jarayon modeli kashf etildi. Bunda Alpha algoritmi, Heuristic Miner va Inductive Miner kabi process discovery algoritmlaridan foydalanildi. Ushbu algoritmlar yordamida real bajarilgan jarayonlar ketma-ketligini aks ettiruvchi grafik model yaratildi.

Uchinchi bosqichda hosil qilingan model mavjud normativ jarayon modeli bilan solishtirildi. Moslikni tekshirish (conformance checking) usullari orqali jarayonlardagi og‘ishlar, ortiqcha yoki yetishmayotgan faoliyatlar hamda ketma-ketlikdagi buzilishlar aniqlandi.

So‘nggi bosqichda aniqlangan nomuvofiqliklar asosida jarayon modelini takomillashtirish bo‘yicha takliflar ishlab chiqildi va yangilangan model qayta baholandi.

MUHOKAMA

Olingan natijalar process mining yondashuvining jarayon modellarini takomillashtirishda yuqori samaradorlikka ega ekanligini ko‘rsatadi. Hodisalar jurnali asosida olib borilgan tahlil ekspert baholariga asoslangan modellashtirishga nisbatan ob’ektivroq natijalar beradi. Shuningdek, jarayon modellarini takomillashtirish tashkilot faoliyatini shaffoflashtirish va boshqaruv qarorlarini

asoslashda muhim ahamiyat kasb etadi. Tadqiqot natijalari BPM va axborot tizimlari integratsiyasining ahamiyatini yana bir bor tasdiqlaydi.

Process mining usullaridan foydalanish jarayonlarni boshqarishda obyektiv va ma'lumotlarga asoslangan qarorlar qabul qilishga xizmat qiladi. Ushbu yondashuv ayniqsa axborot tizimlari, biznes jarayonlarini boshqarish va raqamli transformatsiya jarayonlarida samarali hisoblanadi. Kelgusida real vaqt rejimidagi hodisalar jurnali va sun'iy intellekt texnologiyalarini qo'llash jarayonlarni avtomatik monitoring qilish va prognozlash imkonini beradi.

NATIJALAR

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, hodisalar jurnali asosida yaratilgan jarayon modeli mavjud hujjatlashtirilgan modelga nisbatan aniqroq va real jarayonlarga mosroqdir. Conformance checking natijasida bir qator jarayon og'ishlari, jumladan, bosqichlarning almashinuvi va takrorlanishi aniqlandi. Takomillashtirilgan model asosida jarayonning eng ko'p vaqt talab qiladigan bosqichlari aniqlanib, ularni optimallashtirish bo'yicha takliflar ishlab chiqildi. Natijada jarayon samaradorligini oshirish imkoniyatlari belgilandi. Tadqiqot natijalari hodisalar jurnali asosida yaratilgan jarayon modeli real bajarilish holatini aniqroq aks ettirishini ko'rsatdi. Moslikni tekshirish jarayonida dastlabki modelda mavjud bo'lgan bir qator nomuvofiqliklar, jumladan, qo'shimcha faoliyatlar, ketma-ketlikdagi buzilishlar va vaqt jihatidan samarasiz bosqichlar aniqlandi.

Takomillashtirilgan jarayon modeli quyidagi natijalarga olib keldi:

- jarayonlarning shaffofligi oshdi;
- bajarilish vaqti qisqardi;
- ortiqcha va qiymat qo'shmaydigan bosqichlar qisqartirildi;
- resurslardan foydalanish samaradorligi yaxshilandi.

XULOSA

Mazkur maqola jarayon modellarini hodisalar jurnali asosida takomillashtirish masalasining ilmiy va amaliy ahamiyatini har tomonlama yoritib berdi. Olib borilgan tahlillar shuni ko'rsatdiki, an'anaviy jarayon modellashtirish

yondashuvlari ko‘pincha real jarayonlarning to‘liq va aniq tasvirini bera olmaydi, chunki ular asosan normativ hujjatlar yoki mutaxassislarning subyektiv baholariga tayanadi. Hodisalar jurnali asosida olib boriladigan tahlil esa jarayonlarning haqiqiy bajarilish holatini aks ettiruvchi ob’ektiv ma’lumotlarga asoslanadi. Jarayon modellarini hodisalar jurnali asosida takomillashtirish tashkilotlarda jarayonlarni samarali boshqarishning muhim vositasidir. Process mining usullari yordamida real jarayonlarni aniqlash, tahlil qilish va optimallashtirish imkoniyati yaratiladi. Tadqiqot natijalari ushbu yondashuvning ilmiy va amaliy ahamiyatini tasdiqlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim vazirligi. Axborot tizimlari va biznes jarayonlarini modellashtirish. Toshkent, 2024.

2. van der Aalst, W. M. P. Biznes jarayonlarini tahlil qilish va optimallashtirish. Toshkent: IT-Park, 2022.

3. Dumas, M., La Rosa, M., Mendling, J., Reijers, H. A. Biznes jarayonlarini boshqarish asoslari. Toshkent, 2021.

4. Harrington, H. J. Biznes jarayonlarini takomillashtirish. Toshkent, 2020.

RITS USULI YORDAMIDA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLI CHEGARAVIY MASALANI TAQRIBIY YECHISH

Tursunaliyeva O.E.

FarDU talabasi, tursunaliyevaodinaxon69@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masala Rits variatsion usuli yordamida taqribiy yechildi. Tenglama o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltirilib, integrallovchi ko‘paytuvchi aniqlandi. Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi boshlang‘ich va bazis funksiyalar tanlandi hamda Rits usuliga mos algebraik tenglamalar sistemasi tuzildi. Hisoblashlar natijasida taqribiy yechimning analitik ifodasi olindi.

Kalit so‘zlar: Rits usuli, variatsion usullar, chegaraviy masala, differensial tenglama, sonli usullar.

Kirish. Amaliy matematika va muhandislik masalalarida uchraydigan ko‘plab jarayonlar differensial tenglamalar yordamida modellashtiriladi. Biroq ko‘plab hollarda bunday tenglamalarni analitik usullar bilan aniq yechish imkoni mavjud emas. Shu sababli taqribiy va sonli usullardan foydalanish zarur bo‘ladi.

Rits (Ritz) usuli variatsion prinsipga asoslangan bo‘lib, asosan chegaraviy masalalarni yechishda qo‘llaniladi. Ushbu usul yechimni oldindan tanlangan bazis funksiyalar chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida izlashga asoslanadi. Mazkur maqolada Rits usuli yordamida aniq bir differensial tenglama uchun chegaraviy masalani yechish bosqichma-bosqich ko‘rib chiqiladi.

