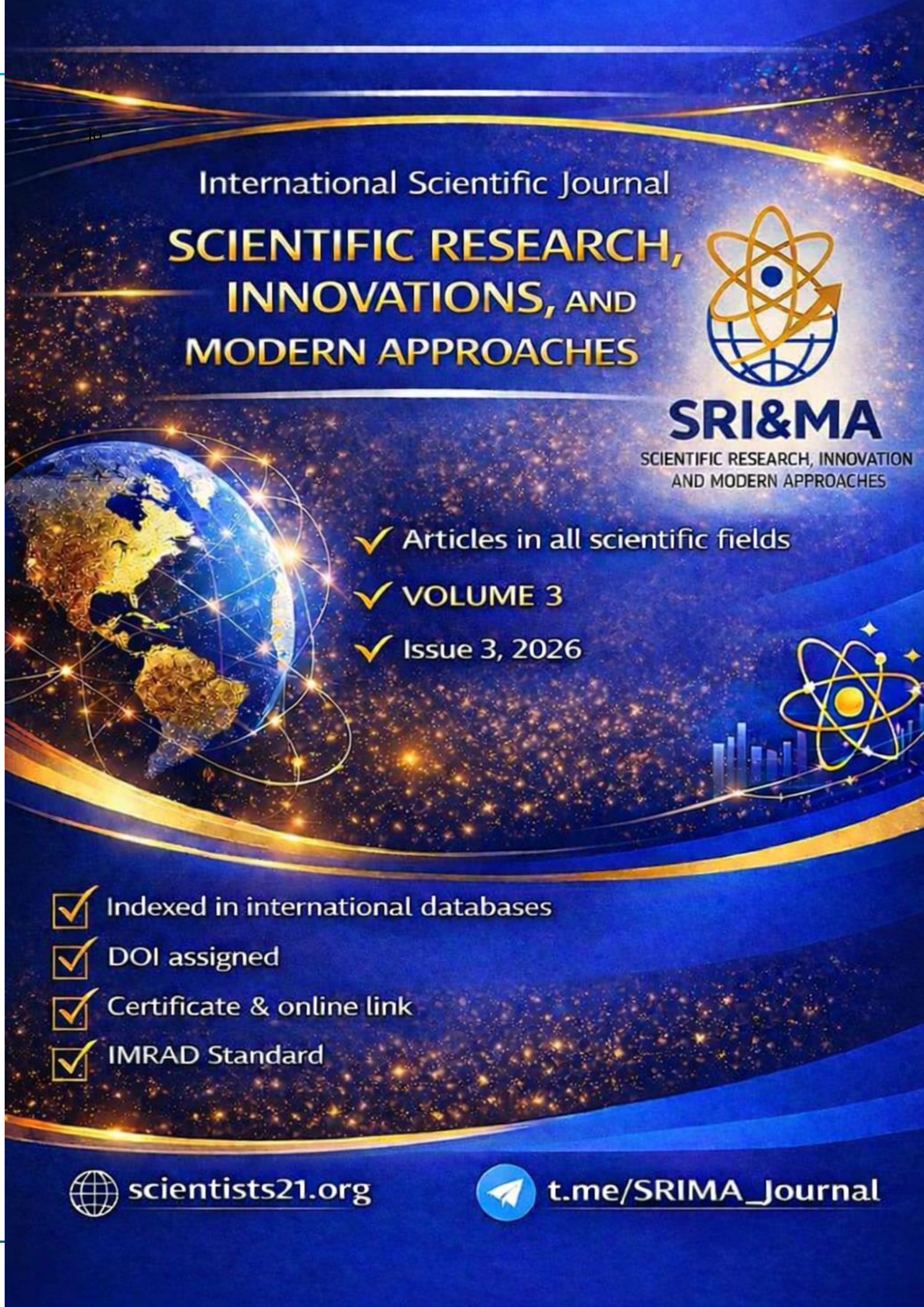

International Scientific Journal
SCIENTIFIC RESEARCH, INNOVATIONS, AND MODERN APPROACHES
SRI&MA
SCIENTIFIC RESEARCH, INNOVATION AND MODERN APPROACHES
Articles in all scientific fields
VOLUME 3
Issue 3, 2026
Indexed in international databases
DOI assigned
Certificate & online link
IMRAD Standard
scientists21.org
t.me/SRIMA_Journal

“SCIENTIFIC RESEARCH, INNOVATIONS AND MODERN APPROACHES” xalqaro ilmiy jurnali Farg‘ona davlat universiteti kengashi ruxsati bilan tashkil etilgan.

2025-yil 27-dekabr. 5-sonli yigilishi.

BOSH MUHARRIR

Tojiboyev I.T. – Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

MAS’UL MUXARRIR

Ismoilov A.I. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori(PhD).

TAXRIRIYAT A’ZOLARI

1. Karimov K.T. – Fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent.
2. Rasulov V.R. – Fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent.
3. Jurayev V.T. –Pedagogika fanlari doktori (DSc), dotsent.
4. Sharofutdinova R.Sh – Pedagogika fanlari doktori (DSc), dotsent.
5. Qayimov A. – Filologiya fanlari fanlari doktori (DSc), dotsent.
6. Mamatqulova S.A. – Kimyo fanlari bo‘yicha fan doktori (DSc), professor.
7. Xaydarov I.U.– Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.
8. Raximov Q.O. – Texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent
9. Zaynolobidinova S.M. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
10. Umarov Sh.A. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
11. Onarqulov M.K. – Fizika– matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
12. Sotvoldiyev A.I. – Fizika– matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
13. Oripov Sh.A. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
14. Parmanova R.T. – Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
15. Ro‘zaliyev Sh. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
16. Mamatova Z.X. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD),dotsent.
17. Sharofutdinov I.U. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
18. Umarov B.A. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
19. Toshboltayev F.O‘. – Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
20. Abduraximova F.B. – Filologiya fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
21. Tojaliyev A.A. – Falsafa fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.
22. Rustamov I.A. – Falsafa fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).
23. Oripov A.A. – Iqtisodiyot fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.

MUNDARIJA

1. *Умаров Ш.А.* ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК — 5
2. *Xo‘jayev L.H., Saipnazarov J.M., Shoimova K.S.* GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR SISTEMASI UCHUN GURSA TIPDAGI TO‘G‘RI MASALA — 13
3. *Xo‘jayev L.H., Saipnazarov J.M., Marqayeva D.A.* QATLAMLI G‘OVAK-ELASTIK MUHIT UCHUN A_{μ}^{1} VA A_{μ}^{2} TESKARI DINAMIK MASALASI YECHISH ALGORITMI — 23
4. *Saipnazarov J.M., Xo‘jayev L.H., Xujaqulov N.T., Baratov Sh.O.* QOVUSHOQ - ELASTIK UCH QATLAMLI PLASTINKANING ERKIN TEBRANISH JARAYONIDA ASOSIY XOS CHASTOTASINI ANIQLASH — 34
5. *Jalilov Sh.S., Sattorov M.E. G‘aniyev S.E.* BIR O‘ZGARUVCHILI ALGEBRAIK POLINOMLARNING XOSSALARI VA ULARNING QO‘LLANILISHI — 39
6. *Sattorov M.E., Jalilov Sh.S.* YUQORI TARTIBLI O‘ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLI BO‘LMAGAN CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. — 45
7. *G‘ayrataliyeva S.E.* TOLDOSHLAR OILASIGA MANSUB DARAXTLARDA SO'RUVCHI ZARARKUNANDALARGA QARSHI KURASH CHORALARI — 53
8. Xatamova R.Z. O‘ZBEKISTONDA GILAMDO‘ZLIK TARIXINING MANBASHUNOSLIGI — 63
9. *Sotvoldiyev A.I.* TESKARI MATRITSA QURISHNING TURLI USULLARI: NAZARIY ASOSLAR VA AMALIY TAHLIL — 75
10. *Usmonova M.E.* GIBRID ALGORITMLARNING DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHDA QO‘LLANILISHI — 85
11. *Azimov A.A.* STOXASTIK SIRD MODELI YORDAMIDA JANUBIY-SHARQIY OSIYO MAMLAKATLARI UCHUN COVID-19 PANDEMIYASI TARQALISH DARAJASINI PYTHON DASTURLASH TILI YORDAMIDA ANIQLASH — 91
12. *Tojimamatov I.N., Egamberdiyeva N.S.* SQL TILI OPERATORLARI BILAN ISHLASH. TURLI OPERATORLARNI QO‘LLASHNI O‘RGANISH — 97
13. *Tojimamatov I.N., Jo‘rayev A.R.* ZAMONAVIY MBBT — 102
14. *Tojiboyev I.T., Sharipova G.M.* IKKI O‘LCHAMLI AYLANMA SISTEMANING KUCHLI CHIZIQSIZ TEBRANISHLARINI TADQIQ QILISH MASALASI — 106
15. *Sidiqjonovna D., Erkinova M.* THE ROLE OF ENGLISH IN THE DEVELOPMENT OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND — 116

INFORMATION TECHNOLOGY
16. *Qurbanova F.A.* *P* **EHTIMOLLIK VA** *I* **IDEMPOTENT EHTIMOLLIK O‘LCHOVLI FUNKSIYALAR O‘RTASIDAGI BOG‘LANISHLAR: NAZARIYA VA SUN’IY INTELLEKTGA TATBIQI** 123
17. *Xaydarov I.U., Abduqaxxorova M.M. Abduqaxxorova M.M.* **KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMANI YECHISHNING CHEKLI ELEMENTLAR USULI** 131
18. *Mazbutova P.S.* **5–7-SINF MATEMATIKA DARSLARIDA IJODIY MASALALARDAN FOYDALANISH IMKONIYATLARI** 135
19. *Худайбердиев Х.М.* **ТЕОРИЯ ИГР И СТРАТЕГИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ** 140
20. *Karimov K.T., Raximova I.A.* **UCH O‘LCHOVLI UCHTA SINGULYAR KOEFFITSIENTGA EGA BO‘LGAN ELLIPTIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN SHARNING SAKKIZDAN BIR BO‘LAGIDA NEYMAN MASALASINING SPEKTRAL XOSSALARI** 152
21. *Бабаджанов Ш.Ш.* **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЛОГИСТИКЕ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ, МОДЕЛИ И ПРАКТИКА ПРИМЕНЕНИЯ** 165
22. *Dadajonov O., Ortiqova D.* **A COMPARATIVE STUDY OF TEACHING METHOD EFFECTIVENESS ACROSS AGE GROUPS IN LANGUAGE LEARNING** 174
23. *Адизов А.А.* **РЯД ФУРЬЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В КОМПЮТЕРНОЙ НАУКЕ** 189
24. *Adhamova V.E.* **RITS USULI YORDAMIDA IKKINCHI TARTIBLI CHEGARAVIY MASALANI TAQRIBIY YECHISH** 196
25. *Ибрагимов Ш.М., Тугонбоева В.Х* **МУЛЬТИМЕДИЙНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК СРЕДСТВО ИНТЕНСИФИКАЦИИ ОБУЧЕНИЯ АНГЛИЙСКОМУ ЯЗЫКУ** 205
26. *Ибрагимов Ш.М. Махаматжонова Г.Т* **ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ В ОБУЧЕНИИ АНГЛИЙСКОМУ ЯЗЫКУ** 214
27. *Исмоилжонова Ш.У.* **ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПЛАТФОРМ В ФОРМИРОВАНИИ ЯЗЫКОВОЙ КОМПЕТЕНЦИИ** 221
28. *И.Т.Тожибоев, Д.М.Рустамова* **ФИЛОСОФСКО-ЭПИСТЕМОЛОГИЧЕСКАЯ ПРИРОДА НАВЫКОВ УСТНОГО СЧЁТА И ИХ КАТЕГОРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

Умаров Ш.А.

доцент ФерГТУ. sh.umarov81@mail.ru

Анотация. В данная статья посвящена решению дифференциальных уравнений численными методами, а метод решения дифференциального уравнения гиперболического типа, определенного в ограниченном интервале [0,1] на основе заданных условий, показан с помощью сеточного метода, который является одним из численные методы. Особое внимание уделено применению метода сеток для аппроксимации частных производных первого и второго порядка. Приведены основные принципы построения равномерных и неравномерных сеток, рассмотрены левые, правые и центральные разностные схемы, а также их порядок аппроксимации. На основе разностных замен составлена вычислительная схема для численного решения задачи Коши. Полученные численные результаты сравниваются с аналитическими значениями, что подтверждает эффективность и точность предложенного метода.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, метод сеток, разностные схемы, аппроксимация, численные методы, частные производные, конечно-разностный метод, вычислительный эксперимент.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения гиперболического типа занимают центральное место в математической физике, поскольку они описывают широкий класс волновых процессов, распространяющихся с конечной скоростью. К таким процессам относятся колебания упругих сред, движение волн в гидродинамике, распространение электромагнитных колебаний и многие другие явления, имеющие фундаментальное значение для науки и техники. Точное аналитическое решение подобных уравнений возможно лишь в ограниченном числе случаев, что делает разработку и применение численных методов одной из наиболее важных задач современной вычислительной математики [1].

Одним из эффективных подходов к решению уравнений гиперболического типа является метод сеток, позволяющий аппроксимировать производные с

заданной точностью и получать приближённые решения в дискретных точках области. Преимущество данного метода заключается в его универсальности, простоте реализации и возможности адаптации к различным типам краевых и начальных условий. В работе подробно рассматривается построение равномерных и неравномерных сеток, формирование разностных схем первого и второго порядка, а также построение вычислительной схемы для решения задачи Коши [2].

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки надёжных и высокоточных численных методов для решения задач, связанных с моделированием динамических процессов в различных областях науки и техники. В условиях стремительного развития вычислительных технологий возрастает потребность в алгоритмах, позволяющих эффективно использовать ресурсы современных вычислительных систем для решения сложных дифференциальных уравнений [3].

Метод сеток остаётся одним из ключевых инструментов численного анализа, обеспечивая возможность моделирования процессов, которые невозможно или крайне сложно описать аналитически. Построение корректных разностных схем и исследование их аппроксимационных свойств имеют важное значение для получения устойчивых и точных численных решений. Кроме того, применение метода сеток делает возможным проведение вычислительных экспериментов, позволяющих анализировать поведение решений и сопоставлять их с теоретическими моделями [4].

ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

В последние десятилетия численные методы решения гиперболических дифференциальных уравнений получили широкое развитие благодаря их применимости в математической физике, гидродинамике, электромагнетизме и инженерных задачах. В работе Альшина и Калиткина исследуются численные решения гиперболических задач в неограниченной области, рассматриваются построение разностных схем и их эффективность для моделирования волновых

процессов [1]. Этот подход стал базой для последующего развития сеточных методов, применяемых в ограниченных областях.

Ш.Ахмаджанов анализирует применение численных методов для решения дифференциальных уравнений и их использование в инженерной практике. Особое внимание уделяется аппроксимации частных производных и построению вычислительных схем, что является ключевым элементом метода сеток [2]. А.Уринов и И.Тажибаев рассматривают краевые задачи для уравнений смешанного типа с особенностями линии изменения типа, что важно для корректной постановки начально-краевых условий при численных расчетах [3]. Д.Дурдиев представляет теоретические основы дифференциальных уравнений с частными производными и методы их аппроксимации, формируя базу для построения разностных схем второго порядка [4]. О.Комурджишвили исследует разностные схемы для многомерных гиперболических уравнений, рассматривая их устойчивость и точность, что позволяет выбрать оптимальные схемы для практических вычислений [5]. С.Каримов демонстрируют применение сеточного метода для решения задачи Коши для гиперболических уравнений третьего порядка, что подтверждает универсальность метода сеток [6]. Работы Ш.Умаров и Д.Акбаров, А.Абдукадиров хотя и посвящены криптографическим преобразованиям, иллюстрируют важность точных вычислений и аппроксимации, что перекликается с требованиями к численным схемам для гиперболических задач [7], [10]. И.Тожибоев рассматривает особенности постановки краевых задач для уравнений смешанного типа, обеспечивая правильную формализацию начальных условий для сеточных расчетов [8]. М.Турдиматов и соавторы предлагают методы аппроксимации с использованием сплайнов, что близко к подходу аппроксимации производных через разностные схемы в методе сеток [9].

Таким образом, анализ литературы показывает, что метод сеток и разностные схемы являются надежным и универсальным инструментом численного решения гиперболических дифференциальных уравнений. Они

позволяют аппроксимировать частные производные с высокой точностью, учитывать различные начальные и краевые условия и проводить вычислительные эксперименты для оценки динамики волновых процессов.

МЕТОДОЛОГИИ

Применение метода сеток для численного нахождения решений дифференициальных уравнений второго порядка в частных производных позволяет использовать в полной мере технические характеристики современных вычислительных машин для достижения требуемой точности [5].

Пусть x удовлетворяет условию $0 \le x \le l$, с помощью точек $x_i=ih$ разобем этот отрезок на N равных частей ($i=0,1,\ldots,N$; $h>0$), длина каждого отрезка равно $h = \frac{l}{N}$. Множество точек $x_i=ih$ ($i=0,1,\ldots,N$) называются разностями и обозначаются как $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,N\}$, h – длина отрезка между точками множество и называется шагом множество $\overline{\omega}_h$.

Интервал $[0,l]$ с помощью точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < l$ можно разделить на N частей. Тогда $\overline{\omega}_h = \{x_i, = 0,1,\ldots,N,\ x_0 = 0,\ x_N = l\}$ сетку с помощью i числа образуем с шагом $h_i=x_i-x_{i-1}$.

Если для некоторого i имеет место $h_i \ne h_{i+1}$, тогда сетка $\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_h^*$ называется неравномерно распределенной. Если для произвольного $i = 1,2,\ldots,N$ выполняется условие $h_i = \frac{l}{N}$ то сетка называется равномерно распределенной.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih\}$ - является сеткой с шагом h. Выразим производное первого порядка от функции $\upsilon(x)$ методом разностей [6].

Самый простой способ следующий

$$L\upsilon \sim \frac{\upsilon_i - \upsilon_{i-1}}{h} = L_{\bar{h}}\upsilon_i$$

здесь знак ~ выражает аппроксимацию $\upsilon_i = \upsilon(x_i)$, само выражение называется левой разностной схемой. Правая разностная схема имеет следующий вид

$$L\upsilon \sim \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{h} = L_{\underset{h}{+}}\upsilon_i$$

а центральная (средняя) разностная схема запишится следующим образом

$$L_{\underset{h}{0}}\upsilon_i = \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_{i-1}}{2h} \ .$$

Рассмотрим производное второго порядка вида $L\upsilon = \upsilon''$. Аппроксимировать его с помощью двух точек не возможно [7]. Используются три точки x_{i-1}, x_i, x_{i+1}.

Напишем разностный оператор:

$$L_n\upsilon_i = \upsilon_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}\left(\upsilon_{x,i} - \upsilon_{\bar{x},i}\right) = \frac{\upsilon_{i+1} - 2\upsilon_i + \upsilon_{i-1}}{h^2} .$$

Если $\upsilon \in C^{(m)}[0,1]$, $m \geq 4$, тогда имеет место

$$\upsilon_{i\pm1} = \upsilon_i \pm h\upsilon_i' + \frac{h^2}{2}\upsilon_i'' \pm \frac{h^2}{6}\upsilon_i''' + \frac{h^4}{24}\upsilon_i^{(IV)} + O\left(h^4\right)$$

$O(h^n)$ – при $h \to 0$ стремится к нулю быстрее чем h^n.

Здесь

$$\upsilon_{\bar{x}x} - \upsilon'' = \frac{h^2}{12}\upsilon^{(IV)} + O\left(h^2\right) \qquad (1)$$

функция $\upsilon_{\bar{x}x}$ аппроксимирует υ'' во втором порядке. Такие приближенные замены позволяют создавать удобные алгоритмы численного нахождения решений дифференициальных уравнений второго порядка в частных производных.

ОБСУЖДЕНИЕ. В области ограниченной прямой AB=$\{ (x, y): 0 \leq x \leq 1, y = 0 \}$ и характеристикаим

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$$

$$BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

рассчитаем численно решение $u(x,y)$ уравнения

$$(-y)\,u_{xx}-u_{yy}=0,\ m=const>0,\ y<0 \tag{2}$$

при m=1 , методом сеток при выполнение начальных условий

$$\begin{aligned} u(x,0)&=x\\ u_y(x,0)&=3x-1 \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим искомую функцию $u=u(x,y)$ на узлах сетки через $u_{ik}=u(x_0+ih,y_0+kl)$ (где $h>0$, $l<0$ - шаг, $i=1,2,...;\ k=1,2,...$) [8]. Частные производные в каждой внутренной точке (x_0+ih,y_0+kl) выразим через разностные схемы следующим образом:

$$\begin{aligned} (\frac{\partial u}{\partial x})_{ik}&\approx\frac{u_{i+1,k}-u_{i-1,k}}{2h}\\ (\frac{\partial u}{\partial y})_{ik}&\approx\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k-1}}{2l} \end{aligned} \tag{4}$$

Также заменим частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{ik}&\approx\frac{u_{i+1,k}-2u_{ik}+u_{i-1,k}}{h^2}\\ (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{ik}&\approx\frac{u_{i,k+1}-2u_{ik}+u_{i,k-1}}{l^2} \end{aligned} \tag{5}$$

подставив эти замены в (2) имеем :

$$(-lk)^m\frac{u_{i+1,k}-2u_{ik}+u_{i-1,k}}{h^2}-\frac{u_{i,k+1}-2u_{ik}+u_{i,k-1}}{l^2}=0$$

или

$$u_{i,k+1}=2u_{i,k}-u_{i,k-1}+\frac{(-lk)^m l^2}{h^2}\left(u_{i+1,k}-2u_{i,k}+u_{i-1,k}\right). \tag{6}$$

учитывая $\varphi''=0$

$$u_{i,0}=\varphi_i,\ \ u_{i,1}=u_{i,0}+l\psi_i \tag{7}$$

подставив последнее в (6) можно рассчитать значения $u_{i,k+1}$. Эти выражения позволяют получить численные решения рассматриваемой задачи [9].

Сравнительный анализ численного расчета с аналитическими значениями, анализ полученных графиков, показывают что численный расчет на компрютере выполнялся на требуемом уровне [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое исследование показало, что метод сеток является эффективным инструментом для численного решения дифференциальных уравнений гиперболического типа. Аппроксимация частных производных первого и второго порядка с использованием разностных схем позволяет получать решения с требуемой точностью при различных начальных условиях. Построенная разностная модель и вычислительная схема обеспечили стабильное и корректное численное решение исследуемой задачи. Сравнительный анализ полученных численных результатов с аналитическими решениями подтвердил адекватность разработанного алгоритма и его способность точно описывать динамику волновых процессов. Проведённые эксперименты демонстрируют, что использование современных вычислительных средств позволяет существенно повысить эффективность моделирования и сократить время расчётов. Полученные результаты могут быть использованы как в учебных целях, так и при разработке инженерных и научных моделей, связанных с решением уравнений гиперболического типа. Исследовать устойчивость и сходимость различных разностных схем, применяемых для уравнений гиперболического типа, с целью выбора оптимальной схемы для конкретных задач математической физики. Расширить исследование на многомерные задачи, что позволит использовать разработанные подходы при моделировании более сложных физических процессов.

Литература

1. Альшин, А. Б., Альшина, Е. А., & Калиткин, Н. Н. (2004). Численное решение гиперболических задач в неограниченной области. *Математическое моделирование*, *16*(4), 114-126.

2. Shokirjon o'g'li, A. S. (2025). Differensial tenglamalar va ularning muhandislikdagi roli. o'zbekistonda fanlararo innovatsiyalar va ilmiy tadqiqotlar jurnali, 4(45), 134-137.

3. Urinov, A. K., & Tojiboev, I. T. (2008, July). Eigenvalue and eigenfunctions of some boundary-value problems for a mixed type equation with non-smooth line of type changing. In Proceedings of the 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (pp. 282-289).

4. Durdiyev, D. Q. (2019). Xususiy hosilali differensial tenglamalar. *Toshkent, VNESHINVESTPROM nashriyoti*.

5. Комурджишвили, О. П. (2007). Разностные схемы для решения многомерных уравнений и систем уравнений гиперболического типа. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, *47*(6), 980-987.

6. Abdumo'minova, S., & Karimov, S. (2025). UCHINCHI TARTIBLI GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI. *Scientific journal of the Fergana State University*, (2), 168-168.

7. Umarov, S. A. (2023). Mathematical characteristics of boolean functions' models in cryptographic transformations. *Publishing House "Baltija Publishing*.

8. Тожибоев, И. Т. (2018). Краевые задачи в специальной области для уравнения смешанного типа. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, (56), 17-28.

9. Turdimatov, M., Mukhtarov, F., Ibrokhimov, N., Umarov, S., Mirzayev, J., & Rakhmatov, R. (2024). Mathematical approximator based on basic spline approximation. In *E3S Web of Conferences* (Vol. 508, p. 04010). EDP Sciences.

10. Akbarov, D., Abdukadirov, A., & Umarov, S. (2022, June). Research of general mathematical characteristics of logical operations and table replacements in cryptographic transformations. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2432, No. 1, p. 060020). AIP Publishing LLC.

GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR SISTEMASI UCHUN GURSA TIPDAGI TO‘G‘RI MASALA

Xo‘jayev L.H., Saipnazarov J.M., Shoimova K.S.

QDTU dotsenti, f-m.f.f.d (PhD). lochin-x@mail.ru.

QDTU dotsenti, f-m.f.f.d (PhD). jonibeksaipnazarov@gmail.com.

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti magistranti

Annotatsiya. Mazkur ishda giperbolik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun Gursa tipidagi to‘g‘ri masala o‘rganiladi. Tadqiqotda masalaning matematik modeli tahlil qilinib, yechimning mavjudligi, yagonaligi va berilgan boshlang‘ich hamda chegaraviy shartlarga bog‘liqligi ko‘rib chiqiladi. Shuningdek, giperbolik tenglamalar sistemasining xossalari va ularning amaliy qo‘llanish imkoniyatlari tahlil qilinadi. Olingan natijalar matematik fizika, to‘lqin jarayonlari va elastik muhitdagi dinamik hodisalarni modellashtirishda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar. giperbolik tenglamalar sistemasi, Gursa masalasi, to‘g‘ri masala, boshlang‘ich shartlar, chegaraviy shartlar, yechimning mavjudligi, yagonalik, matematik fizika.

KIRISH. Giperbolik tipdagi tenglamalar matematik fizika va mexanikada to‘lqin uzatilishi, zarba tarqalishi va dinamik jarayonlarni tavsiflashda keng qo‘llaniladi. Ushbu tenglamalar asosida qo‘yilgan masalalardan biri — Gursa tipidagi to‘g‘ri masala, bunda tenglama sistemasi ma’lum boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan beriladi. Gursa tipidagi masalalar giperbolik tizimlarning fizik jihatdan real va barqaror yechimlarini ta’minlash uchun muhimdir. Bunday masalalarda yechimning mavjudligi, yagonaligi va ma’lumotlarga uzluksiz bog‘liqligi matematik jihatdan tahlil qilinadi. Shu sababli, Gursa tipidagi masalalarni o‘rganish nafaqat nazariy matematikada, balki seysmologiya, elastik muhitdagi zarba tarqalishi, neft va gaz konlarini izlash kabi amaliy sohalarda ham ahamiyatga ega. Maqolada giperbolik tenglamalar sistemalari uchun Gursa tipidagi to‘g‘ri masalalar matematik modeli, yechim shartlari va barqarorlik xususiyatlari tahlil qilinadi, shuningdek, ularning amaliy qo‘llanilish imkoniyatlari ko‘rib chiqiladi.

MASALANI QO‘YILISHI VA YECHISH METODIKASI. $\tilde{D}$ - (x_0,t_0) nuqtadan $x \geq x_0$ o‘tuvchi $x+t=x_0+t_0$ va $x-t=x_0-t_0$ to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan Oxt tekislikdagi soha bo‘lsin. $(x_0,t_0)=(0,0)$ bo‘lgan holni qaraymiz.[1]

Ushbu

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma b(u_t - v_t) = f(x,t) \\ v_{tt} - b(u_t - v_t) = f(x,t) \end{cases}, \quad (1)$$

tenglamalar sistemasining $D = \{x,t : 0 \le x - t \le 2L, 0 \le x + t \le 2L\}$ kvadratda

$$\begin{cases} u\big|_{t=x} = \tilde{\varphi}(x), \quad 0 \le x \le L, \\ u\big|_{t=-x} = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \le x \le L, \\ \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\psi}(0), \\ v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ va $v(x,t)$ yechimlari topilsin.

(1) sistemadagi $u(x,t)$ va $v(x,t)$ mos ravishda ρ_s va ρ_l o‘zgarmas parsial zichlikka ega g‘ovak-elastik jism va suyuqlik zarralarining siljish tezligi vektorining komponentalaridir. Soddalik uchun siljish moduli o‘zgarmas va ko‘ndalang to‘lqin tarqalish tezligini birga teng deb olamiz. b – Darsi koeffitsiyenti, $L > 0$ – berilgan son, $\gamma = \rho_l / \rho_s$. [2]

1-ta’rif. Agar $u,\ v,\ u_t,\ v_t,\ u_{tt},\ v_{tt},\ u_{xx} \in C(D)$ *va* $u(x,t),\ v(x,t)$ *(1) tenglamalar sistemasini va (2) shartlarni qanoatlantirsa,* $u(x,t)$ *va* $v(x,t)$ *funksiyalar (1), (2) masalaning yechimi deyiladi.*

Ushbu funksiya

$$u(x,\ t) = \tilde{f}(x-t) + \tilde{g}(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \quad (3)$$

($\gamma = 0$ bo‘lgan holdagi (1) sistemaning birinchi tenglamasida) quyidagi bir jinsli bo‘lmagan to‘lqin tenglamasining umumiy yechimi bo‘ladi:[3,4]

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \quad (4)$$

(3) formuladagi $\tilde{f}(x)$ va $\tilde{g}(x)$ funksiyalar argumentlari ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi ixtiyoriy funksiyalar.

(3) dan birinchi va (2) dagi ikkinchi munosabatlarga ko‘ra

$$\tilde{\varphi}(x)=\tilde{f}(0)+\tilde{g}(2x)+\frac{1}{2}\int_0^x\int_\tau^{2x-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\tilde{\psi}(x)=\tilde{f}(2x)+\tilde{g}(0)+\frac{1}{2}\int_0^{-x}\int_{2x+\tau}^{-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

ga ega bo‘lamiz. Bundan $y=2x$ deb

$$\tilde{g}(y)=\tilde{\varphi}(y/2)-\tilde{f}(0)-\frac{1}{2}\int_0^{y/2}\int_\tau^{y-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\tilde{f}(y)=\tilde{\psi}(y/2)-\tilde{g}(0)-\frac{1}{2}\int_0^{-y/2}\int_{y+\tau}^{-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\tilde{\varphi}(0)=\tilde{f}(0)+\tilde{g}(0)$$

ni hosil qilamiz.

U holda (3) formula[5]

$$u(x,t)=\tilde{\varphi}((x+t)/2)+\tilde{\psi}((x-t)/2)-\tilde{\varphi}(0)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\int_\tau^{x+y-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2}\int_{x-t+\tau}^{-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

ko‘rinishga keladi. $\tilde{\varphi}(x)$ va $\tilde{\psi}(x)$ funksiyalar $0\le x\le L$ da aniqlangani uchun $u(x,t)$ yechim faqat D kvadratda aniqlanadi.

Tenglama umumiyroq ko‘rinishda bo‘lsa, murakkabroq bo‘ladi. Hatto chiziqli integro-differensial tenglama[6-7]

$$u_{tt}-u_{xx}+\gamma b u_t-\gamma b^2\int_0^t u_\eta(x,\eta)\exp\left[-b(t-\eta)\right]d\eta=\mathrm{g}(x,t)$$

uchun ham (2) tenglamalar bilan yechimning aniq analitik ko‘rinishini olishi mumkin emas va amaliy masalalarning yechimida taqribiy yechimlarni qurishda turli usullardan foydalanish kerak bo‘ladi. Oxirgi tenglama (1) ning birinchi tenglamasidan $v(x,t)$ funksiyaning o‘rniga[8]

$$v(x,t)=\int_0^t(t-\eta)[bu_\eta(x,\eta)+f(x,\eta)]\exp\left[-b(t-\eta)\right]d\eta$$

ifodani qo‘yish orqali olinadi, bunda

$$g(x,t) = f(x,t) + \gamma b \int_0^t f(x,\eta)\exp[-b(t-\eta)]d\eta$$

SONLI NATIJALAR VA TAHLILI.