Masalaning matematik qo‘yilishi. Misol: Rits metodi bilan yeching.

$$y'' + 2xy' + 3y = 1.5$$

chegaraviy shartlar bilan:

$$y(0.6) = 1.1$$
$$y(0) = 2$$

bu yerda:

$$p(x) = 2x, q(x) = 3, f(x) = 1.5$$

tenglamani o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltirish Rits usulini qo‘llash uchun tenglama o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishda yoziladi. Integrallovchi ko‘paytuvchi

quyidagicha aniqlanadi:

$$\rho(x) = e^{\int_a^x p(t)dt}$$
$$Q(x) = \rho(x)q(x)$$
$$F(x) = \rho(x)p(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x)y'\right) + Q(x)y = F(x)$$

$$\rho(x) = e^{\int_{0.6}^x 2tdt} = e^{x^2-0.36}$$

misolimiz quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2-0.36}y'\right) + 3e^{x^2-0.36}y = 1.5e^{x^2-0.36}$$

$$y(0.6) = 1.1$$
$$y(0) = 2$$

boshlang‘ich funksiya Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi chiziqli funksiya tanlanadi:

$$\varphi_0(x) = 2.5x - 0.5$$
$$\varphi_i(x) = (x-a)(x-b)^i$$
$$\varphi_1(x) = (x-0.6)(x-1)^1$$
$$\varphi_2(x) = (x-0.6)(x-1)^2$$

Rits tenglamalar sistemasini tuzish. Rits usuliga ko‘ra quyidagi sistema hosil qilinadi:

$$y = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_{ij} = b_j$$

bu yerda:

$$A_{ij} = \int_a^b \left[\rho(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + Q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right]dx$$

$$b_j = \int_a^b \left[\rho(x)\varphi_0'(x)\varphi_j'(x) + Q(x)\varphi_0(x)\varphi_j(x) + \varphi_j(x)F(x)\right]dx$$

$$A_{11} = \int_{0.6}^{1} \left[\rho(x)\varphi_1'(x)\varphi_1'(x) + Q(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)\right]dx =$$

$$\int_{0.6}^{1}\left[e^{x^2-0.36}(2x-1.6)^2+3e^{x^2-0.36}(x^2-1.6x+0.6)^2\right]dx=0.031$$

$$A_{21}=\int_a^b\left[\rho(x)\varphi_2'(x)\varphi_1'(x)+Q(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)\right]dx=$$

$$=\int_{0.6}^{1}\left[e^{x^2-0.36}(3x^2-5.2x+2.2)(2x-1.6)+3e^{x^2-0.36}(x^3-2.6x^2+2.2x-0.6)(x^2-1.6x+0.6)\right]dx$$

$$=-0.005$$

$$A_{12}=\int_a^b\left[\rho(x)\varphi_1'(x)\varphi_2'(x)+Q(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\right]dx=$$

$$=\int_{0.6}^{1}\left[e^{x^2-0.36}(2x-1.6)(3x^2-5.2x+2.2)+3e^{x^2-0.36}(x^3-2.6x^2+2.2x-0.6)(x^2-1.6x+0.6)\right]dx$$

$$=-0.005$$

$$A_{22}=\int_a^b\left[\rho(x)\varphi_2'(x)\varphi_2'(x)+Q(x)\varphi_2(x)\varphi_2(x)\right]dx=$$

$$=\int_{0.6}^{1}\left[e^{x^2-0.36}(3x^2-5.2x+2.2)^2+3e^{x^2-0.36}(x^3-2.6x^2+2.2x-0.6)^2\right]dx=0.00016$$

$$b_1=\int_a^b\left[\rho(x)\varphi_0'(x)\varphi_1'(x)+Q(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)+\varphi_1(x)F(x)\right]dx=$$

$$=\int_{0.6}^{1}\left[e^{x^2-0.36}2.5(2x-1.6)+3e^{x^2-0.36}(2.5x-0.5)(x^2-1.6x+0.6)+(x^2-1.6x+0.6)1.5e^{x^2-0.36}\right]dx$$

$$=-0.029$$

$$b_2=\int_a^b\left[\rho(x)\varphi_0'(x)\varphi_2'(x)+Q(x)\varphi_0(x)\varphi_2(x)+\varphi_2(x)F(x)\right]dx=$$

$$=\int_{0.6}^{1}\left[e^{x^2-0.36}2.5(3x^2-5.2x+2.2)+3e^{x^2-0.36}(2.5x-0.5)(x^3-2.6x^2+2.2x-0.6)+(x^3-2.6x^2+2.2x-0.6)1.5e^{x^2-0.36}\right]dx$$

$$=0.0051$$

$$A_{11}=0.031,\ A_{21}=-0.005,\ A_{12}=-0.005,\ A_{22}=0.00016$$

$$b_1=-0.029,\ b_2=0.0051$$

quyidagi sistemani yechish orqali a_1 va a_2 larni topamiz.

$$A_{11}a_1+A_{21}a_2=b_1$$
$$A_{12}a_1+A_{22}a_2=b_2$$

$$a_1 = -0.85\,,\, a_2 = 0.53$$

topilgan a_1 va a_2 larni yechimga olib borib qo‘ysak quyidahi ko‘rinishga keladi

Taqribiy yechim

Topilgan koeffitsiyentlarni yechimga qo‘ysak, quyidagi taqribiy funksiya hosil bo‘ladi:

$$y = 2.5x - 0.5 - 0.85(x-0.6)(x-1) + 0.53(x-0.6)(x-1)^2$$

ILOVALAR

```
import numpy as np
# Simpson integration
def simpson(f, a, b, n=1000):
    if n % 2 == 1:
        n += 1
    h = (b - a) / n
    s = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n):
        x = a + i * h
        s += (4 if i % 2 == 1 else 2) * f(x)
    return s * h / 3
# Functions
def rho(x):
    return np.exp(x**2 - 0.36)
def Q(x):
    return 3 * rho(x)

def F(x):
    return 1.5 * rho(x)
# Basis functions
def phi0(x):
    return 2.5 * x - 0.5
```

```
def phi1(x):
    return (x - 0.6) * (x - 1)
def phi2(x):
    return (x - 0.6) * (x - 1)**2
# Derivatives of basis functions
def phi0p(x):
    return 2.5
def phi1p(x):
    return 2 * x - 1.6
def phi2p(x):
    return 3 * x**2 - 5.2 * x + 2.2
# Integration intervals
a, b = 0.6, 1.0
# A_ij matrix elements
A11 = simpson(lambda x: rho(x) * phi1p(x)**2 + Q(x) * phi1(x)**2, a, b)
A12 = simpson(lambda x: rho(x) * phi1p(x) * phi2p(x) + Q(x) * phi1(x) * phi2(x),
a, b)
A22 = simpson(lambda x: rho(x) * phi2p(x)**2 + Q(x) * phi2(x)**2, a, b)

# b_i vector elements
b1 = simpson(lambda x: rho(x) * phi0p(x) * phi1p(x) + Q(x) * phi0(x) * phi1(x) +
phi1(x) * F(x), a, b)
b2 = simpson(lambda x: rho(x) * phi0p(x) * phi2p(x) + Q(x) * phi0(x) * phi2(x) +
phi2(x) * F(x), a, b)
# Matrix and vector
A = np.array([[A11, A12],
[A12, A22]])
B = np.array([b1, b2])
# Solving the linear system
```

```
a1, a2 = np.linalg.solve(A, B)
# Final solution
def y(x):
    return 2.5 * x - 0.5 + a1 * (x - 0.6) * (x - 1) + a2 * (x - 0.6) * (x - 1)**2
# Output results
print("a1 =", a1)
print("a2 =", a2)
print("y(0.6) =", y(0.6))
print("y(1.0) =", y(1.0))
```