Quyidagi masalani qaraymiz:

$$u_{tt} - u_{xx} + \gamma b u_t - \gamma b^2 \int_0^t u_\eta(x,\eta)\exp[-b(t-\eta)]d\eta = g(x,t), \quad (5)$$

$$u|_{t=x} = \tilde{\varphi}(x), \quad 0 \le x \le L, \quad (6)$$

$$u|_{t=-x} = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \le x \le L, \quad (7)$$

$$\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\psi}(0). \quad (8)$$

(5) tenglamaning birinchi qo‘shiluvchidan boshqa barcha hadini o‘ng tomonga o‘tkazib,

$$F(x,t) = \gamma b^2 \int_0^t u_\eta(x,\eta)\exp[-b(t-\eta)]d\eta - \gamma b u_t + g(x,t)$$

deb belgilab, hosil bo‘lgan tenglamani (4) tenglamaga o‘xshash deb qarash mumkin, uning yechimini esa

$$u(x,t) = \tilde{\varphi}((x+t)/2) + \tilde{\psi}((x-t)/2) - \tilde{\varphi}(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\int_\tau^{x+y-\tau} F(\xi,\tau)d\xi d\tau - \frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2}\int_{x-t+\tau}^{-\tau} F(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= \varphi(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\int_\tau^{x+y-\tau} F(\xi,\tau)d\xi d\tau - \frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2}\int_{x-t+\tau}^{-\tau} F(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (9)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bunda

$$\varphi(x,t) = \tilde{\varphi}((x+t)/2) + \tilde{\psi}((x-t)/2) - \tilde{\varphi}(0).$$

Agar integro-differensial operator A ni

$$A[u]=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}F(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\int_{\tau}^{x+y-\tau}F(\xi,\tau)d\xi d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2}\int_{x-t+\tau}^{-\tau}F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

formula orqali kiritsak, (2.1.9) tenglamani

$$u=A[u]+\varphi \tag{10}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

(10) tenglama Volterra integro-differensial tenglamasi deyiladi. (10) tenglama yechimining taqribiy qurish usullaridan biri bu ketma-ket yaqinlashish usuli bo‘lib, har bir keyingi yaqinlashish

$$u_n=A[u_{n-1}]+\varphi,\qquad n=1,2,\dots \tag{11}$$

formula bilan oldingisiga ko‘ra aniqlanadi. Bunda u_0 - berilgan.

$u_0(x,\ t)=0$ funksiyani nolinchi yaqinlashish sifatida tanlaylik. U holda (11) yaqinlashish sxemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$u_1(x,\ t)=\varphi(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}g(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\int_{\tau}^{x+t-\tau}g(\xi,\tau)d\xi d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2}\int_{x-t+\tau}^{-\tau}g(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$u_n(x,\ t)=u_1(x,\ t)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^{\tau}u_{(n-1)\eta}(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b u_{(n-1)\tau}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\int_{\tau}^{x+t-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^{\tau}u_{(n-1)\eta}(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b u_{(n-1)\tau}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2}\int_{x-t+\tau}^{-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^{\tau}u_{(n-1)\eta}(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b u_{(n-1)\tau}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau. \tag{12}$$

(12) formulada

$$u_{(n-1)\eta}(\xi,\eta)=\frac{\partial u_{n-1}(\xi,\eta)}{\partial\eta}.$$

(12) formuladan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$u_{nt}(x,\ t)=u_{1t}(x,\ t)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\gamma b^2\int_0^\tau u_{(n-1)\eta}(x+t-\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b u_{(n-1)\tau}(x+t-\tau,\tau)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\gamma b^2\int_0^\tau u_{(n-1)\eta}(x-t+\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b u_{(n-1)\tau}(x-t+\tau,\tau)\right)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\left(\gamma b^2\int_0^\tau u_{(n-1)\eta}(x+t-\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b u_{(n-1)\tau}(\xi,\tau)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{(t-x)/2}\left(\gamma b^2\int_0^\tau u_{(n-1)\eta}(x-t+\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b u_{(n-1)\tau}(x-t+\tau,\tau)\right)d\tau \quad (13)$$

$\{u_n(x,\ t)\},\{u_{nt}(x,\ t)\}$ ketma-ketliklar tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Ikki ketma-ketliklarning ayirmasining iteratsiyasini $w_n=u_{n+1}-u_n$ deb olamiz. (12), (13) formulalardan

$$w_n(x,\ t)==-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^\tau w_{(n-1)\eta}(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b w_{(n-1)\tau}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\int_\tau^{x+t-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^\tau w_{(n-1)\eta}(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b w_{(n-1)\tau}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2}\int_{x-t+\tau}^{-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^\tau w_{(n-1)\eta}(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b w_{(n-1)\tau}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau, \quad (14)$$

$$w_{nt}(x,\ t)=$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\gamma b^2\int_0^\tau w_{(n-1)\eta}(x+t-\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b w_{(n-1)\tau}(x+t-\tau,\tau)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\gamma b^2\int_0^\tau w_{(n-1)\eta}(x-t+\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta-\gamma b w_{(n-1)\tau}(x-t+\tau,\tau)\right)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\left(\gamma b^2\int_0^{\tau} w_{(n-1)\eta}(x+t-\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta - \gamma b w_{(n-1)\tau}(\xi,\tau)\right)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{(t-x)/2}\left(\gamma b^2\int_0^{\tau} w_{(n-1)\eta}(x-t+\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta - \gamma b w_{(n-1)\tau}(x-t+\tau,\tau)\right)d\tau. \quad (15)$$

munosabatlarni topamiz.

Faraz qilaylik, D kvadratda

$$|w_0|\le M, \qquad |w_{0t}|\le M, \qquad (16)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. $M>0$ - biror o‘zgarmas son. Ma’lumki, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ va $g(x,\ t)$ berilganlar uchun muvofiq shartlarda (16) shart bajariladi.

(14) va (15) formulalardan mojarant bo‘lgan

$$|w_1|\le CM\frac{(x+t)^2}{2!}, \qquad |w_{1t}|\le CM(x+t),$$

baholar kelib chiqadi, $C>0, b$ va γ ga bog‘liq o‘zgarmas.

Induksiya bo‘yicha barcha $n\ge 2$ uchun quyidagi:

$$|w_n|\le CM\frac{(x+t)^{n+1}}{(n+1)!},\ |w_{n_t}|\le CM\frac{(x+t)^n}{n!}$$

baholashni oson isbotlash mumkin. Oxirgi tengsizliklarda nuqtalar D kvadratning ichida yotganligidan

$$|w_n|\le CM\frac{(2L)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad |w_{nt}|\le CM\frac{(2L)^n}{n!} \qquad (17)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

(17) tengsizliklarning o‘ng tomonida $\exp(2L)$ eksponentasi yoyilmasining proporsionallik ko‘paytuvchilari aniqligida umumiy hadi turibdi.

Demak,

$$u_n = u_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial w_{n-1}}{\partial t}$$

funksiyalar ketma-ketligi limit funksiyaga tekis yaqinlashadi va uni $u(x,\ t),\ U(x,\ t)$ orqali belgilaymiz:

$$u(x,\ t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t),\quad U(x,\ t)=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}.$$

(12) va (13) formulalarda $n\to\infty$ da limitga o‘tamiz. Natijada

$$u(x,\ t)=u_1(x,\ t)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^\tau U(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta\ -\gamma bU(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\int_\tau^{x+t-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^\tau U(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta\ -\gamma bU(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2}\int_{x-t+\tau}^{-\tau}\left(\gamma b^2\int_0^\tau U(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta\ -\gamma bU(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,$$

$$U(x,\ t)=u_{1t}(x,\ t)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\gamma b^2\int_0^\tau U(x+t-\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta\ -\gamma bU(x+t-\tau,\tau)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\gamma b^2\int_0^\tau U(x-t+\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta\ -\gamma bU(x-t+\tau,\tau)\right)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2}\left(\gamma b^2\int_0^\tau U(x+t-\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta\ -\gamma bU(\xi,\tau)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{(t-x)/2}\left(\gamma b^2\int_0^\tau U(x-t+\tau,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta\ -\gamma bU(x-t+\tau,\tau)\right)d\tau \quad (18)$$

ga ega bo‘lamiz. Bundan esa $U=u_t$ va $u(x,\ t)$ funksiyalar (2.1.10) integro-differensial tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi. (2.1.10) tenglamani t bo‘yicha differensiallasak $u(x,\ t)$ funksiya (5) integro-differensial tenglamani ham qanoatlantirishi kelib chiqadi. (6), (7) shartlarning bajarilishi (9), (12) formuladan va $\varphi(x,t)$ funksiya ko‘rinishidan kelib chiqadi.

Endi (5)-(7) masala yechimining yagonaligini isbotlaymiz. (5) - (7) masala ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ turli yechimlarga ega bo‘lsin. Ularning ayirmasi $W = u_1 - u_2$ ni qaraylik. Bu funksiya

$$W(x,\ t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \left(\gamma b^2 \int_0^\tau W_\eta(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta - \gamma b W_\tau(\xi,\tau) \right) d\xi d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2} \int_\tau^{x+t-\tau} \left(\gamma b^2 \int_0^\tau W_\eta(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta - \gamma b W_\tau(\xi,\tau) \right) d\xi d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{-(x-t)/2} \int_{x-t+\tau}^{-\tau} \left(\gamma b^2 \int_0^\tau W_\eta(\xi,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta - \gamma b W_\tau(\xi,\tau) \right) d\xi d\tau$$

bo‘lgan bir jinsli Volterra integro-differensial tenglamani qanoatlantiradi. (16) baholashlarga asosan

$$|W| \le M_1, \qquad |W_t| \le M_1, \tag{19}$$

baholashning to‘g‘riligini ko‘rsatish oson, bunda $M_1 > 0$ biror o‘zgarmas. U holda $w_n(x,\ t)$ uchun olingan baholashga o‘xshash ixtiyoriy funksiya uchun

$$|W_n| \le C M_1 \frac{(2L)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{20}$$

baholashni olish mumkin. (20) formuladan $W(x,\ t) \equiv 0$ ekanligidan $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ ekani kelib chiqadi. (5) - (7) masala yechimning yagonaligi isbotlandi. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. $f(x,t)$ funksiya D da uzluksiz va $\tilde{\varphi}(x)$ va $\tilde{\psi}(x)$ funksiyalar $[0,L]$ da ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda (1), (2) masalaning yagona yechimi mavjud.

XULOSA

Giperbolik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun Gursa tipidagi to‘g‘ri masala o‘rganildi. Maqolada masalaning matematik modeli tahlil qilinib, yechimning mavjudligi, yagonaligi va berilgan boshlang‘ich hamda chegaraviy shartlarga

bog‘liqligi ko‘rib chiqildi. Shuningdek, giperbolik tenglamalar sistemasining xossalari va ularning amaliy qo‘llanish imkoniyatlari tahlil qilindi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

2. Денисов. Введение в теорию обратных задач. Москва. Наука.1999 г.

3. Романов. Обратные задачи математической физики. 1984 г. Москва. Наука. 321 с.

4. Янгибоев З.Ш. Одномерные обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористых средах с неизвестным источником. Дис-я. 2019 г. 113 с.

5. Imomnazarov Kh.Kh., Khujaev L.Kh., Yangiboev Z.Sh. The inverse problem for a system of poroelasticity equations: the case with an unknown Darcy time-dependent coefficient. // European Journal of Research 5(7), 2020, pp. 3-17. (3. Journal SJIF:6.22).

6. Янгибоев З.Ш. Об устойчивости одной обратной динамической задачи для уравнения SH волн в пористом полупространстве. //УзМУ хабарлари» 2012 г. №4. сс. 11-16.

7. Белишев М. И., Благовещинский А.С. Динамические обратные задачи теории волн. СПб. Изд-во СПб.ун-та. 1999. 234 с.

8. Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Рахмонов Т. Т., Янгибоев З. Ш. Регуляризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде // Владикавказский математический журнал, 2013, т.15. №2. с. 46-58.

QATLAMLI G‘OVAK-ELASTIK MUHIT UCHUN A_μ^1 VA A_μ^2 TESKARI DINAMIK MASALASI YECHISH ALGORITMI

Xo‘jayev L.H., Saipnazarov J.M., Marqayeva D.A.

QDTU dotsenti, f-m.f.f.d (PhD). lochin-x@mail.ru.

QDTU dotsenti, f-m.f.f.d (PhD). jonibeksaipnazarov@gmail.com.

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti magistranti

dilafruzmarqayeva2@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur ishda qatlamli g‘ovak-elastik muhit uchun teskari dinamik masala o‘rganiladi. Tadqiqotda muhitning fizik xossalarini tavsiflovchi matematik model tahlil qilinib, noma’lum parametrlarni kuzatuv ma’lumotlari asosida aniqlash masalasi ko‘rib chiqiladi. Masalaning yechimi mavjudligi, yagonaligi va berilgan ma’lumotlarga bog‘liqligi tahlil qilinadi hamda turg‘unlik shartlari aniqlanadi. Olingan natijalar seysmologiya, geofizika hamda neft va gaz konlarini qidirish jarayonlarida qo‘llanishi mumkin.

Kalit so‘zlar. qatlamli muhit, g‘ovak-elastik muhit, teskari dinamik masala, giperbolik tenglamalar, matematik model, turg‘unlik, yagonalik, seysmologiya, geofizika.

KIRISH. Bir jinsli yarim fazoda izotrop qatlamli g‘ovak-elastik muhitda to‘lqin tarqalishini ifodalaydigan masalani o‘rganamiz. Tekis parallel qatlamni qaraymiz. Qatlamli muhit uchun dissipativ yaqinlashishdagi g‘ovak elastik muhitning bir o‘lchovli teskari dinamik masalalarini qaraymiz.

MASALANI QO‘YILISHI VA YECHISH METODIKASI.

x o‘zgaruvchi bo‘yicha bir jinsli bo‘lmagan yarim fazoda tebranishlarning tarqalish jarayonini ifodalovchi quyidagi

$$\rho_s(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho_l(x)b(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\right),\ x\ge 0, t\ge 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=b(x)(u-v),\ x\ge 0,\quad t\ge 0 \qquad (2)$$

tenglamalar sistemasi quyidagi nol boshlang‘ich shartlarni[1]

$$u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0,\quad v\big|_{t=0}=0,\quad x\ge 0 \qquad (3)$$

va chegaraviy shartlarni

$$u_x\big|_{x=0}=H(t), \qquad (4)$$

qanoatlantiruvchi masalani qaraymiz.

(1)-(4) masalaning klassik yechimi muhim, ya'ni $u \in C^2(x \geq 0, t \geq 0)$, $v \in C^1(x \geq 0, t \geq 0)$. Yana u, u_t va v, v_t funksiyalar $L_2(t \geq 0)$ ga tegishli deb faraz qilamiz. u va v funksiyalarni $t < 0$ uchun nol bilan davom ettiramiz. $H(t) \in C^2(t \geq 0) \cap L_2(t \geq 0)$ berilgan funksiyada $H(0) = 0$ $H'(0) = 0$ muvofiqlashtirish shartlari bajarilsin deb faraz qilamiz.

(1) va (2) formulalarda $\mu(x)$ funksiya bo'lakli-o'zgarmas va $a_1 < a_2 < ... < a_k$, nuqtalarda uzilishga ega bo'lib, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$, $b(x)$ funksiyalarni $a_0 = 0$ da quyidagi tengliklar orqali yozishimiz mumkin:[2]

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_m \text{ uchun } x \in (a_{m-1}, a_m), m = 1, ..., k \\ \mu_{k+1} \text{uchun } x > a_k \end{cases} \quad (5)$$

$$\rho_l(x) = \begin{cases} \rho_{lm} \text{ uchun } x \in (a_{m-1}, a_m), m = 1, ..., k \\ \rho_{lk+1} \text{ uchun } x > a_k \end{cases} \quad (6)$$

$$\rho_s(x) = \begin{cases} \rho_{sm} \text{ uchun } x \in (a_{m-1}, a_m), m = 1, ..., k \\ \rho_{sk+1} \text{ uchun } x > a_k \end{cases} \quad (7)$$

$$b(x) = \begin{cases} b_m \text{ uchun } x \in (a_{m-1}, a_m), m = 1, ..., k \\ b_{k+1} \text{uchun } x > a_k \end{cases} \quad (8)$$

$b_m, \mu_m, \rho_{lm}, \rho_{sm} = const.$

$\mu(x)$ koeffitsiyentning a_m uzilish nuqtalarida (3), (4) shartlarga qo'shimcha qatlamdan-qatlamga o'tish shartlarini kiritamiz.

$$[u]_{x=a_m} = \left[\mu(x) u_x\right]_{x=a_m} = 0, \ m = 1, ..., k \quad (9)$$

(5) - (8) ko'rinishdagi $b(x)$, $\mu(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ funksiyalar uchun (1) - (4), (9) tengliklarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ va $v(x,t)$ funksiyalarni aniqlash masalasi *to'g'ri masala* deyiladi.

SONLI NATIJALAR VA TAHLILI.

Quyidagi teskari masalalar o'rganiladi:

A_{μ}^{1} teskari masalasi.

(1) tenglamadan, ya'ni $2k+1$ ta $\{\mu_1,...,\mu_{k+1}; a_1,...,a_k\}$ sonli to'plamdan, (1) - (4), (9) masalaning yechimi bo'yicha quyidagi[3]

$$\Phi(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} u_t(0,t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt, \qquad \omega \in \Omega, \tag{10}$$

ma'lum bo'lsa, $\mu(x)$ koeffitsiyentni topish masalasini qaraymiz. Bu yerda $\Omega-$ nol bilan ajratilgan chekli interval va $b(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ berilgan funksiyalar. Soddalik uchun $b(x)$, $\rho_l(x)$, $\rho_s(x)$ funksiyalarni berilgan o'zgarmas deb faraz qilamiz.

$$\tau = \frac{a_1 - a_0}{c_1} = \frac{a_2 - a_1}{c_2} = ... = \frac{a_k - a_{k-1}}{c_k} \tag{11}$$

deb faraz qilamiz va τ qiymati berilgan, $c_k = \sqrt{\mu_k / \rho_{sk}}$. Yuqorida qayd etilganidek, ba'zi hollarda (11) faraz Gupilla gipotezasiga ekvivalent bo'ladi. $|\Omega| > \pi/\tau$ bo'lsin. Bunda $|\Omega|$- nol bilan ajratilgan chekli interval o'lchovi.

Shunga e'tibor berishimiz kerakki, tayinlangan k da (2.2.11) tenglik A_{μ}^{1} teskari masalani yechishda $k+1$ o'zgarmasni tiklash imkonini beradi. Faraz qilaylik $\{c_1,...,c_{k+1}\}$ bo'lsin.

Ma'lumki (1), (4), (9) to'g'ri masala qatlamli muhit bo'lgan holda parametrli Helmgolts tenglamasi uchun quyidagi masala bilan bog'liq:[4]

$$U_{xx} + \omega^2 \tilde{B}^2(x,\omega)U = 0, \tag{12}$$

$$U_x(0,\omega) = h(\omega), \quad U_x - i\tilde{B}\omega U \to 0 \quad x \to \infty \; da, \tag{13}$$

$$[U]_{x=a_m} = [\mu U_x]_{x=a_m} = 0, \;\; m = 1,...,k. \tag{14}$$

Bu yerda $U(x,\omega)$, $h(\omega)$ mos ravishda u va H funksiyalarning Furye tasvirlaridir.

$$U(x,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega t}dt, \quad h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-i\omega t}dt,$$

$$\tilde{B}(x,\omega) = \frac{\sqrt{(1+\rho_l(x)/\rho_s(x))b(x) - i\omega}}{c(x)\sqrt{b(x) - i\omega}}.$$

$\mu(x)$ koeffitsiyentni aniqlash A_μ^1 teskari masala uchun (10) quyidagi tenglikka mos keladi.

$$\Phi(\omega) = i\omega U(0,\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{15}$$

Bunday holatda A_μ^1 teskari masalani yechish quyidagi masalani yechish bilan bog‘liq bo‘ladi.

A_μ^2 teskari masalasi.

Agar (12) - (14) masalani yechishda (15) ma’lum bo‘lsa, (12) tenglamaning (5) - (8) ko‘rinishdagi $\mu(x)$ koeffitsiyentini aniqlang.

1-ta’rif. (11) gipoteza doirasidagi (10) qo‘shimcha ma’lumotlarga ko‘ra (5) ko‘rinishdagi $\mu(x)$ funksiyani aniqlashga oid A_μ^2 teskari masala k-qatlamli deb ataladi.

$\mu(x)$ funksiyaning (a_{m-1}, a_m) o‘zgarmas sohalarida (12) tenglamaning umumiy yechimi uchun aniq formulalardan foydalanamiz:[5]

$$U(x,\omega) = A_1^m(\omega)e^{i\tilde{B}_m\omega x} + A_2^m(\omega)e^{-i\tilde{B}_m\omega x}. \tag{16}$$

$x \to \infty$ da (13) chegaraviy shart cheksizlikdan keladigan to‘lqinlarning yo‘qligini anglatadi, ya’ni $A_2^{k+1} = 0$. $x > a_k$ yarim fazo uchun

$$U(x,\omega) = Ae^{i\tilde{B}_{k+1}\omega x}, \tag{17}$$

tenglik bajariladi, bu yerda $A(\omega)$ parametr keyinchalik aniqlanadi.

(16) ga asosan (14) tengliklarni quyidagicha yozish mumkin:

$$A_1^m e^{i\tilde{B}_m\omega a_m} + A_2^m e^{-i\tilde{B}_m\omega a_m} = A_1^{m+1} e^{i\tilde{B}_{m+1}\omega a_m} + A_2^{m+1} e^{-i\tilde{B}_{m+1}\omega a_m},$$

$$\mu_m\left(A_1^m e^{i\tilde{B}_m\omega a_m} - A_2^m e^{-i\tilde{B}_m\omega a_m}\right) = \mu_{m+1}\left(A_1^{m+1} e^{i\tilde{B}_{m+1}\omega a_m} - A_2^{m+1} e^{-i\tilde{B}_{m+1}\omega a_m}\right)$$

Bunda quyidagi belgilashlardan foydalanamiz[6]

$$B_j^m = A_j^m e^{(-1)^{j-1} i\omega\tilde{B}_m a_m}. \tag{18}$$

(11) ga binoan

$$B_1^m + B_2^m = B_1^{m+1} e^{-i\omega\tilde{b}\tau} + B_2^{m+1} e^{i\omega\tilde{b}\tau},$$

$$B_1^m - B_2^m = \frac{\mu_{m+1}}{\mu_m}(B_1^{m+1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau} - B_2^{m+1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}) \tag{19}$$

tengliklar o‘rinli. Bu yerda

$$\tilde{b} = \sqrt{\frac{(1+\rho_l/\rho_s)b - i\omega}{b - i\omega}}$$

(19) sistemaga

$$\lambda_m^{\pm} = 1 \pm \frac{\mu_{m+1}}{\mu_m} \tag{20}$$

belgilash kiritilishi

$$B_1^m = \frac{1}{2}(\lambda_m^+ B_1^{m+1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau} + \lambda_m^- B_2^{m+1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}),$$

$$B_2^m = \frac{1}{2}(\lambda_m^- B_1^{m+1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau} + \lambda_m^+ B_2^{m+1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}), \quad m = 1,...,k-1 \tag{21}$$

tengliklarga ekvivalentligini anglatadi. B_j^k miqdorlarni hisoblash uchun (13) tenglikning $x = a_k$ nuqtadagi qiymatidan, (17) tenglik va (11), (16), (20) formulalardan foydalanamiz. $\alpha = e^{i\omega\tilde{B}_{k+1}a_k}$ deb faraz qilib[7]

$$B_1^k = \frac{1}{2}A\alpha\lambda_k^+, \qquad B_2^k = \frac{1}{2}A\alpha\lambda_k^- \tag{22}$$

ni topamiz. $A(\omega)$ funksiya (13) chegaraviy shartning $x = 0$ dagi qiymatidan topiladi. (11), (16), (18) ga asosan

$$i\omega\tilde{B}_1(\mathrm{A}_1^1 - A_2^1) = i\omega\tilde{B}_1\left(B_1^1 e^{-i\omega\tilde{b}\tau} - B_2^1 e^{i\omega\tilde{b}\tau}\right) = h(\omega) \tag{23}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

(21), (22) formulalarni qo‘llab, quyidagi xulosaga kelishimiz mumkin:

$$B_j^1 = \frac{A\alpha}{2^k}\mathrm{P}_j^{k-1}\left(e^{i\omega\tau}, e^{-i\omega\tau}\right). \tag{24}$$

Bu yerda $P_j^{k-1}(\xi,\eta) -$ ξ, η o‘zgaruvchilarning darajalari bo‘yicha bir jinsli ko‘phadlardir. Bu ko‘phadlarning koeffitsiyentlari, o‘z navbatida, $\lambda_1^{\pm}\lambda_2^{\pm}...\lambda_k^{\pm}$ ko‘rinishdagi hadlardan tashkil topgan k -darajali bir jinsli ko‘phadlardir.

(23), (24) ga binoan tenglikning analogi uchun

$$\frac{A\alpha}{2^k}=\frac{h(\omega)}{i\omega\tilde{B}_1}\left(P_1^{k-1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau}-P_2^{k-1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}\right)^{-1},$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Biroq u holda (16) qo‘shimcha ma’lumot uchun $\Phi(\omega)=i\omega U(0,\omega)=i\omega(A_1^1+A_1^1)$ funksiyaning quyidagi ko‘rinishiga ega bo‘lamiz:

$$\Phi(\omega)=\frac{h(\omega)}{\tilde{B}_1}\frac{P_1^{k-1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau}+P_2^{k-1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}}{P_1^{k-1}e^{-i\omega\tilde{b}\tau}-P_2^{k-1}e^{i\omega\tilde{b}\tau}}. \qquad (25)$$

Funksiya $h(\omega)$ ga chegaralanganlik qo‘yamiz ((1)-(4) dinamik masaladagi $H(t)$ funksiya uchun). Biror $\omega_0>0$ uchun $h(\omega)$ funksiya $[\omega_0,\omega_0+\pi/\tau]\subset\Omega.$ kesmada nolga aylanmasin. Xususan, agar $H(t)=e^{-t^2/2}$ va $\Omega=R,$ bo‘lsa, u holda $h(\omega)=e^{-\omega^2/2}>0$ bo‘ladi va yuqorida keltirilgan shart biror ω_0,τ da bajariladi.

Quyidagi $\Phi(\omega)/h(\omega)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini ko‘rib chiqamiz:

$$\varphi_m=\int_{\omega_0}^{\omega_0+\pi/\tau}\Phi(\omega)h^{-1}(\omega)e^{-2i\omega m\tau}d\omega \qquad (26)$$

A_μ^2 teskari masalaning μ_m parametrlari bilan φ_m sonlar o‘rtasidagi bog‘lanishni o‘rnatamiz.

(26) integrallarni hisoblash uchun $z=e^{2i\omega\tau}$ $(dz=2i\tau z d\omega)$ o‘zgaruvchilarni almashtirishdan foydalanamiz, bu ω kompleks tekislikdagi $[\omega_0,\omega_0+\pi/\tau]$ yarim intervalni z kompleks tekislikdagi $|z|=1$ birlik aylanada o‘zaro bir qiymatli akslantiradi (integrallash $\arg z$ ni o‘sish yo‘nalishi bo‘yicha olinadi).

(25) tenglikning o‘ng tomoni surat va maxrajini $e^{ki\omega\tau}=z^{k/2}$ funksiyaga ko‘paytirsak, $\tilde{B}_1\Phi(\omega)/h(\omega)$ funksiyada z o‘zgaruvchini $F_k(z)$ funksiya orqali ifodalasak, u k -darajali ikkita ko‘phadning nisbati ko‘rinishda hosil bo‘ladi:

$$\mathrm{F}_k(\mathrm{z})=\frac{f_0^{(k)}+f_1^{(k)}z+\ldots+f_k^{(k)}z^k}{g_0^{(k)}+g_1^{(k)}z+\ldots+g_k^{(k)}z^k}. \qquad (27)$$

Bu yerda $F_k(z)$ funksiyaning quyi indeksi va $f_j^{(k)}, g_j^{(k)}$ koeffitsiyentlarning yuqori indeksi masalaning “qatlamli” ekanligini bildiradi.

(26) tenglik bu belgilanishlardan keyin quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\varphi_m = \frac{1}{2i\tau\tilde{B}_1}\int_{|z|=1} F_k(z)\frac{dz}{z^{m+1}}, \qquad m=0,...,\mathrm{k} \tag{28}$$

$F_k(z)$ funksiyaning maxrajidagi ko‘phadning barcha ildizlari z tekislikning birlik doirasidan tashqarida bo‘lgan holda (28) ko‘rinishdagi integrallari kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi usullari yordamida nisbatan oson hisoblanadi. Keyingi barcha hisoblashlar yuqoridagi faraz ostida, ya’ni $g_0^{(k)} + g_1^{(k)}z + ... + g_k^{(k)}z^k$ ko‘phad $|z| \le 1$ doirada ildizlarga ega emas deb amalga oshiriladi. Rushe teoremasi bu farazning to‘g‘riligi uchun yetarli shart hisoblangandan quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\left|g_0^{(k)}\right| > \sum_{j=1}^{k}\left|g_j^{(k)}\right|. \tag{29}$$

Demak, (28) tenglikdagi integral ostidagi funksiya $z=0$ nuqtada $m+1$ tartibli qutbga mos maxsus nuqta kabi $|z|<1$ integrallash sohasini chegaralab turgan konturning ichida yagona maxsus nuqtaga ega. Bu esa quyidagi tenglikka asosan chegirma haqidagi teoremadan foydalanishga imkon beradi:

$$\varphi_m = \frac{\pi}{\tau\tilde{B}_1}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{F_k(z)}{z^{m+1}}.$$

Yuqorida aytib o‘tilganidek, $z=0$ nuqta ko‘rib chiqilayotgan funksiya uchun $m+1$ tartibli qutb bo‘lganligi sababli (2.2.28) Furye koeffitsiyentlarini quyidagi formulalar yordamida hisoblash mumkin:

$$\varphi_m = \frac{1}{m!}\frac{\pi}{\tau\tilde{B}_1}F_k^{(m)}(0). \tag{30}$$

Ushbu tadqiqot ishining asosiy natijasini ko‘rsatishdan oldin ba’zi belgilashlarni kiritamiz (qarang: (20)):

$$\gamma_m = \frac{\lambda_m^-}{\lambda_m^+} = -\frac{\mu_{m+1}-\mu_m}{\mu_{m+1}+\mu_m}, \qquad m=1,...,k; \tag{31}$$

$$h_p^m = h_{m-1}^m h_{m-p-1}^{m-1} + h_p^{m-1}, \quad p=0,...,m-2, m=2,...,k$$

$$h_{m-1}^m = -\gamma_m, \quad m=2,...,k$$

$$h_0^1 = h_m^m = 0, \quad m = 1,...,k. \tag{32}$$

Teorema. (11) tengliklar bajarilgan bo'lsin. (27) $g_0^{(k)} + g_1^{(k)} z + ... + g_k^{(k)} z^k$ ko'phad $|z| \le 1$ doirada ildizlarga ega bo'lmasin va $H(t)$ funksiyaning $h(\omega)$ Furye tasviri $\omega \in [\omega_0, \omega_0 + \pi/\tau] \subset \Omega$ uchun nolga aylanmasin. U holda (12) - (14) masalaning yechimi bo'yicha $F_k(z)$ funksiya uchun quyidagi formulalar o'rinli:

$$F_k^{(m)}(0) = m! \left[2\gamma_m \prod_{p=1}^{m-1} (1-\gamma_p^2) - \sum_{p=1}^{m-1} \frac{h_p^m}{(m-p)!} F_k^{(m-p)}(0) \right] \tag{33}$$

Bundan tashqari γ_m, h_p^m koeffitsiyentlar (31), (32), $m = 2,...,k.$ formulalar bo'yicha hisoblanadi.