XULOSA

Ushbu maqolada Rits variatsion usuli yordamida ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun chegaraviy masala to‘liq yechildi. Differensial tenglama o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltirildi va Rits usuli asosida algebraik tenglamalar sistemasi tuzildi. Olingan taqribiy yechim chegaraviy shartlarni aniq qanoatlantiradi va usulning amaliy samaradorligini ko‘rsatadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1- qism. -T.: O‘qituvchi, 1988 y. 400 b.
2. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 2-qism. -T.: Iqtisod-Moliya, 2008. 320 b.

NUTQIY USLUBLARDA DEYKSISNINIG LINGVOHRAGMATIK XUSUSIYATLARI.

Tojimamatova Sh.M.

FarDU magistranti, shahnozatojimamatova75@gmail.com.

Annotatsiya: Ushbu maqolada nutqiy uslublarda deyksisninig lingvohragmatik xususiyatlari tadqiq etilgan. Unda deyksisning uslubshunoslikdagi o‘rni, matn tuzilishidagi ahamiyati, badiiy matn kategoriyalarining vazifalari hamda ularning farqli jihatlari ilmiy jihatdan tahlil qilingan.

Kalit so‘zlar: deyksis, uslubshunoslik, morfema, matn, inson, vaqt, deyktik,lungvogragmatika.

KIRISH. Deyiksis termini grekcha “deixix” so‘zidan olingan bo‘lib, lisoniy birliklar funksiyasi yoki ma’nosini ko‘rsatish degan ma’noni bildiradi, ular leksik va grammatik vositalar bilan ifodalanadi[1]. “Deyiksis termini ko‘rsatish, ishora qilish ma’nosini ifodalaydi, har qanday tilda bunday vazifani bajarishga xoslangan maxsus so‘zlar, grammatik vositalar mavjud. Demak, deyiksis termin hodisa hamda birlik ma’nosida qo‘llanadi”[2].

ADABIYOTLAR TAHLILI VA USULLAR. Tilshunoslikda, xususan, pragmalingvistikada deyksis masalalari bo‘yicha K.Brugman, O.Yespersen, K.yuler, V.Vinogradov, Ch.Fillmor, S.Levinson, D.Lyons va Y.Apresyan kabi yetakchi xorijiy olimlar tomonidan keng ko‘lamli tadqiqotlar olib borilgan.

O‘zbek tilshunosligida mazkur masala bo‘yicha yetakchi mutaxassislardan biri Sh.Safarov bo‘lib, uning “Pragmalingvistika” asarida deyksis masalalari keng yoritilgan. Olimning ilmiy sa’y-harakatlari natijasida o‘zbek tilshunosligida deyktika haqidagi dastlabki nazariy tushunchalar shakllangan. Shuningdek, M.Gaziyeva va M.Hakimovlarning “Pragmalingvistika asoslari” nomli asarida ham deyksis masalalari keng tahlil qilingan.

MUHOKAMA

[1] Виноградов В.А. Дейксис// Лингвистический энциклопедический словарь.-М.:Сов. Энциклопедия,-С.128

[2] Хакимов М,Газиева М Лингвопрагматика асослари Тошкент-2020,-61

Deyiksis — bu nutqda aytilayotgan so‘z yoki ifodaning ma’nosi so‘zlovchi, tinglovchi, vaqt yoki joyga bog‘liq bo‘lishi hodisasidir.

Oddiy qilib aytganda, deyiktik so‘zlar kim gapirayapti, qachon va qayerda gapirayapti — shu holatga qarab tushuniladi.

Asosiy turlari:

1. Shaxs deyiksisi — men, sen, u → Men keldim (kim — so‘zlovchiga bog‘liq)
2. Joy deyiksisi — bu yerda, u yerda, shu yer → Bu yerda kutib tur (qaysi joy ekani vaziyatga bog‘liq)
3. Vaqt deyiksisi — hozir, kecha, ertaga → Ertaga uchrashamiz (qaysi kun — gap aytilgan vaqtga bog‘liq)
4. Nutq deyiksisi — bu gap, yuqorida aytilgani → Buni tushuntirib o‘tdim

Uslubshunoslikda deyksis til vositalarini tahlil qilish bilan bog‘liq bo‘lib, joy nomlari, makon va vaqtni ifodalovchi birliklar hamda fe’l shakllari orqali nutq vaziyatiga, uning ishtirokchilari va joyiga ishora qiladi. Deyktik birliklar matnni faollashtirish va uni idrok etishga tayyorlash jarayoniga ta’sir ko‘rsatadi. Bu holat, ayniqsa, badiiy va ilmiy uslublarda muhim ahamiyat kasb etib, deyksis «o‘z–begona» kategoriyalarini belgilash yoki matnni tarkibiy jihatdan tashkil etishda qo‘llanilishi mumkin.

Deyksis universal til fenomeni sifatida tilning barcha birliklarida namoyon bo‘ladi. Ushbu sohada aniqlangan til universalari deyksisni chuqur tadqiq etish, olingan natijalarni turli tillarga tatbiq qilish imkoniyatlarini yuzaga keltiradi.

Uslubshunoslik va grammatikada deyksis masalasi yetarlicha o‘rganilgan bo‘lib, til birliklarining boshqa darajalarida, xususan, morfemalarda hamda matn doirasida tadqiq etish istiqbolli yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Morfemalarda deyksisning mavjudligi va qo‘llanilishi uning morfologik darajada amalga oshirilishini ko‘rsatadi hamda bu holat tillarning morfologik tuzilishiga bevosita bog‘liq ekanligini tasdiqlaydi. Ko‘plab tadqiqotlar deyksisning morfologik birliklar orqali ifodalanishini, xususan, derivatsion morfemalar yordamida matnni

shakllantirishda muhim rol o‘ynashini ko‘rsatadi. Shunga qaramay, deyksisning matndagi ahamiyati hanuz yetarli darajada tadqiq etilmagan. Buning asosiy sababi mazkur fenomenning ko‘p qirrali xususiyatga ega ekanligidadir. Matn kichik birliklarni o‘z ichiga olgani sari, ushbu birliklar bilan bog‘liq deyksis, uning semantikasi va funksiyalari ham kengayib boradi. Morfema, so‘z va gap darajasidagi deyksis matn tarkibiga kirgach, o‘ziga xos yangi ahamiyat kasb etadi va faqat alohida birliklarga xos bo‘lgan deyktik xususiyatlar yig‘indisi bilan cheklanib qolmaydi. Ayniqsa, badiiy matn ko‘p qirrali tuzilishga ega bo‘lgani sababli, deyksis tilning yuqori darajasidagi murakkab birlik sifatida matnning turli kategoriyalari va xususiyatlariga singib ketadi hamda matn yaratilishida faol ishtirok etadi.