Teoremani bir nechta lemmalarga bo'lgan holda yordamchi konstruksiyalar bilan isbotlaymiz.

Yuqorida ta'kidlanganidek, $F_k(z)$ funksiyaning $f_j^{(k)}$, $g_j^{(k)}$ koeffitsiyentlari $\lambda_1^{\pm}\lambda_2^{\pm}...\lambda_k^{\pm}$ ko'rinishdagi qo'shiluvchilarga ega bo'lgan bir jinsli ko'phadlardan iborat. Shuning uchun $F_k(z)$ funksiyaning surat va maxrajini nolga teng bo'lmagan $\lambda_1^{+}\lambda_2^{+}...\lambda_k^{+}$ qiymatlarga bo'lgandan so'ng ko'phadlarning yangi koeffitsiyentlarini olamiz. Ular uchun oldingi $f_j^{(k)}$, $g_j^{(k)}$ belgilarini saqlab qolamiz, ular $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ parametrlariga bog'liq bo'lib, $F_k(z)$ funksiyaning surat va maxrajida har bir γ_m chiziqli ravishda qatnashadi.

Quyidagi ifodani qaraylik:

$$\mathrm{F}_k(\mathrm{z}) = \frac{Q_k(z) + \gamma_k R_k(z)}{S_k(z) + \gamma_k D_k(z)}. \tag{34}$$

Bu yerda Q_k, R_k, S_k, D_k ko'phadlarning koeffitsiyentlari (z ning darajasini ko'rsatadigan pastki belgisi bilan mos keladigan kichik harflar bilan belgilaymiz) γ_k ga bog'liq emas.

(20) - (22), (25), (27) formulalar yordamida ba'zi hisob-kitoblarni amalga oshirib, quyidagilarni isbotlash murakkab emas:

$$F_1(z)=\frac{1+\gamma_1 z}{1-\gamma_1 z},$$

$$F_2(z)=\frac{1+\gamma_1 z+\gamma_1\gamma_2 z+\gamma_2 z^2}{1-\gamma_1 z+\gamma_1\gamma_2 z-\gamma_2 z^2}.$$

A_μ^1 teskari masala (A_μ^2 teskari masala) ni yechish algoritmi

A_μ^2 teskari masalaning yechish algoritmini qurish uchun (33) formulalardan foydalanamiz va shu yo‘l bilan A_μ^1 teskari masalaning ham yechish algoritmini qurishimiz mumkin.

1-Natija. $F_k^{(m)}(0)$ $(m\le k)$ *hosila faqat (31) dagi* $\gamma_1,...,\gamma_m$ *sonlarga bog‘liq.*

Natijaga ko‘ra, teskari masalani yechish algoritmining rekurrent formulasini tuzamiz.

2-Natija. Barcha natural k *sonlar uchun*

$$F_k(0)=1,\quad F_k'(0)=2\gamma_1 \tag{35}$$

tenglik o‘rinli.

Bu natijalarning isboti to‘g‘ridan to‘g‘ri (35) formulalarni hisoblashdan kelib chiqadi.

Teskari masala algoritmini tavsiflashdan oldin uning qo‘llanilish shartlarini esga olamiz.

1. Lame tenglamalar sistemasida to‘lqinning qatlamlardan bir xil vaqtda o‘tishi uchun Gupilla gipotezasining to‘g‘riligini bildiruvchi (11) tenglik bajarilishi shart.

2. (27) dagi $g_0^{(k)}+g_1^{(k)}z+...g_k^{(k)}z^k$ ko‘phad $|z|\le 1$ doirada ildizlarga ega bo‘lmasligi kerak. Qaralayotgan masalada μ_m koeffitsiyentlari bo‘yicha ushbu shartlarning bajarishi uchun yetarli shart bu qatlamlardagi tezliklarning “kuchsiz” farq qilishi hisoblanadi.

3. Berilgan (4) dagi $H(t)$ funksiyaning $h(\omega)$ Furye obrazi Ω da joylashgan $\pi/\tau:\ \omega\in[\omega_0,\omega_0+\pi/\tau]$ uzunlikdagi segmentda nolga aylanmasligi kerak.

Misol: $H(t)=e^{-t^2/2}$ va $\Omega=R$ bo‘lsa, u holda $h(\omega)=e^{-\omega^2/2}>0$ $\Omega=(0.5,k\cdot\pi)$, k - natural son, $|\Omega|>\pi/\tau$ - k tanlash hisobida.

XULOSA

Yuqoridagi barcha keltirilgan farazlarga ko‘ra teskari masalaning $(\mu_1,...,\mu_{k+1})$ yechimini quyidagi algoritm yordamida topish mumkin:

1. (26) dagi $\varphi_0,...,\varphi_k$ $k+1$ ta integrallarni hisoblang.

2. (30), (2.3.1) lardan ketma-ket $\gamma_1,...,\gamma_k$ sonlarni aniqlang.

$$\gamma_1=\varphi_1/2\varphi_0, \tag{36}$$

(30), (33) ga muvofiq

$$\gamma_m=\frac{1}{2\varphi_0}\frac{\varphi_m+\sum_{p=1}^{1}h_p^m\varphi_{m-p}}{\prod_{p=1}^{m-1}\left(1-\gamma_p^2\right)}. \tag{37}$$

Bu yerda h_p^m koeffitsiyentlari (32) rekurrent formulalar bilan hisoblanadi.

3. Teskari masala yechimini toping: (30), (33) larga ko‘ra

$$\mu_1=\pi/\tau\varphi_0, \tag{38}$$

(31) ga muvofiq

$$\mu_{m+1}=\frac{1-\gamma_m}{1+\gamma_m}\mu_m \tag{39}$$

bo‘ladi.

Demak, yuqoridagi faraz qilingan (26), (32) formulalarga ko‘ra (2) - (2.3.5) formulalar A_μ^2 teskari masala yechimini beradi. Bu formulalarning sonli bajarilishi faqat (26) integrallarni va (2)-(5), (32) algebraik almashtirishlarni hisoblash talab etiladi.

(26) momentlarni noldan ajratilgan ω o‘zgarish oralig‘ida hisoblash mumkinligi muhimdir.

Algoritm $\mu_m=\mu_{m+1}$ aniq qatlamlarning mavjudlik imkonini beradi, bu esa uni qo‘llash imkoniyatini kengaytiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Янгибоев З.Ш. Одномерные обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористых средах с неизвестным источником. Дис-я. 2019 г. 113 с.

2. Imomnazarov Kh.Kh., Khujaev L.Kh., Yangiboev Z.Sh. The inverse problem for a system of poroelasticity equations: the case with an unknown Darcy time-dependent coefficient. // European Journal of Research 5(7), 2020, pp. 3-17. (3. Journal SJIF:6.22).

3. Янгибоев З.Ш. Об устойчивости одной обратной динамической задачи для уравнения SH волн в пористом полупространстве. //УзМУ хабарлари» 2012 г. №4. сс. 11-16.

4. Белишев М. И., Благовещинский А.С. Динамические обратные задачи теории волн. СПб. Изд-во СПб.ун-та. 1999. 234 с.

5. Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Рахмонов Т. Т., Янгибоев З. Ш. Регуляризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде // Владикавказский математический журнал, 2013, т.15. №2. с. 46-58.

6. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012. 212с.

7. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. –New York: Nova Science, 1995, 192p.

QOVUSHOQ - ELASTIK UCH QATLAMLI PLASTINKANING ERKIN TEBRANISH JARAYONIDA ASOSIY XOS CHASTOTASINI ANIQLASH

Saipnazarov J.M., Xo'jayev L.H., Xujaqulov N.T., Baratov Sh.O.

QDTU dotsenti, f-m.f.f.d (PhD). jonibeksaipnazarov@gmail.com

QDTU dotsenti, f-m.f.f.d (PhD). lochintemur@gmail.com

QDTU assistenti xujaqulovnavruz1@gmail.com

QDTU talabasi shaxriyorbaratov23@gmail.com

Annotatsiya. Bu ishda to'rtburchakli uch qavatli plastinkani erkin tebranishini ko'rib chiqiladi. Plastinkaning to'rtta burchaklari qo'zgalmas sharnir bilan maxkamlangan bo'lsin deb olingan. Plastinkaning tebranishlar tenglamasi variasion prinsip asosida olingan. Olingan tebranishlar tenglamasi analitik yechilib sonli natijalar olingan. Ishlab chiqilgan metodika asosida olingan sonli natijalar dasturiy ta'minot asosida olingan natijalar bilan solishtirilgan.

Kalit so'zlar: plastinka, erkin tebranish, sharnirli tayanch, variasion prinsip, chastota, konstruksiya, buralish, salqilik, dissipativ, relaksatsiya yadrosi, qovushoq – elastik.

KIRISH. Hozirgi kunda ko'p qatlamli plastinkalar turli muhandislik sohalarida, jumladan mashinasozlik, qurilish, aviatsiya va kemasozlik sanoatlarida keng qo'llanilmoqda. Bunday konstruksiyalar yengil vaznga ega bo'lishi bilan birga yuqori mustahkamlik va barqarorlikni ta'minlaydi. Ayniqsa, qovushoq-elastik materiallardan tashkil topgan uch qatlamli plastinkalar tebranishlarni so'ndirish xususiyati bilan ajralib turadi. Shu sababli bunday konstruksiyalarning dinamik xususiyatlarini, xususan erkin tebranish jarayonidagi asosiy xos chastotalarini o'rganish muhim ilmiy va amaliy ahamiyatga ega. Ko'p qatlamli plastinkalarning tebranish jarayonlarini tadqiq qilish masalasi mexanika fanining dolzarb yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Mazkur ishda to'g'ri to'rtburchak shaklli uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkaning erkin tebranish jarayoni ko'rib chiqiladi va uning asosiy xos chastotasini aniqlash masalasi tadqiq etiladi. Tadqiqot jarayonida plastinkaning fizik-mexanik xossalari hamda qatlamlar o'zaro ta'siri hisobga olinadi. Ushbu tadqiqotning maqsadi — to'g'ri to'rtburchakli uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkaning erkin tebranishidagi asosiy xos chastotasini aniqlash va uning dinamik xususiyatlarini tahlil qilishdan iborat.

Olingan natijalar ko‘p qatlamli konstruksiyalarni loyihalash va ularning tebranish jarayonlarini baholashda muhim ahamiyat kasb etadi.

MASALANI QO‘YILISHI VA YECHISH METODIKASI.

Plastinkani biror burchaklaridan birida biz OXY dekart koordinatalar sistemasini joylashtiramiz. O‘lchamlari OX va OY o‘qlari bo‘ylab plastinkani mos ravishda a va b deb belgilangan tomonlarda yotadi. To‘rtburchakli uch qavatli plastinkani erkin egilishdagi tebranishlarining variasion tenglamasi ikkinchi bobdan kelib chiqsak quyidagicha bo‘ladi. Normalni buralishini ham hisobga olsak variasion tenglama quyidagicha bo‘ladi [1,2]

$$\int_0^a\int_0^b L\delta w dxdy - \int_0^b \left[Q_x\delta w\right]_0^a dy - \int_0^a \left[Q_y\delta w\right]_0^b dx = 0,$$

$$\int_0^a\int_0^b L_x\delta\theta_x dxdy - \int_0^b \left[M_x\delta\theta_x\right]_0^a dy - \int_0^a \left[M_{xy}\delta\theta_x\right]_0^b dx = 0, \qquad (1)$$

$$\int_0^a\int_0^b L_y\delta\theta_y dxdy - \int_0^b \left[M_{xy}\delta\theta_y\right]_0^a dy - \int_0^a \left[M_y\delta\theta_y\right]_0^b dx = 0,$$

bunda

$$L = K_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_x\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + K_x\frac{\partial\theta_y}{\partial y} + B_p\omega^2 w,$$

$$L_x = -K_x\frac{\partial w}{\partial x} + D_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2} + D_{33}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2} - K_x\theta_x + (D_{12}+D_{33})\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y},$$

$$L_y = -K_y\frac{\partial w}{\partial y} + D_{22}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2} + D_{33}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2} - K_x\theta_x + (D_{12}+D_{33})\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y},$$

$$Q_x = K_x(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}),\ Q_y = K_y(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}),$$

Uch qatlamli plastinkaning asosiy chastotasini aniqlashning samarali usuli Galyorkinning taqribiy usulini qo‘llashdan iborat. Buning uchun salqilik $w(x,y),\ \theta_x(x,y),\theta_y(x,y)$ – analitik ko‘rinishdagi ifodalar bilan almashtirib olinadi OX,OY o‘qlari bo‘ylab

$$w = AU_x + BU_y + CU_xU_y,\ \theta_x = DV_x + PV_xU_y,\quad \theta_y = FV_y + TU_xV_y \qquad (2)$$

bu yerda A,B,C,D,F,P,T- noma'lum kattaliklar; U_x, V_x, U_y, V_y – approksimasiya qilingan funksiyalar bo'lib , quyidagi ko'rinishlarga ega

$$U_x(x)=\sin\lambda_1 x,\ V_x(x)=\cos\lambda_1 x, U_y(y)=\sin\lambda_2 y,, V_y(y)=\cos\lambda_2 y,$$
$$\lambda_1=\pi/a,\ \lambda_2=\pi/b.$$

Oxirgi olingan funksiyalar variasiyasi qo'yidagicha bo'ladi

$$\delta w=U_x\delta A+U_y\delta B_y+U_xU_y\delta C,\ \delta\theta_x=V_x\delta D+V_xU_y\delta P,$$
$$\delta\theta_y=V_y\delta F+U_xV_y\delta T \qquad (3)$$

Ular bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasini tashkil etadi. Bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasi trivial bo'lmagan yechimga ega bo'lishi uchun asosiy aniqlovchisi nolga teng bo'lishi kerak. Bundan quyidagicha kubik tenglamani olamiz [3] :

$$\gamma_3\Omega^3+\gamma_2\Omega^2+\gamma_1\Omega+\gamma_0=0.$$

Agar qovushoq elastik mexanik sistema o'rganilsa, u xolda kubik tenglama hadlari oldidagi koeffisiyentlar $\gamma_0(\omega_R),\gamma_1(\omega_R),\gamma_2(\omega_R),\gamma_3(\omega_R)$ chastotani haqiqiy qismiga bog'liq bo'ladi. Bu yerda $\Omega=\omega^2,\ \omega=2\pi f, f-$ chastota bo'lib gs o'lchanadi. Bu ishlab chiqqan metodika bo'yicha birinchi asosiy chastota topiladi

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{12\gamma_3(3\gamma_1\gamma_2-9\gamma_0\gamma_3+\sqrt{(12\gamma_1^3\gamma_3-3\gamma_1^2\gamma_2^2-54\gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0=81\gamma_0^2\gamma_3^2+12\gamma_2^3\gamma_0))}-8\gamma_2^2}{16\gamma_3(12\gamma_1\gamma_3+4\gamma_2^2-2\gamma_2)}}-\frac{1}{2\gamma_3}.$$

SONLI NATIJALAR VA TAHLILI.

Uch qatlamli qovushoq – elastik to'rtburchakli turli xil o'lchamdagi va qalinlikdagi plastinkalarni asosiy chastotasini topish bilan shug'ullanamiz. Tashqi qatlamli plastinkalarni parrametrlari quyidagicha:

$$E_x=50\,ГПа,\ E_y=50\,ГПа, G_{xy}=21\,ГПа\ , G_{xz}=G_{yz}=4\,ГПа\ ,$$
$$\nu_{xy}=\nu_{yx}=0.30,\rho=1500кГ/м^3$$

To'ldiruvchini fiziko – mexanik xususiyati quyidagicha:

$$G_{xz}=400МПа, G_{yz}=220МПа, \rho=83кг/м^3.$$

Plastinkaning o'lchamlari quyidagicha $b=1m,\ a=0.5;\ 1;\ 2m$.

1 –jadval.

Asosiy chastotani qalinligiga bog‘liq o‘zgarishi

h_0,m	h_z(a=1, b=2)	h_z(a=1, b=2)	h_z(a=1, b=2)	h_z(a=1, b=2)	h_z(a=1, b=2)	h_z(a=1, b=2)
	0.01m	0.05m	0.1m	0.01m	0.05m	0.1m
0.002	35,40323	115,8264	176,7201	29,7564	87,9423	146,0646
0.004	41,46511	150,1305	251,4235	32,8465	114,3162	178,0835

Tashqi qatlam qalinligi h quyidagicha 0.001 va 0.002, to‘ldiruvchini qalinligi 0.01,0.05,0.1m. Relaksatsiya yadrosi[4]: $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$. Bu yadroning parametrlari $A = 0,048,\ \beta = 0,05$ *ва* $\alpha = 0,1$ ga teng. Olingan sonli natijalar 1 jadvallarda keltirilgan. Ko‘rinib turibdiki ikki dasturiy ta’minot asosida olingan chastotalarni haqiqiy qisimlari orasidagi farq 15% farq bilan ustma ust tushar ekan. Bu ABACUS dasturiy ta’minotini sonli yechish usuliga asoslanganligi bilan izohlanadi. Bu paragrafda asosan eng kichik kompleks chastotani haqiqiy va mavhum qismlarini topish metodikasi va natijalari keltirildi. Agar dissipativ bir jinsli mexanik sistema ko‘rilsa, u holda bu metodika (asosiy chastotani topish to‘liq mexanik sistemani holatini xarakterlab beradi. Agar mexanik sistema dissipativ bir jinsli bo‘lmasa, u holda boshqa yuqori chastotalar va ularni mavhum qismlarini ham tekshirish kerak bo‘ladi.

XULOSA

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipidan foydalanib erkin tebranishlarini ifodalovchi chiziqli xususiy hosilali integro - differensial tenglamalar sistemasi olindi. Ularni qanoatlantiruvchi chegaraviy va boshlang‘ich shartlar keltirildi. Masalalarning matematik qo‘yilishi, yechish metodikasi va algoritmi ishlab chiqildi. Ikki dasturiy ta’minot asosida olingan chastotalarni haqiqiy qismlari orasidagi farq 15% farq bilan ustma ust tushishi aniqlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Reddy, J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. J. Appl. Mech. 1984, 51, 745–752.

2. Саипназаров Ж.М., Распространение волн в двухслойной упругой среде Buxoro Davlat universiteti ilmiy axboroti 2024/9 (114). P.82-91

3. Monterrubio L. E., Ilanko S. Proof of convergence for a set of admissible functions for the Rayleigh – Ritz analysis of beams and plates and shells of rectangular planform // Computers & Structures. 2015. Vol. 147. 15 January. Pp. 236–243.

4. Narita Y. Polya counting theory applied to combination of edge conditions for generally shaped isotropic plates // EPI International Journal of Engineering. 2019. Vol. 2. No. 2. Pp.194–202.

5. Esanov N.K., Saipnazarov J.M., Almuratov SH.N., Ishmamatov M, Raxmonova G.X. Free Vibrations of a Spherical shell with a Pinched Edge. IV International Conference on Advances Scienc, Engeneering and Digital Education (29-31 May 2024).

6. Сафаров И.И., Эсанов Н.Қ., Саипназаров Ж.М., Халилов Ш.Ф.,Колебания плоской вязкоупругой спиральной пружины Journal of Advances in Engineering Technology Vol.3(15), July – September, 2024

BIR O‘ZGARUVCHILI ALGEBRAIK POLINOMLARNING XOSSALARI VA ULARNING QO‘LLANILISHI

Jalilov Sh.S., Sattorov M.E. G‘aniyev S.E.

QDTU assistenti. jalilovshaxriyor10@gmail.com

QDTU katta o‘qituvchisi. mamadiyorsattorov29@gmail.com

QDTU talabasi. suxrobganiyev6@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada bir o‘zgaruvchili algebraik polinomlarning asosiy xossalari va ularning matematik tahlildagi o‘rni o‘rganiladi. Polinom tushunchasi, uning darajasi, koeffitsiyentlari hamda ildizlari o‘rtasidagi bog‘lanishlar tahlil qilinadi. Shuningdek, polinomlarning algebraik tenglamalarni yechishdagi ahamiyati va ularning turli matematik hamda amaliy masalalardagi qo‘llanilishi yoritiladi. Ishda algebraik tushuncha bo‘lgan $K[x_1,...,x_n]$ polinomial halqa va geometrik tushuncha bo‘lgan affin ko‘pxilliklar orasidagi bog‘liqliklar o‘rganilgan. Polinomial ideallar va affin ko‘pxilliklar bilan bog‘liq bo‘lgan bi qator masalalar: $K[x_1,...,x_n]$ halqada idealning tavsiflanish masalasi, polinomial tenglamalarni yechilish masalalari to‘liq yechimlari bilan birga berilgan. Tadqiqot natijalari polinomlar nazariyasining algebra va matematik analizdagi muhim o‘rnini ko‘rsatadi hamda ularning ilmiy va amaliy ahamiyatini asoslaydi.

Kalit so‘zlar: Polinom, algebraik polinom, bir o‘zgaruvchili polinom, polinom darajasi, matematik analiz, koeffitsiyent, ildizlar, algebraik tenglama.

KIRISH. Algebra fanining muhim bo‘limlaridan biri bo‘lgan polinomlar nazariyasi matematik tadqiqotlarda alohida o‘rin egallaydi. Bir o‘zgaruvchili algebraik polinomlar matematik analiz, algebraik tenglamalar nazariyasi hamda matematik modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Polinomlar yordamida turli matematik funksiyalarni yaqinlashtirish, tenglamalarni yechish hamda ko‘plab nazariy masalalarni tahlil qilish mumkin.

Bir o‘zgaruvchili polinomlarning tuzilishi, ularning darajasi, koeffitsiyentlari va ildizlari o‘rtasidagi bog‘lanishlar algebra fanining muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Ushbu maqolada bir o‘zgaruvchili algebraik polinomlarning asosiy xossalari, ularning matematik tahlildagi o‘rni hamda ayrim amaliy masalalardagi qo‘llanilishi ko‘rib chiqiladi.

Ushbu maqolada bir o'zgaruvchili polinomlar, polinomial ideallar va bir qator masalalarni: $K[x_1,...,x_n]$halqada idealning tavsiflanish masalasini, idealga tegishlilik masalasi, polinomial tenglamalarni yechilish masalalari to'liq yechimlari bilan birga beriladi.

MASALANING QO'YILISHI VA YECHIMI

1-ta'rif. Ushbu

$$f = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m,$$

ifodaga koeffisentlari k maydondan olingan *bir o'zgaruvchili polinom* deyiladi, bunda $a_i \in k$ va $a_0 \neq 0$ (deg(*f*)=m). Barcha bir o'zgaruvchili polinomlar to'plamini $k[x]$ orqali belgilaymiz. Ushbu $a_0x^m - f$ polinomning *eng katta hadi deyiladi* va $LT(f) = a_0x^m$ kabi belgilanadi («LT» -ingliz tilidagi «leadingterm» so'zlarining bosh harflari).

1-misol: $f = 21x^5 - 6x - 5$, polinomni olsak, $LT(f) = 21x^5$ bo'ladi.

Agar f va g – nolmas polinomlar bo'lib, $\deg(f) \leq \deg(g)$ bo'lsa $\mathrm{LT}(g), \mathrm{LT}(f)$ ga qoldiqsiz bo'linadi.

Endi biz $k[x]$ da qoldiqli bo'linish algoritimini bersak bo'ladi.

1-tasdiq. (bo'linish algoritmi). $g \in k[x]$–nolmas polinom bo'lsin. U holda istalgan $f \in k[x]$ polinomni quyidagicha $f = qg + r$,

ifodalab olishimiz mumkin, bunda $q, r \in k[x]$ *va* $r = 0$, yoki $\deg(r) < \deg(g)$ bo'ladi. Endi esa q va r larni hisoblash algoritmini beramiz.

Mana shu algoritm q va r larni hisoblashning, psevdo kodlarda yozilishi:

kirish: g, f

Chiqish: q,r

q:=0; r:=f

WHILE $r \neq 0$ AND LT(g) делит LT(r) DO

g:=q+LT(r)/LT(g)

r:=r-(LT(r)/LT(g))g

Ushbu algoritm yordamida topiladigan r qoldiq va q to‘liqsiz bo‘linma bir qiymatli aniqlanadi.

1-natija. $f \in k[x]$ – *nolmas polinom* bo‘lsin. *U holda f, k da kamida* deg(*f*) *ta ildizga ega bo‘ladi.*

1.4.tasdiqda $k[x]$ dagi .

1-natija. k – *maydon va* $f \in k[x]$ *bo‘lsin. U holda* $k[x]$ *dagi har bir ideal* $< f >$ *orqali ifodalanadi.*Bundan tashqari *fk* maydondan olingan nolmas o‘zgarmas songa ko‘paytirishdan hosil qilinishi mumkin.

Agar ideal, bitta elementdan yasalgan bo‘lsa, unga *bosh ideal* deyiladi. 1.3-natijadan ko‘rinadiki $k[x]$ to‘plamni *bosh ideallar sohasi* deb aytishimiz mumkin.

2-ta’rif. $f, g \in k[x]$ polinomlarning *eng katta umumiy bo‘luvchisi* deb shunday *h* polinomga aytiladiki agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. *f* va *g* lar *h* ga bo‘linsa;
2. agar *f* va *g* qandaydir *p*-bo‘linsa, u holda *hp* ga bo‘linadi;

f va *g* polinomlarning eng katta umumiy bo‘luvchi GCD(*f, g)* kabi belgilanadi

(GCD belgilash ingliz tilidagi “greatestcommondivisor” so‘zlarining bosh harflaridan olingan).

Keying tasdiqda GCD ning assosiy xossalari keltiramiz.

1.2-tasdiq. $f,g \in k[x]$bo‘lsin.*U holda*

1. GCD(*f,g) mavjud va u yagona k da ;*
2. GCD(*f, g) ,* $< f, g >$ *idealni hosil qiladi;*
3. GCD(*f, g) ni hisoblash algoritmi bor.*

Daslab quyidagi ta’rifni berishimiz zarur.Ushbu $f, g \in k[x]$, $g \neq 0$ bo‘lsin, *f* ni *f=qg+r,* ko‘rinishida yozib olamiz, bunda *q* va *r* lar 1.4.tasdiqdagi shartlarni qanoatlantiradi. U holda *r* ga *f* ni *g* ga bo‘lgandagi *qoldiq* deb ataymiz. (biz *r*=qoldiq (*f, g*) kabi yozishimiz mumkin). Endi biz Evklid algoritmini berishimiz mumkin:

Kirish: *f,g*

Chiqish: *h*

h:=f

s:=g

WHILE $s \neq 0$ DO

rem:=qoldiq (h,s)

h:=s

s:=rem

Evklid algoritmini ishlash prossesini quyidagi misolda ko‘rib chiqishimiz mumkin.

2-misol. GCD(x^2-4, x^4-16) ?.

$$x^2-4=0(x^4-16)+x^2-4,$$

$$x^4-16=x^2(x^2-4)+4x^2-16,$$

$$x^2-4=1/4(4x^2-16)+0.$$

Bo‘linmalarni quyidagicha yozishimiz mumkin.

GCD(x^2-4, x^4-16)=GCD(x^4-16, x^2-4)=GCD(x^2-4, x^2-4)=

GCD$(x^2-4, 0)$

Bundan GCD$(x^4-4, x^6-16)= x^2-4$ ekanligini olamiz.GCD hisoblash bizga $< x^4-4, x^6-16 >$, idealning yasovchisini aniqlash imkonini beradi ya’ni GCD$(x^4-4, x^6-16)= x^2-4$, bundan$< x^4-4, x^6-16 >=< x^2-4 >$ ekanligi kelib chiqadi.

Quyidagicha savol tug‘ilishi tabiiy: ideal uchta yoki undan ko‘p sondagi polinomlardan tuzilgan bo‘lsachi? Unda biz bir nechta sondagi polinomlar uchun bo‘linish algoritimini berishimizga to‘g‘ri keladi.

3-ta’rif. Ushbu $f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x]$ polinomlarning *eng katta umumiy bo‘luvchisi* deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan h polinomga aytiladi

1. h polinom $f_1, f_2, \dots, f_s$ larning har birini bo‘ladi;
2. agar p –qandaydir polinom va $f_1, f_2, \dots, f_s$, lar p ga bo‘linsa unda h p ga bo‘linadi.$f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x]$larning *eng katta umumiy bo‘luvchisi* h GCD$(f_1, f_2, \dots, f_s)$ orqali belgilanadi.

Keyingi tasdiqda GCD ning assosiy xossalarini keltiramiz

3-tasdiq. *Ushbu* $f_1, f_2, \dots, f_s \epsilon k[x], s \geq 2$ *lar berilgan bo'lsin.U holda*

1. GCD($f_1, f_2, \dots, f_s$)*mavjud va определен однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу из k;*

2. GCD($f_1, f_2, \dots, f_s$),<$f_1, f_2, \dots, f_s$> idealni tashkil qiladi;

3. *agar* $s \geq 3$, *bo'lsa* GCD($f_1, f_2, \dots, f_s$)=GCD(f_1,GCD(f_2,……f_s)) tenglikdan foydalaniladi;

4. GCD($f_1, f_2, \dots, f_s$) ni hisoblash algoritimi mavjud.

Masalan, f_1, f_2, f_3, f_4 larning eng katta umumiy bo'luvchisini hisoblash uchun,

GCD(f_1, f_2, f_3, f_4) = GCD((f_1,GCD(f_2, f_3, f_4)) = GCD(f_1,GCD(f_2,GCD(f_3, f_4))) tengliklardan foydalanamiz. Boshqacha aytganda f_1, f_2, f_3, f_4 larning eng katta umumiy bo'luvchisini hisoblash uchun uch marta Evklid algoritmidan foydalanamiz.

3-misol.GCD($x^3 - 8, x^2 - 4, x^4 - 16$)?.

Hisoblashda, GCD($x^3 - 8, x^2 - 4, x^2 - 16$)=GCD($x^3 - 8$, GCD($x^2 - 4, x^4 - 16$))= GCD($x^3 - 2, x^2 - 4$) =$x - 2$, bundan,

$< x^3 - 8,\ x^2 - 4, x^4 - 16 > = < x - 2 >$ ekanligi kelib chiqadi.

Biz yuqorida $k[x]$da berilgan $< f_1, f_2, \dots, f_s >$, $f_1, f_2, \dots, f_s \epsilon k[x]$ idealning yasovchilarini topish algoritmini qarab chiqdik.

XULOSA

Ushbu maqolada o'zgaruvchili algebraik polinomlarning nazariy asoslari, hujjat tuzilishi hamda asosiy xossalari ilmiy tahlil natijalari. Tadqiqot jarayonida polinom jihati, uning darajasi, koeffitsiyentlari va manbalari o'zining umumiy o'zaro bog'liqlik masalalari yoritildi, bir o'zgaruvchili polinomlarning algebraik tenglamalarini yechishdagi ahamiyati hamda matematik tahlilda tutgan o'rni ko'rib chiqildi.

Natijalar shuni ko'rsatadiki, polinomlar algebra fanining hisob-kitoblaridan biri bo'lib ular ko'plab matematik jarayonlarni ifodalash va tahlil qilishda muhim vosita hisoblanadi. Bir o'zgaruvchili polinomlar yordamida funktsiyalarni yaqinlashtirish, tenglamalarni yechish hamda turli matematik modellarni qurish mumkin.

Olib borilgan tadqiqotlar bir o‘zgaruvchili polinomlarning matematik tahlildagi muhim o‘rnini yana bir bor tasdiqlaydi. Kelgusida ushbu yo‘nalishdagi ilmiy izlanishlar polinomlar nazariyasining rivojlanishiga, matematik modellashtirish va amaliy masalalarni yechishda yangi usullarni ishlab chiqishga xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

1. Adams W., Loustaunan P. (1994), AnIntoduction to Groebner Bases, Graduate Studias in Mathematics, 3 Amer. Soc. Providence.