NATIJALAR. Ushbu tadqiqotlar asosida diskurs yoki matn deyksisini besh asosiy kategoriya doirasida ajratish mumkin.

Deyksis kategoriyalari iyerarxiyasi:

1) umumiy falsafiy (inson, fazo, vaqt);

2) tilga asoslangan (subyektlik, temporallik, lokallik, aniqlik–noaniqlik);

3) semantik-pragmatik (mazmunlilik, interpretatsiyalanuvchanlik);

4) arkiblanganlik (butunlik, bo‘linuvchanlik, yakunlanganlik);

5) Faqat badiiy matnga xos mazmunli (qahramon, xronotop, kuzatuvchi).

Umumiy falsafiy kategoriya deyksisning asosini tashkil etadi va gapirish vaziyatidagi shaxs, joy hamda vaqt bilan chambarchas bog‘liq. Bu kategoriya til darajasida subyektlik, lokallik kabi funksional-semantik kategoriyalar orqali ifodalanadi. Masalan, o‘rinlik birliklari (bu yer – u yer, hozir – o‘shanda), harakat fe’llari (kelmoq – ketmoq) va grammatik vaqt shakllari bunga misol bo‘la oladi.

Tilga asoslangan kategoriya badiiy matnda aniqlik va noaniqlikni anafora hamda deyksis vositasida bartaraf etadi va voqeaning reallik darajasini oshiradi. Shu bilan birga, matnning yaxlitligini ta’minlaydi.

Semantik-pragmatik kategoriyada deyksis mazmunlilik, interpretatsiyalanuvchanlik va reallik bilan bog‘liq holda namoyon bo‘ladi. Matn muallifi va o‘quvchi o‘rtasidagi fazoviy-vaqt jihatidagi farqlar matnning talqiniga

ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Kuzatuvchi (muallif, qahramon yoki o‘quvchi) voqeani turli masofadan idrok etadi va baholaydi.

Tarkiblanganlik kategoriyasida deyktik birliklar matnning butunligi, bo‘linuvchanligi va yakunlanganligini ta’minlaydi. Bu jarayonda sarlavhalar, boshlanish va fazoviy-vaqt chegaralarini belgilovchi deyktik elementlar, hatto morfema darajasidagi birliklar ham ishtirok etadi.

Faqat badiiy matnga xos mazmunli kategoriyada esa deyktik aniqlik o‘quvchiga badiiy olamni to‘liq tasavvur qilish imkonini beradi. Xronotop inson, fazo va vaqt kategoriyalarini o‘zida mujassamlashtirib, matnning badiiy yaxlitligini ta’minlaydi. Kuzatuvchi kategoriyasi muallif, qahramon va o‘quvchini birlashtirib, “deyktik paritet”ni yuzaga keltiradi.

XULOSA. Xulosa qilib aytganda, uslubshunoslikda deyksis badiiy matnning deyarli barcha kategoriyalari bilan uzviy bog‘liq bo‘lib, matnning shakllanishi va idrok etilishida muhim rol o‘ynaydi. U matnning fazoviy-vaqt doirasini, modalligini, realligini hamda interpretatsiya imkoniyatlarini belgilaydi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Сребрянская Н.А. Нарративный дейксис и его корреляция с категориями художественного текста // Вестник ТГПУ. 2005. Вып. 3 (47).

2. Сафаров Ш. Прагмалингвистика. Тошкент: Ўзбекистон Миллий нсиклопедияси Давлат илмий нашриёти, 2008.

3. Ҳакимов М, Газиева М. Прагмалингвистика асослари. Тошкент, 2020.

Мамажонов А. Қўшма гап стилистикаси. Тошкент: Фан, 1990, 16-25-бетлар.

TILSHUNOSLIKDA DEYKSIS TUSHUNCHASI HAQIDA MULOHAZALAR.

Abdusalamova N.M.

FarDU magistranti, shahnozatojimamatova75@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada deyksis tushunchasi, deyksis birliklar, shifterlar va uning fanga kirib kelishi, deyksisning turlari, shaxs deyksisi, shaxs deyksisi xususidagi nazariy qarashlar hamda uni ifodalovchi til birliklari keltirilgan va nazariy fikrlar bayon etilgan. Shaxs deyksisini ifodalovchi til birliklarini yoritish maqsadida mumtoz adabiyotdan olingan misollar keltirilib, tahlilga tortilgan.

Kalit so'zlar: pragmalingvistika, deyksis, deyktika, deyksis birliklar, deyksis sistema, olmoshlar, shifterlar, modal, sotsial, diskurs, simvol, indeks.

Til insonning dunyoni anglashi muayyan voqelikni tushunib yetishi, idrok etishi va ijtimoiy aloqaga kirishishini ta'minlovchi semiotik hodisadir. Jahon tilshunosligida tilshunoslarning e'tibori til tizimining qanday tashkil topganligi, uni yuzaga chiqaruvchi til birliklari, bu birliklarning o'zaro munosabatga kirishish yo'llari, ushbu munosabatlar asosida hosil bo'ladigan umumiy-mazmuniy tizim va uning tahliliy tadqiqiga qaratilgan. Necha yillardirki, tilshunos olimlar "til va borliq", "til va tafakkur" hamda "til, borliq va inson" omili tushunchalari borasida izlanishlar olib bordilar. Biroq bu tadqiqiotlarda tilning ijtimoiyligi, komunnikativligi, estetikligi kabi xusussiyatlari bilan bog'liq tilning mohiyati to'la-to'kis ochildi", deb bo'lmaydi. Xususan, e'tiborlisi shundaki, inson bilan borliq o'rtasidagi munosabatlarning aks etishi ham tilda namoyon bo'ladi. Ushbu musobatlar orqali tilning bizga noma'lum qirralari turli nutqiy aktlar yordamida yoritiladi.