2. Dube T.W. (1990) The structure of polynomial ideals and Groebner bases, SIAM J.Comput., 19. 750-755.

3. Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений// М. Ж. МЦНМО, 2003.

4. Бухбергер Б. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов// Компьютерная алгебра. Символика и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1986.

5. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.:Наука,1979.

6. Говорухин В., Цибулин П., Компьютер в математическом исследовании. – С-Питербург, Питер, 2002.

7. Давенпорт Дж., Сире Й., Турнье Е. Компьютерная алгебра. – М.: Мир,1991.

8. Кириенко Денис Павлович, Система компьютерной алгебры Maple, Среднее общеобразовательная школа №179 МИОО, г.Москва.

YUQORI TARTIBLI O‘ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLI BO‘LMAGAN CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

Sattorov M.E., Jalilov Sh.S.

QDTU katta o‘qituvchisi. mamadiyorsattorov29@gmail.com

QDTU assistenti. jalilovshaxriyor10@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalarning nazariy asoslari va ularni yechish usullari o‘rganiladi. Ushbu turdagi tenglamalarni yechishda mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini aniqlash, xarakteristik tenglama usulidan foydalanish hamda xususiy yechimni topish metodlari tahlil qilinadi. Shuningdek, maqolada differensial tenglamalarning amaliy masalalarni modellashtirishdagi o‘rni ko‘rsatilib, ayrim misollar orqali ularning tatbiqi yoritiladi. Olingan natijalar matematik modellashtirish, fizika va texnika sohalaridagi jarayonlarni tahlil qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Kalit so‘zlar: Differensial tenglama, chiziqli differensial tenglama, bir jinsli bo‘lmagan tenglama, o‘zgarmas koeffitsiyentlar, yuqori tartibli tenglamalar, xarakteristik tenglama, umumiy yechim, xususiy yechim, matematik modellashtirish.

KIRISH. Hozirgi zamon matematika va uning amaliy tatbiqlarida differensial tenglamalar muhim o‘rin egallaydi. Turli tabiiy jarayonlar, texnik tizimlar hamda iqtisodiy modellarni tavsiflashda yuqori tartibli differensial tenglamalardan keng foydalaniladi. Ayniqsa, o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalar ko‘plab fizik va muhandislik masalalarini modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Bunday tenglamalar mexanika, elektrotexnika, tebranish jarayonlari, signal uzatish tizimlari va boshqa ko‘plab sohalarda uchraydi.

Yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalarni yechishda ularning mos bir jinsli tenglamasining umumiy yechimini topish, xarakteristik tenglama usulidan foydalanish hamda xususiy yechimni aniqlash muhim bosqich hisoblanadi. Mazkur maqolada ushbu turdagi differensial tenglamalarning nazariy asoslari, ularni yechish usullari hamda ayrim amaliy misollar orqali tatbiqlari ko‘rib chiqiladi.

MASALANING QO‘YILISHI, YECHIMI VA TAHLILI. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar . Bunday tenglama

$$y''+py'+gy=f(x) \tag{1}$$

ko‘rinishda bo‘lib, bu yerda p,g o‘zgarmas koeffitsiyentlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi, bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni $\bar{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, umumiy yechimi

$$y(x)=\bar{y}(x)+y_1(x) \tag{2}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu fikrga (2) yechimni (1) tenglamaga qo‘yib, (1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y(x)}$ni topishni yuqorida o‘rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo‘ladi. (1) tenglamada $f(x)$ funksiya:

1) $f(x)=e^{\alpha x}P(x)$, bu yerda $P_n(x)$ $n-$ darajali ko‘p had;

2) $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$ ko‘rinishda bo‘lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.

Birinchi holda xususiy yechimni $y_1(x)=x^k e^{\alpha x}Q_n(x)$ ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda k xarakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo‘lganlari soni (0,1,2 bo‘lishi mumkin), $Q_n(x),P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad. U holda bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $y''+2y'-3y=e^{2x}(25x^2-47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y''+2y'-3y=0$ bo‘lib, uning xarakteristik tenglamasi $r^2+2r-3=0$ bo‘ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 3}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2},\qquad r_1=-3,\ r_2=1$$

bo‘lib, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ bo‘ladi.

Endi berilgan birjinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz: Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko‘phad darajasi bilan bir xil ko‘phad, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad ko‘paytmasi ko‘rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Endi aniqmas *A, B va C* koeffitsiyentlarni topish lozim. Shartga ko‘ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak.

Buning uchun

$$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C),\quad y_1'(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+e^{2x}(2Ax+B),$$

$$y_1''(x)=4e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+2e^{2x}(2Ax+B)+e^{2x}\cdot 2A$$

larni berilgan tenglamaga qo‘yib,

$e^{2x}[2A+6(2Ax+B)+5(Ax^2+Bx+C)]=e^{2x}(25x^2-47)$ tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni e^{2x} ga bo‘lsak,

$$5Ax^2+(12A+5B)x+2A+6B+5C=25x^2-47$$

bo‘ladi.

$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo‘lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\begin{cases}5A=25,\\ 12A+5B=0,\\ 2A+6B+5C=47.\end{cases}$$

uchta noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak $A=5,\ B=-12,\ C=3$ bo‘ladi.

Demak, $y_1(x)=e^{2x}(5x^2-12x+3)$ berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan

$$y = \bar{y} + y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$$

bo‘ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga *aniqmas koeffitsiyentlar usuli* deyiladi.

Misol.

$$y'' - 4y' = 3x^2$$

tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish:

$$r^2 - 4r = 0$$

bo‘lib, $r_1 = 0;\ r_2 = 4$ uning ildizlari bo‘ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{0x} + C^2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$$

bo‘ladi. Berilgan tenglamaning o‘ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo‘lib, $\alpha = 0$ va nol xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun xususiy yechimi

$$y_1(x) = e^{0x}x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_1''(x) = 6Ax + 2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 3x^2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

bo‘ladi. Shunday qilib, xususiy yechimi

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

bo‘lib, umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

bo‘ladi.

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ bo‘lganda xususiy yechimi

$$y_1(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^k$$

ko‘rinishda bo‘lib, k xarakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng bo‘lganlarining soni.

Misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: Xarakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ bo‘lib, ildizlari

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

bo‘ladi. $\beta = 1;\quad i\beta = i$ bo‘lganligi uchun $k = 1,$ ya’ni xususiy yechimini

$$y_1(x) = (A\cos x + B\sin x)x^1$$

ko‘rinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsiyentlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topib,

$$y_1'(x) = (A\cos x + B\sin x)x + A\cos x + B\sin x = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$$

$$y_1''(x) = B\cos x - A\cos x - Bx\sin x - A\sin x + B\cos x - Ax\cos x = (2B - Ax)\cos x + (-2A - Bx)\sin x$$

berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(2B - Ax)\cos x + (2A - Bx)\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x \quad \text{yoki}$$

$$2B\cos x + (-2A)\sin x = \sin x$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0,\ A = -\frac{1}{2}$ bo‘lib, xususiy yechimi

$$y_1(x) = -\frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

bo‘lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

Misol.

$$y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$$

differensial tenglamaning

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

tenglamaning xarakteristik tenglamasi $r^2 + 4r + 5 = 0$ bo‘lib, uning ildizlari $r_1 = -2 - i;$ $r_1 = -2 + i$ bo‘ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

bo‘ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz.

$y'(x), \quad y''(x)$ hosilalarni topib berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(4A + 4B)\cos x + (4B - 4A)\sin x = 2\cos x - \sin x$$

bo‘lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2 \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A = \frac{3}{8}, \quad B = \frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy yechimini topamiz.

$$y_1(x) = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=\bar{y}(x)+y_1(x)=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Endi berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya’ni boshlang‘ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechiminitopamiz: Umumiy yechimdan hosila

$$y'(x)=-2e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{2x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)-\frac{3}{8}\sin x+\frac{1}{8}\cos x$$

bo‘ladi va boshlang‘ich shartlardan foydalanib,

$$1=\frac{3}{8}+C_1,\qquad 2=\frac{1}{8}-2C_1+C_2$$

C_1 va C_2 noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $C_1=\frac{5}{8},\ C_2=\frac{25}{8}$.

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi

$y(x)=e^{-2x}(\frac{5}{8}\cos x+\frac{25}{8}\sin x)+\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$ ga teng bo‘ladi

XULOSA

Mazkur maqolada yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalarning nazariy asoslari va ularni yechish usullari tahlil qilindi. Tadqiqot jarayonida ushbu turdagi tenglamalarni yechishda avvalo mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini aniqlash, so‘ngra xususiy yechimni topish orqali umumiy yechimni hosil qilish muhimligi ko‘rsatib berildi.

Olib borilgan tahlillar shuni ko‘rsatdiki, yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalar turli tabiiy va texnik jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Ushbu tenglamalarni yechish usullarini chuqur o‘rganish va takomillashtirish mexanika, fizika, elektrotexnika hamda boshqa amaliy fanlarda yuzaga keladigan murakkab jarayonlarni tahlil qilish imkonini beradi.

Differensial tenglamalar nazariyasining yo‘nalishidagi tadqiqotlar matematik modellashtirishning rivojlanishiga hamda turli ilmiy-amaliy masalalarni yechishda samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Claudio Canuto, Anta Tabacco. Mathematical Analysis I, (II). Springer-Verlag, Italia, Milan, 2008-yil (2015-yil).

2. B.A.Xudayarov Matematika. I-qism. Chiziqli algebra va analitik geometriya. Toshkent, “Fan va texnologiya”, 2018-yil. 284 bet.

3. B.A.Xudayarov “Matematikadan misol va masalalar to‘plami” Toshkent “O‘zbekiston” 2018-yil. 304 bet.

4. E.F.Fayziboev, Z.I.Suleymenov, B.A.Xudayarov “Matematikadan misol va masalalar to‘plami”, Toshkent, “O‘qituvchi” 2005-yil. 254 bet.

5. F.Rajabov va boshqalar. “Oliy matematika”, Toshkent “O‘zbekiston” 2007-yil. 400 bet.

6. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son qarori. Lex.uz

TOLDOSHLAR OILASIGA MANSUB DARAXTLARDA SO'RUVCHI ZARARKUNANDALARGA QARSHI KURASH CHORALARI

G'ayrataliyeva Shaxzoda Elyor qizi

Andijon davlat universiteti. gayrataliyevashaxzoda@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada toldoshlar oilasiga mansub tol va teraklarda uchraydigan asosiy so'ruvchi zararkunandalar, ularning zarar belgilari va integrallashgan kurash choralari yoritildi.

Kalit so'zlar. toldoshlar oilasi, Salicaceae, tol, terak, so'ruvchi zararkunandalar, shira, qalqondor, barg burgasi, kana, integrallashgan kurash

KIRISH. Toldoshlar oilasi (Salicaceae) tarkibiga asosan tol (Salix) va terak (Populus) turkumlari kiradi. Ushbu daraxtlar tez o'sishi, atrof-muhitni yaxshilashdagi o'rni, shamolpanjara hosil qilishi, eroziyaga qarshi xizmat qilishi va yog'och xomashyosi sifatidagi qiymati bilan amaliyotda keng qo'llanadi. Shahar ko'kalamzorlashtirish, yo'l bo'ylari, kanal va ariq qirg'oqlarini mustahkamlash, park va himoya o'rmonzorlari barpo etishda ham toldoshlar oilasiga mansub turlar alohida ahamiyatga ega .

Bu daraxtlar nisbatan tez o'suvchi va shirali to'qimalarga ega bo'lgani sababli ularning vegetativ organlarida o'simlik shirasi bilan oziqlanuvchi zararkunandalar tez ko'payadi. So'ruvchi zararkunandalar barg, kurtak, yosh novda va po'stloq parenximasidan oziqlanib, daraxtning fiziologik jarayonlarini izdan chiqaradi. Natijada barglarda xloroz, mo'rtlashish, qiyshayish, buralish, sarg'ayish va erta to'kilish kuzatiladi; o'sish sur'ati pasayadi, yosh ko'chatlarda esa rivojlanishdan orqada qolish yuz beradi.

So'ruvchi guruhga kiruvchi zararkunandalar orasida shiralar, qalqondorlar, barg burgalari hamda o'rgimchakkanalar va eriofid kanalar alohida xavf tug'diradi. Ularning ko'pchiligi kichik o'lchamli bo'lgani uchun dastlabki bosqichda ko'zga tashlanmaydi, ammo qulay iqlim va oziqa sharoitida koloniyalar hosil qilib, qisqa muddatda katta zarar yetkazadi. Ayrim turlarda ajralib chiqadigan shirin suyuqlik barg yuzasida yopishqoq qatlam hosil qilib, qurum zamburug'lari rivojlanishi uchun sharoit yaratadi .

Hozirgi vaqtda zararkunandalarga qarshi kurashda faqat bir usulga tayanish yetarli emas. Kimyoviy preparatlarning samarasiz yoki keraksiz qo'llanishi foydali entomofaunaga zarar yetkazishi, rezistent populyatsiyalar shakllanishi va ekologik xavflarni kuchaytirishi mumkin. Shu sababli toldoshlar oilasiga mansub daraxtlarni himoya qilishda monitoring, agrotexnika, sanitariya, biologik usullar va zarur holatda maqsadli kimyoviy ishlovni birlashtirgan integrallashgan yondashuv eng maqbul hisoblanadi.

Mazkur maqolaning maqsadi toldoshlar oilasiga mansub daraxtlarda uchraydigan asosiy so'ruvchi zararkunandalarni umumlashtirib tavsiflash, ularning zarar mexanizmi va tashqi belgilarini tahlil qilish hamda amaliyot uchun qulay bo'lgan kurash choralarini tizimli ko'rinishda bayon etishdan iborat.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA USULLAR. Mavzu bo'yicha mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, poplar va tol ekinlarida uchraydigan zararli hasharotlar orasida so'ruvchi guruhlar ko'p uchraydi va plantatsiyaning yoshiga, iqlimga hamda agrofon holatiga qarab iqtisodiy zararlilik darajasi o'zgaradi. FAO nashrida poplar va tollarga zarar yetkazuvchi xalqaro ahamiyatdagi ko'plab hasharotlar ichida shiralar va boshqa sap-sucking guruhlar alohida ko'rsatilgan. USDA qo'llanmasida esa poplarlarda hasharot, kasallik va hayvonlar keltiradigan zararning identifikatsiyasi bilan birga, erta tashxis va profilaktik choralar muhimligi ta'kidlangan.

Universitet extension manbalarida so'ruvchi zararkunandalarning umumiy biologiyasi, teshuvchi-so'ruvchi og'iz apparati, kolonial rivojlanishi hamda barg to'qimalaridagi tipik simptomlar tavsiflangan. Xususan, shiralar, qalqondorlar va kanalar ko'pincha bargning orqa tomonida, yosh novdalar uchida yoki po'stloq osti yaqinida joylashib, ko'payishning ma'lum davrlarida juda tez son orttirishi qayd etiladi . Eriofid kanalar esa mikroskopik o'lchamda bo'lib, bargning buralishi, pufaklanishi, russetlanishi va deformatsiyasi bilan namoyon bo'ladi.

Tadqiqot usuli sifatida qiyosiy-tahliliy, tavsifiy va umumlashtiruvchi yondashuvlardan foydalanildi. Dastlab toldoshlar oilasining amaliy jihatdan muhim vakillari - tol va terak - bo'yicha so'ruvchi zararkunandalar guruhlari ajratildi. Keyin

zararning tashqi alomatlari, rivojlanishiga qulay omillar, tabiiy kushandalar va kurash usullari bo'yicha manbalardagi ma'lumotlar o'zaro solishtirildi. Shundan so'ng, amaliyotga mos integrallashgan himoya sxemasi ishlab chiqildi.

Ushbu maqola laboratoriya tajribasi natijalarini emas, balki ilmiy adabiyotlar hamda amaliy qo'llanmalardagi ma'lumotlarni tizimlashtiruvchi sharh-xarakterdagi tahliliy ishni ifodalaydi. Shu bois matnda berilgan tavsiyalar asosan dala kuzatuvi, o'simlik fenologiyasi va zararkunandalar biologiyasini hisobga olgan holda umumlashtirildi. Metodik yondashuvning asosiy tamoyili - zararni erta aniqlash va kurashni ekologik hamda iqtisodiy jihatdan maqbul darajaga keltirishdir.