Zamonaviy tilshunoslikning til birliklarini inson omili bilan bog'liq holda o'rganuvchi yo'nalishlardan biri pragmalingvistika bo'lib, mazkur yo'nalishda til birliklari nutq vaziyati, kontekst bilan bog'liq holda o'rganiladi. Pragmalingvistikada til birligining nutq vaziyati, kontekst bilan bog'liq holda o'rganuvchi masalalaridan biri deyksis nazariyasidir. Pragmalingvistikada til birliklari orqali kommunikativ muloqot ishtirokchilari, muayyan voqelik, u amalga

oshirilgan vaqt, o‘rin kabilarga ishora qilish deyksis hodisasi sifatida, tilning ishora birliklari esa deyktik birliklar tarzida talqin etiladi”[3] . Deyktik vositalarning asosiy vazifasi muloqot jarayonida til birliklarini voqelik bilan bog‘lash hamda unga nisbatan subyektiv munosabat bildirishdir.

Deyksis termini grekcha “deixix” so’zidan olingan bo’lib, u tilda lisoniy birliklar funksiyasi yoki ma’nosini ko’rsatish hamda ishora qilish degan ma’noni bildiradi, ular deksik va Grammatik vositalar bilan ifodalanadi[4]. Deyksis termini ko’rsatish, ishora qilish ma’nolarini ifodalaydi, har qanday tilde bunday vazifani bajarishga xoslangan maxsusu so’zlar, grammatik vositalar mavjud. Shundan kelib chiqib deyksis terminini hodisa hamda birlik ma’nosida qo’llaniladi desak mubolag’a bo’lmaydi.

Deyksis atamasi ham jahon tilshunosligida ham o’zbek tilshunosligida turli olimlar tomonidan tadqiq e’tilib o’rganilgan. Bu atama yaqin orada tilshunoslikda paydo bo’lgan atama hisoblanmaydi. Fanda “deyksis” tushunchasi antik davrdan beri ma’lum bo’lgan hodisa sifatida boshqa nomlar bilan e’tirof etib kelingan atama hisoblanadi. Tilshunoslikda esa bu termin va tushunchaning paydo bo’lishi K.Brugman, V.V.Vinogradov, A.M.Peshkovskiy, A.A.Potebnya kabi olimlarning nomi bilan bog’liqdir. Ushbu atama tilshunoslikda dastlab shifter termini bilan nomlandi. Shu bois deyksis muammolariga oid tadqiqotlar tarixi shifterlar haqidagi qarashlarda ham o’z ifodasini topgan. Jumladan O.Yespersen bu hodisa bilan bog’liq ilk qarashlarini o’zining 1922-yildagi asarlarida bayon qiladi. Undan keyin R.Yakobson O.Yespersenning shifterlar haqidagi qarash va izlanishlarini diqqat bilan kuzatar ekan, bu tushunchalar bilan bog’liq fikrlaeni nutqiy aktlar nazariyasi kontekstida yanada rivojlantiradi. Tilda bunday semiotik tushunchalar va belgilar nazariyasining shakllanishida indikativ (ko’rsatish) funksiya nazariyasi paydo bo’ldi. Shundan kelib chiqib aytish mumkinki, hozirgi ilmiy adabiyotlarda ko’rsatish

[3] Safarov Sh. Pragmalingvistika. Monografiya. –Toshkent,2008. B.16..
[4] https:\\www.psypart.com\shifter. Murojot sanasi: 15.11.2025.

va havola qilishga asoslangan bunday funksional nazariyalar deyktika[5] nazariyasi nomi bilan yuritila boshlandi.

Tilshunoslikda, xususan, pragmalingvistikada deyksis masalalari yuzasidan K.Brugman, K.Byuler, Y.V.Paducheva, V.V.Vinogradov, A.M.Peshkovskiy, A.A.Potebniya, N.D.Arutyunova, Y.M.Volf, G.G.Matveeva kabi olimlar ko'plab izlanishlar olib bordilar. O'zbek tilshunosligida ham bu borada qator tadqiqotlar amalga oshirildi, xususan, bu borada yetakchi mutaxasislardan biri professor SH.Safarovning derksis bo'yicha "Pragmalingvistika" asarini[6] alohida ta'kidlash o'rinlidir. Olimning ko'plab ilmiy izlanishlari tufayli o'zbek tilshunosligida deyktika haqidagi dastlabki tushunchalar fanga olib kirildi va izohlandi. Deyksisning turlari turli manbalar va misollar orqali yoritilib, ilmiy asoslab berildi. Bundan tashqari deyktik sistemaning shakllanish tarixi haqidagi ilk tushunchalar professor A.Nurmonov ishlarida ham ko'zga tashlanadi.

Yuqoridagi izlanishlar va ilmiy qarashlardan kelib chiqib deysis va uning turlari turli ilmiy izlanishlar yordamida tadqiq e'tilgan desak mubolag'a bo'lmaydi. Mazkur ilmiy izlanishlar natijasi o'laroq ularni ma'lum tamoyillar asosida guruhlarga ajratish an'anasi kuzatiladi. Deyksis maydoni birliklarining ilk tasnifi uchun morfologik tamoyil ustuvorlik qilgan bo'lsa, *men, sen, u* kabi shaxs deyksisi, nutqiy akt komponentlarining nutq subyektiga nisbatan egallagan o'rni hisobga olingan holda *bu yerda, u yerda* kabi makon makon deyksisi va nutqiy akt vaqti nazarga tutilgan *hozir, o'shanda, kecha, bugun, ertalaga* kabi temporal deyksis guruhlarga ajratilgan. Shuningdek deyksisning modal, sotsial, diskurs kabi turlari ajratiladi[7], bu hodisalar til faktlari tahlili va turli tilshunos olimlarning ilmiy qarashlari orqali yoritilgan hamda misollar bilan isbotlangan.

Anglashiladiki, nutqiy vaziyat, kontekst qurshovi deyktik belgilarning nimaga ishora qilayotganini aniqlash uchun muhim ahamiyatga ega. Ayrim hollarda kishilik

[5] Hakimov M. Gaziyeva M. Pragmalingvistika asoslari. –Toshkent, 2020.-B.59.
[6] Safarov Sh. Pragmalingvistika. Monografiya. –Toshkent,2008.
[7] Hakimov M. Gaziyeva M. Pragmalingvistika asoslari. –Toshkent, 2020.-B.67.

olmoshlari matnda tushib qolishi mumkin. Mazkur holda so‘zlovchi shaxsiga ishora qilish vazifasini shaxs-son ko‘rsatkichlari o‘z zimmasiga oladi[8] [6, 60]. Masalan: “Mavlono Sulaymoniy – Bobur Mirzo xizmatida bo‘lur erdi. Va badihani ravon aytur erdi”. (“Мажолис ун-нафоис”). Men kishilik olmoshi matnda birinchi shaxsga – so‘zlovchiga ishora qiladi. Ba’zida esa matnda bu olmosh tushib qolib, shaxsga ishora qilish vazifasini fe’lning shaxs-son qo‘shimchalari o‘z zimmasiga oladi. Masalan:

Ishq tarkiga qilurmen tun-u kun ko‘ngluma tuhmat.

Ki, otin tutmag‘ay el tutsa bu oyin bila shuhrat. *(А.Навоий “Фавойид ул-кибар”56 б.)*

Ko‘rib turganimizdek, Navoiy birinchi shaxsni ifodalovchi –man shaxs-son affiksining eski turkiy tildagi ko‘rinishi – -men affiksini qo‘llagan. Mazkur ko‘rsatkich matnda shaxsga, ya’ni so‘zlovchiga ishora qilgan hamda shaxs deyksisini hosil qilgan.

Yuqoridagilardan xulosa qilib aytish mumkinki, muayyan matnda shaxsga ishora qiluvchi deyktik birliklarning qo‘llanilishi takrorlar orqali paydo bo‘ladigan nutqiy g‘alizlikning oldini oladi, matnning, yaxlitligini, izchilligini ta’minlaydi hamda matnning mazmundorligini oshiradi.Badiiy matnda deyktik belgilarni qo‘llash kitobxonni fikrlashga, mushohada yuritishga undaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Alisher Navoiy. “Favoyid ul-kibar”. Yigirma tomlik, oltinchi tom. Toshkent.: O’zbekiston Fan, 1990.

2. Safarov Sh. Pragmalingvistika. Monografiya. –Toshkent,2008.

3. Hakimov M. O‘zbek pragmalingvistikasi asoslari. –Toshkent, 2013.

4. Hakimov M. Gaziyeva M. Pragmalingvistika asoslari. –Toshkent, 2020..

5. Davlatova R. O’zbek tilining deyktik birliklari. Filol.fan. d-ri.diss.- Toshkent.2020.

[8] Давлатова Р. Ўзбек тилининг дейктик бирликлари. Филол.фан.д-ри ... дисс. – Тошкент, 2020. - 60 б.

O‘ZBEK TILINING LEKSIKASIDAGI NOFAOL O‘ZLASHMA ARABCHA SO‘ZLAR XUSUSIDA

Ro‘zikulova B.M.

Qarshi DU talabasi, banurozikulova@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada o‘zbek tilining o‘zlashma qatlamida mavjud bo‘lgan nofaol arabcha so‘zlar haqida ma'lumot berilgan.

Kalit so‘zlar: O‘zlashma qatlam, o‘zlashma so‘zlar, arabcha so‘zlar, o‘zlashma so‘zlar ahamiyati.

Barcha tillar kabi o‘zbek tili lug‘ati ham o‘z qatlam va o‘zlashma qatlamdan tashkil topgan. Izohli lug‘atda o‘z qatlam bilan bir qatorda o‘zlashma qatlam ham chuqur va har tomonlama yoritib berilgan. O‘zbek tiliga eng birinchi o‘zlashma so‘zlar sifatida kirib kelgan so‘zlar qatoriga quyidagilarni kiritishimiz mumkin:

1. Hind tilidan o‘zlashgan so‘zlar: barcha, bibi, paysa, tovus, chaqmoq.

2. Xitoy tilidan o‘zlashgan so‘zlar: choy, lag‘mon, shiypon

3. Qadimgi yunon tilidan o‘zlashgan so‘zlar: iqlim, marvarid, ark, billur.

Keyinchalik tilimizga fors-tojik, arabcha, rus va boshqa xorijiy tillardan katta miqdorda so‘zlar o‘zlashgan. Bu tillardan o‘zlashgan so‘zlarga quyidagilarni misol sifatida keltirish mumkin:

Arabcha: maktab, kitob, ilhom, ma’no, tanqid, kashf, hayot, haqiqat, tanqid, hisob, hurmat, musobaqa, qonun, san’at va hokazolar.

Fors-tojikcha so‘zlar: do‘st, barg, andisha, shabnam.

Rus tili va boshqa tillarga mansub so‘zlar: brigada, kompyuter, radio, agronom, diagnostika, televizor, kosmos, va boshqa minglab so‘zlar.

Bir tildan boshqa bir tilga so‘z o‘zlashishi qisqa muddatli yoki oson amalga oshadigan jarayon emas. Bunday hodisa ikki turdagi ta’sir natijasida yuz beradi. Birinchisi, uzoq muddatli o‘zaro aloqa munosabatlari, muloqot hamda hududiy yaqinlik. Ikkinchisi esa nihoyatda kuchli ma’naviy ta’sir orqali tildan tilga so‘z o‘zlashishi mumkin. Mavzuyimizga muvofiq ravishda arab tiliga to‘xtaladigan bo‘lsak, ushbu ikki turdagi ta’sir ham arab tilidan o‘zbek tiliga so‘z o‘zlashishiga hissa qo‘shgan. Arab xalifaligi istilosidan keyin o‘zbeklar asrlar davomida arablar

bilan bevosita muloqotda bo‘ladilar va bu barcha soha bilan birga tilimizga ham o‘z ta’sirini o‘tkazmay qolmadi. Shuningdek, o‘zbek tiliga arab tilidan so‘z o‘zlashishi buyuk mutafakkir, o‘zbek adabiy tili asoschisi hazrat Alisher Navoiy nomi bilan bevosita bog‘liq. Navoiy o‘z asarlarida arabcha so‘zlardan mohirona va ko‘p miqdorda foydalanib, ushbu so‘zlarni o‘zbek tiliga tadbiq qila olgan. Alisher Navoiyning asarlarini o‘zbek xalqi mamnuniyat bilan qabul qildi va ushbu asarlarda ishlatilgan o‘zlashma so‘zlar bizning tilimizga o‘rnashdi.

Bugungi kunda O‘zbek tilining izohli lug‘atiga nazar soladigan bo‘lsak, unda barchaga tanish, seriste’mol so‘zlar bilan birga hozirgi davrda muloqotda, kundalik hayotda hamda o‘quv adabiyotlarida deyarli ishlatilmaydigan nofaol so‘zlar ham uchraydi. Nofaol arabcha so‘zlar ham shular jumlasidandir. Bunday so‘zlarga ko‘plab misollar keltirish mumkin:

A’mo – ko‘zi ojiz, ko‘r.

A’zam – eng buyuk, eng ulug‘

Abas – foydasiz, natijasiz, behuda

Abdol – avliyo, Xudoga yaqin

Abdolvash – avliyo tabiatni, qalandarsifat

Vola – shaydo, maftun, hayratda qolgan

Zabh – so‘yish, qurbonlik qilish

Kashshof – kashf qiluvchi, ochuvchi, izquvar

Ajuz – qari xotin, kampir

Vohid – yagona, bir, birlik

Ablaq – chipor, chavkar(ilon tusi haqida)

Bikr – sof, toza; bobida

Ijtihod – jahd qilish, harakat qilish

Jozib – o‘ziga jalb qiluvchi, o‘ziga tortuvchi

Baytar – veterinar

Basit – sodda, oddiy

Dayn – qarz

Jubba – keng yanglishayotgandirman ustki kiyim

Zanji – qora tanli

Barot – oqlash, begunohlik

Bil’aks – aksincha

Davvor – davra yashovchi

Jurm – jinoyat, gunoh

Darj – yozib qo‘shib qo‘yish, ro‘yxat

Zalil – xo‘rlangan

Iftiro – bo‘hton, tuhmat, gap qilish

Bazl – sovg‘a, hadya, in’om

Dasisa – hiyla, nayrang,

Kuffor – kofirlar

Ziq – g‘oyat cheklangan, tig‘iz, oz

Biroq hozirgi kunda bu so‘z deyarli iste’molda yo‘q, uning o‘rniga sof o‘zbekcha yoki boshqa zamonaviy o‘zlashma muqobillari ishlatiladi.

Yuqorida zikr qilib o‘tilgan va ularga o‘xshash minglab so‘zlar XXI asrgacha yaratilgan asarlarda badiiy asarlarda, she’rlar, adabiyotlarda uchraydi. Jumladan, Abdulla Qodiriy, Abdulhamid Cho‘lpon, Mirkarim Osim, Erkin Vohidov kabi taniqli yozuvchi va shoirlar asarlarida bunday so‘zlar qo‘llanilgan. Masalan:

Qo‘nim sharobin ichsang,
Tomsang jigar kabobim,
Zabh etmay o‘zni, Erkin,
Ba’zi shohona qilmas.

Yoki boshqa misol keltirsak: *Bir chekkada chordona qurgan, o‘ng tizzasiga qog‘oz qo‘yib, o‘ng qo‘liga qalam ushlab turgan munshiy farmoni oliyni darj etdi*. (M. Osim, “Sehrli so‘z”). *Makkor Homidning iblisona dasisasi bir oilani tamom ishdan chiqarayozgankim, bu to‘g‘rida ayniqsa sizga so‘zlash ortiqchadir*. (A. Qodiriy, “O‘tgan kunlar”).

Shundan so‘ng ularning o‘rnini yangi zamonaviy so‘zlar egallab bordi. Biz tahlil qilgan so‘zlar esa o‘zbek tilining lug‘at tarkibigina bo‘lib qoldi. Bu hodisa bugungi kunda ham davom etib kelmoqda.

Shundan kelib chiqib xulosa qilish mumkinki, bugungi o‘zbek tilimiz ham vaqtlar o‘tishi natijasida muloqotda qo‘llanilmaydigan nofaol so‘zlarga aylanish xavotiri mavjud. Bu muammoni bosqichma-bosqich bartaraf etish chora-tadbirlarini ko‘rish har bir til sohasi vakilining vazifasi hisoblanadi.

Adabiyotlar ro‘yxati:

1. O‘zbek tilining izohli lug‘ati. 5 jildlik. A.Madvaliyev tahriri ostida. – Toshkent: O‘zbekiston Milliy ensiklopediyasi, 2006.

2. Qurbonova M. va boshqalar. O‘zbek tili o‘zlashma so‘zlarining urg‘uli lug‘ati. – Toshkent: “Nodirabegim” nashriyoti, 2021.

3. Irisqulov M. Tilshunoslkka kirish. – Toshkent: Yangi asr avlodi, 2009.

CHIZIQLISIZ ALGEBRIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHIMINI TOPISHNING ITERATSION USULLARI.

Axmedov A.A[1]., Fazliddinov X.D[2].

[1]FarDU dotsenti, f.-m.f.b.f.d. [2]FarDU, talabasi,

Annotatsiya: Ushbu hujjatda chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini iteratsion usullar (oddiy iteratsiya, Zeydel usuli) bilan yechish ko‘rib chiqiladi. Kanonik shakl, konvergentsiya shartlari ($q < 1$), boshlang‘ich yaqinlashishlar va yaqinlashish tezligi tahlil etilgan. Aniq usullar bilan solishtirganda iteratsion usullarning afzalliklari (ko‘p noma’lumli sistemalarda samaradorlik) va cheklovlari muhokama qilinadi. Maqsad – usullarni amaliy masalalarga qo‘llash orqali hisoblash matematikasidagi samaradorlikni oshirishni asoslash.

Kalit so‘zlar: chiziqli tenglamalar sistemasi, iteratsion usullar, oddiy iteratsiya, Zeydel usuli, konvergentsiya shartlari, kanonik shakl, taqribiy yechim, Gauss usuli, EHM yordamida yechish, hisoblash matematikasi.

Kirish. Talabalarga ta’lim berayotgan pedagoglar “Ta’lim to‘g‘risida”gi qonun va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” talablarini to‘liq bajarishlari va uni amalga oshirish uchun barcha imkoniyatlardan foydalanishlari davr talabi hisoblanadi.

Oliy ta’lim pedagogikasi har bir pedagogdan ta’lim jarayonida talabani faollashtiradigan interfaol metodlardan foydalanish, ta’lim jarayonida talaba bilan hamkorlikda ishlash, ma’lum bilimlar hajmini talabaga yetkazish bilan cheklanmay, talabani mustaqil bilim olishga davat etish goyasini ilgari surmoqda.

Kundalik xayotimizdan kelib chiqanimizda (chats) bizning hayotimizda katta bir o‘ringa ega. Masalan kunlik sarif harajatlarimizni misol qilishimiz mumkun. Bunda $x + y + z = S$ formula yordamida bu yechim bo‘la oladi.

Asosiy qisim. Iqtisodiy masalalarni yechishda ko‘p noma‘lumli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi qo‘llaniladi. m ta tenglamalardan tuzilgan n ta noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

bu yerda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — sistema koeffitsiyentlari, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lum koeffitsiyentlar, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ozod hadlar.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini quyidagi ixchamroq ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish usullarini asosan ikki guruhga ajratish mumkin:

1) aniq usullar – bu usullarga oliy matematika kursidan ma'lum bo'lgan Kramer qoidasi, Gauss usuli, teskari matritsalar usuli kiradi. Bu usullar sistemalarni yechish uchun sistema koeffitsiyentlariga bog'liq bo'lgan formulalarni hosil qilish imkonini beradi;

2) iteratsion usullar – ular qatoriga iteratsiya usuli , Zeydel usuli va hokazolar kiradi. Bu usullar sistemaning berilgan aniqlikdagi yechimini topish imkonini beradi.

Agar $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ sonlari mos ravishda (1) tenglamalar sistemasidagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lum koeffitsiyentlar o'rniga qo'yilganda sistemaning har bir tenglamasi ayiniyatga aylansa, $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ sonlar sistemaning yechimi deyiladi.

(1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, sistema birgalikda, aks holda, ya'ni yechimga ega bo'lmasa, sistema birgalikda emas deyiladi. Agar birgalikdagi sistema bitta yechimga ega bo'lsa, sistema aniq, agar birgalikdagi sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, sistema noaniq deb ataladi.

Noma'lum soni katta bo'lganda Gauss usulining aniq yechimlar beruvchi chiziqli sxemasi juda murakkab bg'lib qoladi. Bunday hollarda sistema ildizlarini topish uchun ba'zan taqribiy sonly usullardan foydalanish qulaydir, bu usullardan biri iteratsiya usulidir.

Berilgan ushbu

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \quad \ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

kanonik shaklga keltiriladi. So‘ng $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ boshlang‘ich yaqinlashishlar tanlanadi, keyingi yaqinlashishlar esa

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \\ \quad \ldots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \end{cases} \tag{2}$$

formulalar bo‘yicha izlanadi. Agar $\varphi_i (i = 1, n)$ funksiyalar $\max_i | \vec{x} - \vec{x}^{(0)}| \le \delta$ sohada aniqlangan, uzluksiz differensiallanuvchi va

$$q_m = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \max_{|\vec{x} - \vec{x}^{(0)}| \le \delta} \sum_{j=1}^{n} | \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} | \right\} < 1$$

Tengsizlikni qanoatlantirsa, hamda $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ boshlang‘ich yaqinlashishlar uchun

$$| x_i^{(0)} - \varphi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})| \le \eta i = 1, n, \frac{\eta}{1 - q_m} \le \delta$$

shartlar bajarilsa,

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \quad \ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi shu sohada yagona $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ yechimga ega bo’ladi va (2) ketma-ketliklar bu yechimga intiladi va intilish tezligi $| \xi_i - x_i^{(k)}| < \frac{\eta}{1 - q_m} q_m^n \quad (i = \overline{1, n})$

tengsizlik bilan baholanadi. q ning qiymati m masofada (kubik masofada, normada) hisoblanadi. U s (oktaedrik) yoki l (sferik) masofada ham berilishi mumkin.

Misol.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2x^2 - x(y+4) + 1 = 0 \\ f_2(x,y) = x + 2\lg x - y^2 = 0 \end{cases}$$

sistemaning musbat ildizlari $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$ aniqlikda topilsin.

Yechish. Sistemaning ildizlarini grafik yordamida taqriban aniqlaymiz. EHM quyidagi natijani beradi, programma va chizmadan ko'rinishicha shu ildiz $2,7 < x < 2,9$, $1,8 < y < 2,0$ to'g'ri to'rtburchak ichida yotadi. (x_0, y_0) boshlang'ich yaqinlashish sifatida (2,8;1,9) nuqtani olamiz. Sistemani kanonik shaklga keltiramiz:

$$x = \sqrt{0,5(x(y+4)-1)} = \varphi_1(x,y),$$
$$y = \sqrt{x + 2\lg x} = \varphi_2(x,y).$$

Endi $\{|x-2,8| \le 0,1, |y-1,9| \le 0,1\}$ sohada (4) shartning bajarilishini tekshiramiz ($M = 0,4343$ - o'tish moduli):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{y+4}{4\sqrt{0,5(x(y+4)-1)}}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{x}{4\sqrt{0,5(x(y+4)-1)}},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1 + \frac{2M}{x}}{2\sqrt{x + 2\lg x}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0; \quad \max_{x,y} \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| < 0,55, \quad \max_{x,y} \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| < 0,27,$$

$$\max\left(\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right|\right) < 0,82, \quad \max\left(\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|\right) < 0,35.$$

Demak, $q = 0,82 < 1$ Iteratsiya jarayoni yaqinlashadi. Ketma-ket yaqinlashishlarni $x_{k+1} = \sqrt{0,5(x_k(y_k+4)-1)}$ va $y_{k+1} = \sqrt{x_k + 2\lg x_k}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ formulalar bo'yicha hisoblaymiz:

k	x	y	k	x	y
0	2,8	1,9	4	2,77987	1,91567
1	2,78568	1,92206	5	2,77892	1,91518
2	2,78361	1,91717	6	2,77829	1,91486
3	2,78128	1,91646			

Javob: $x = 2,7781 \pm 0,2 \cdot 10^{-4}$, $y = 1,9148 \pm 0,1 \cdot 10^{-4}$

Xulosa. Chiziqli algebrik tenglamalar sistemalarini yechishning iteratsion usullari, xususan, oddiy iteratsiya usuli va Zeydel usuli kabi metodlar, noma'lumlar soni ko‘p bo‘lgan murakkab sistemalarda aniq usullarga (Gauss, Kramer, teskari matritsa) nisbatan qulayroq va samarali hisoblanadi. Iteratsion usullar taqribiy yechimlarni berilgan aniqlik darajasida topishga imkon beradi va bu jarayon sistemani kanonik shaklga keltirish, boshlang‘ich yaqinlashishlarni to‘g‘ri tanlash hamda konvergentsiya shartlarini (masalan, $q<1$ tengsizligi) tekshirishga asoslanadi.

Berilgan misolda musbat ildizlarni topish jarayoni grafik va EHM yordamida boshlang‘ich nuqtani aniqlash, sistemani kanonik ko‘rinishga o‘tkazish va iteratsiya formulalari orqali ketma-ket yaqinlashishlarni hisoblash orqali amalga oshirilgan. Natijada, usulning yaqinlashishi va berilgan aniqlikdagi yechimga yetkazishi isbotlangan.

Umuman olganda, iteratsion usullar zamonaviy hisoblash texnikalarida keng qo‘llaniladi va talabalarga nafaqat nazariyani, balki amaliy masalalarni EHM yordamida hal qilish ko‘nikmalarini shakllantirishda muhim ahamiyatga ega. Ushbu usullarni o‘zlashtirish kelajak mutaxassislariga murakkab ilmiy-texnik muammolarni samarali yechish imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Balakrishnan A.V. Chiziqli tenglamalar sistemalarini iteratsion usullar bilan yechish. – Toshkent: Fan, 1985.
2. Bakhvalov N.S. Chislennyye metody (analiz, algebra, obyknovennyye differensialnyye uravneniya). – Moskva: Nauka, 1975.
3. Demidovich B.P., Maron I.A. Vychislitelnaya matematika. – Moskva: Nauka, 1977.
4. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. Vychislitelnyye metody lineynoy algebry. – Moskva: Fizmatgiz, 1963.
5. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennyye metody. – Moskva: Nauka, 1989.
6. Verzhbitskiy V.M. Chislennyye metody (matematicheskoye modelirovaniye i vychislitelnyy eksperiment). – Moskva: Vysshaya shkola, 2001.

7. Tursunov A., Mirzayev T. Oliy matematika (Chiziqli algebra va analitik geometriya). – Toshkent: O‘zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2010.

8. To‘rayev E., To‘xtayev Sh. Hisoblash matematikasi. – Toshkent: Universitet, 2006.

9. Ismoilov A.I., Ro‘zaliyev Sh.A. Sonli usullar. O‘quv qo‘llanma.–Farg‘ona. 2025.