Adabiyotlarni solishtirish natijasida zararkunanda soni bir xil bo'lsa ham, zararning og'irligi daraxtning yoshi, suv ta'minoti, oziqlanish holati va iqlim stressiga qarab keskin farqlanishi aniqlanadi. Demak, himoya choralari har doim faqat hasharotga emas, balki o'simlikning umumiy holatiga tayanib rejalashtirilishi lozim.

MUHOKAMA. So'ruvchi zararkunandalarning birinchi va eng keng tarqalgan guruhi - shiralar. Ular odatda koloniya bo'lib yashaydi, yosh barglar va uchki novdalarni egallaydi. Shiralarning zararidan barglar qiyshayadi, naychalanadi, kurtaklar rivojlanishi sustlashadi, yosh novdalar qisqaradi. Qulay havo va ortiqcha azotli oziqlanish sharoitida shiralar soni juda tez ortadi. Ajralib chiqadigan shira tomchilari barg yuzasini yopishqoq qilib, keyinchalik qora qurum zamburug'lari paydo bo'lishiga sabab bo'ladi. Yosh terak plantatsiyalarida kuchli shiralash daraxtning bo'y o'sishini sezilarli darajada sekinlashtirishi mumkin.

Ikkinchi muhim guruh - qalqondorlar. Ularning tanasi mumsimon yoki qattiq qalqon ostida bo'lgani sababli tashxislash biroz qiyinroq. Qalqondorlar novda, po'stloq va barg bandi yuzalarida qo'zg'almas holatda joylashib, o'simlik shirasi hisobiga yashaydi. Zararlangan o'simliklarda shoxlarning zaiflashishi, po'stloq yorilishi, barglarning maydalashishi va umumiy quvvat pasayishi kuzatiladi. Yumshoq qalqondorlar ham honeydew ajratib, barg va novdalarni ifloslaydi; qattiq qalqondorlar esa ko'proq yashirin ravishda surunkali zarar yetkazadi. Ularning 'crawler' deb ataladigan yosh, harakatchan bosqichi kurash uchun eng qulay davr hisoblanadi.

Barg burgalari (leafhopperlar) barg plastinkasidagi hujayra shirasi bilan oziqlanib, ko'pincha mayda oqish nuqtalar, keyin esa sarg'ish-marmarsimon tus paydo bo'lishiga olib keladi. Zararlanish kuchayganda barglar fotosintetik faoliyatini yo'qotib, erta qurishi yoki to'kilishi mumkin. Ayrim hollarda barg burgalari fitopatogenlarni tashuvchi vektor sifatida ham ahamiyatga ega bo'ladi. Shuning uchun ularni faqat soniga qarab emas, balki barg holatidagi fiziologik o'zgarishlarga qarab baholash kerak .

O'rgimchakkanalar va eriofid kanalar, ayniqsa issiq va quruq mavsumlarda, toldoshlar oilasi daraxtlarida kuchli rivojlanadi. O'rgimchakkanalar bargning pastki tomonida yashab, hujayra shirasi bilan oziqlanadi va mayda xlorotik nuqtalar hosil qiladi; keyinchalik barg bronza tusga kiradi, quriydi va to'kiladi. Eriofid kanalar esa ko'proq deformatsiya, buralish, pufakchalanish yoki gallsimon o'zgarishlar bilan namoyon bo'ladi. Ularning mikroskopikligi tufayli tashxis ko'proq simptomlar orqali amalga oshiriladi.

So'ruvchi zararkunandalarning ko'payishiga sabab bo'luvchi asosiy omillar sifatida daraxtning stress holati, qurg'oqchilik, noto'g'ri sug'orish, me'yordan ortiq azotli o'g'itlash, qalinlashtirilgan ekish va sanitariya holatining yomonligi ko'rsatiladi. Shuningdek, bir xil tur yoki klonlardan tashkil topgan monokultura plantatsiyalarida ayrim zararkunandalar tez moslashib, ommaviy tus olishi mumkin. Bu holat ayniqsa ko'chatxona va yosh plantatsiyalarda dolzarbdir.

Shiralarning tabiiy kushandalari sifatida xonqizi qo'ng'izlari, oltinko'zlar, sirfid pashshalari va parazit arilar katta ahamiyatga ega. Qalqondorlar va ayrim kanalarga qarshi ham tabiiy entomofaglar va yirtqich kanalar foydali rol o'ynaydi. Agar dala kuzatuvida foydali entomofauna yetarli darajada faol bo'lsa, tezkor insektitsid ishlatish shart bo'lmasligi mumkin. Demak, zararkunandaga qarshi kurash rejasini tuzishda tabiiy muvozanatni hisobga olish talab etiladi.

Ayrim amaliyotlarda zararkunanda ko'rinishi bilan darhol kuchli kimyoviy vosita qo'llash odat tusiga kirgan. Biroq bu yondashuv har doim ham to'g'ri emas. Birinchidan, preparat noto'g'ri fazada sepilsa samara past bo'ladi; ikkinchidan, foydali

hasharotlar nobud bo'ladi; uchinchidan, daraxtning o'zi stressga uchraydi. Shu bois kimyoviy usul faqat boshqa choralarning natijasi yetarli bo'lmaganda, populyatsiya iqtisodiy xavf tug'diradigan darajaga yetganda va zararkunandaning sezgir bosqichi aniqlanganda qo'llanishi maqsadga muvofiq.

Muhokama natijalari shuni ko'rsatadiki, toldoshlar oilasi daraxtlarida so'ruvchi zararkunandalarga qarshi kurash jarayoni bir martalik tadbir emas, balki vegetatsiya davomida bosqichma-bosqich olib boriladigan uzluksiz boshqaruv tizimidir. Bu tizimda kuzatuv, tashxis, profilaktika, selektiv aralashuv va qayta nazorat o'zaro bog'liq bo'lishi kerak.

NATIJALAR. Adabiyotlar asosida olib borilgan tahlil toldoshlar oilasiga mansub daraxtlarda so'ruvchi zararkunandalarga qarshi kurashning eng maqbul modeli integrallashgan himoya ekanini ko'rsatdi. Bunday tizimning birinchi bosqichi muntazam monitoringdir. Erta bahordan boshlab bargning orqa tomoni, uchki kurtaklar, yosh novdalar va po'stloq yuzalari har 7-10 kunda ko'zdan kechirilsa, koloniya hosil qilishdan oldin zararkunandani aniqlash mumkin. Monitoringda nafaqat hasharot soni, balki simptom - sarg'ayish, buralish, yopishqoq ajralma, qora qurum, nuqtali xloroz yoki bronzalanish - ham qayd etilishi lozim.

Ikkinchi bosqich agrotexnik va sanitariya choralaridan iborat. Sog'lom, muvozanatli o'sayotgan daraxtlar stressga kam uchraydi va zararkunanda bosimiga nisbatan chidamliroq bo'ladi. Shu sababli sug'orishni me'yorlash, tuproqning zichlanib qolishini oldini olish, o'g'itlashni muvozanatli tashkil etish, shox-shabbani shamollanadigan holda saqlash, kuchli zararlangan novda va barglarni vaqtida olib tashlash juda muhimdir. Zararlangan o'simlik qoldiqlarini uchastkada qoldirmaslik ham populyatsiya manbaini kamaytiradi.

Uchinchi bosqich biologik usullarni qo'llash va foydali organizmlarni asrashdan iborat. Xonqizi qo'ng'izlari, sirfid lichinkalari, oltinko'zlar va yirtqich kanalar so'ruvchi zararkunandalarning tabiiy regulyatorlari bo'lib, ularni asrash uzoq muddatli barqarorlik beradi. Keng ta'sir doirasiga ega preparatlarni asossiz sepish bu foydali organizmlar sonini kamaytiradi. Shu sababli dastlab yumshoqroq usullar - suv oqimi

bilan yuvish, insektitsid sovunlari, mineral yoki horticultural yog'lar kabi selektivroq choralar ko'rilishi maqsadga muvofiq.

To'rtinchi bosqich mexanik choralardir. Mayda va o'rta darajadagi zararlanishlarda shiralangan uchki novdalarni kesib tashlash, qalqondor to'plangan mayda novdalarni sanitariya maqsadida yo'qotish, barglarni kuchli suv oqimi bilan yuvish kabi amaliy choralar sezilarli foyda beradi. Ayniqsa ko'chatxona va kichik maydonlarda bunday usullar ekologik xavfsiz bo'lib, kimyoviy yuklamani kamaytiradi.

Beshinchi bosqich sifatida kimyoviy kurash faqat zarurat tug'ilganda tavsiya etiladi. Qalqondorlarning yosh harakatchan bosqichi, shiralarning koloniya boshlang'ich fazasi yoki kanalarning vegetatsiya boshidagi faol davri - eng qulay ishlov vaqtlaridir. Tinim davrida qo'llanadigan yog'li ishlovlar qishlovchi bosqichlarni bostiradi. Vegetatsiya davridagi ishlovda esa preparatning daraxt turiga, fenologik bosqichiga, havo haroratiga va foydali entomofaunaga ta'siri albatta hisobga olinishi kerak. Preparat tanlashda amaldagi ruxsat etilgan vositalar va mahalliy fitosanitar tavsiyalarga qat'iy amal qilish zarur.

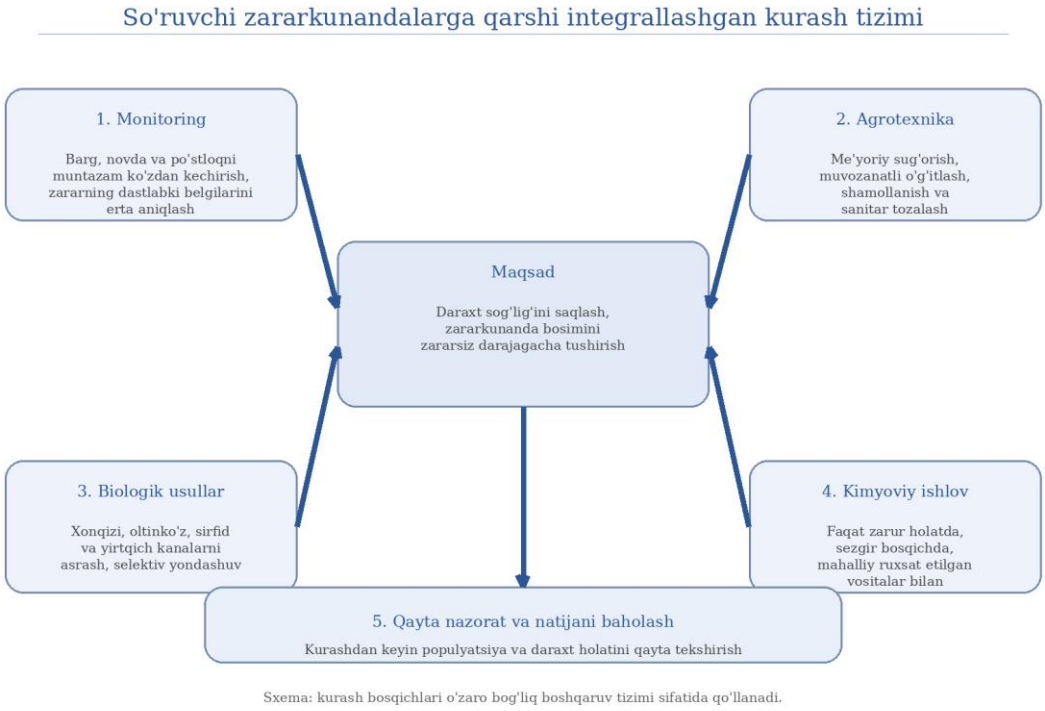
Tahlil natijasida amaliyot uchun quyidagi ketma-ketlik tavsiya etildi: 1) profilaktik kuzatuv; 2) zararlanishni aniqlash va tashxislash; 3) agrotexnik va sanitariya tadbirlarini kuchaytirish; 4) biologik va mexanik usullarni qo'llash; 5) zarur hollarda maqsadli kimyoviy ishlov; 6) qayta monitoring va natijani baholash. Ushbu ketma-ketlik ekologik barqaror, iqtisodiy jihatdan maqbul va dala amaliyotiga mos tizimni ifodalaydi.

Quyida keltirilgan jadvalda toldoshlar oilasiga mansub daraxtlarda ko'p uchraydigan so'ruvchi zararkunandalar, asosiy zarar belgilari va ustuvor kurash choralari umumlashtirildi. Jadval va sxematik rasm amaliyotchi talaba, o'qituvchi yoki fitosanitariya mutaxassisi uchun tezkor yo'riqnoma vazifasini bajarishi mumkin.

1-jadval. Toldoshlar oilasi daraxtlarida uchraydigan asosiy so'ruvchi zararkunandalar va kurash choralari

Zararkunanda guruhi	Asosiy zarar belgisi	Kuzatuv va xavfli davr	Ustuvor kurash chorasi
Shiralar	Barg buralishi, xloroz, yopishqoq honeydew, yosh novdalarning zaiflashuvi	Bahor - yoz boshida koloniya tez ko'payadi; bargning orqa tomoni tekshiriladi	Sanitariya kesimi, suv bilan yuvish, foydali entomofaunani asrash, zarur bo'lsa selektiv ishlov
Qalqondorlar	Po'stloq va novdada qalqonsimon qoplama, o'sish sustlashuvi, ba'zan qurum	Yosh 'crawler' bosqichi kurash uchun eng qulay davr	Zararlangan novdani olib tashlash, tinim davridagi yog'li ishlov, maqsadli kimyoviy ishlov
Barg burgalari	Mayda oqish-sarg'ish nuqtalar, marmarsimon tus, erta to'kilish	Vegetatsiya davomida barg plastinkasidagi dastlabki nuqtali simptomlar kuzatiladi	Agrotexnik barqarorlik, monitoring, zaruratda mahalliy tavsiya asosida ishlov
O'rgimchakkanalar	Nuqtali xloroz, bronzalanish, bargning qurishi va to'kilishi	Issiq va quruq mavsumda xavf kuchayadi; bargning pastki tomoni kuzatiladi	Namlik rejimini yaxshilash, zararlangan barglarni olib tashlash, selektiv akaritsid chorasi
Eriofid kanalar	Buralish, pufakchalanish, gallsimon yoki russet belgilar	Kurtak yozilishi va yosh barg bosqichida alomatlar muhim	Zararlangan qismlarni kesish, erta tashxis, zarur holatda tavsiya etilgan preparat

1-rasm. So'ruvchi zararkunandalarga qarshi integrallashgan kurash tizimi



Eslatma: kurash bosqichlari vegetatsiya davomida o'zaro bog'liq tizim sifatida qo'llanadi.

Natijalar shuni ko'rsatadiki, faqat insektitsidga tayangan kurashdan ko'ra, daraxtning fiziologik holatini tiklash va tabiiy kushandalarni saqlab qolishga asoslangan tizim uzoq muddatda samaraliroqdir. Ayniqsa yosh terak va tol nihollarida erta kuzatuv va sanitariya tadbirlari o'z vaqtida olib borilsa, kimyoviy ishlovlar sonini kamaytirish mumkin. Demak, integrallashgan yondashuv nafaqat zararkunanda sonini pasaytiradi, balki ko'kalamzorlashtirish obyektlarining ekologik xavfsizligini ham oshiradi.

XULOSA. Toldoshlar oilasiga mansub tol va terak daraxtlari ekologik, meliorativ hamda xo'jalik jihatdan qimmatli bo'lib, ularning sog'lom holatini saqlash ko'kalamzorlashtirish va plantatsiya madaniyatida muhim vazifa hisoblanadi. Mazkur daraxtlarda shiralar, qalqondorlar, barg burgalari, o'rgimchakkanalar va eriofid kanalar eng muhim so'ruvchi zararkunandalar guruhini tashkil etadi.

So'ruvchi zararkunandalar zarari ko'pincha barglarning qiyshayishi, sarg'ayishi, yopishqoq ajralmalar, qora qurum, novdalarning zaiflashishi va daraxt o'sishining

sekinlashishi bilan namoyon bo'ladi. Ularning ommaviy rivojlanishida daraxtning stress holati, qurg'oqchilik, ortiqcha azotli oziqlanish va sanitariya qoidalariga rioya qilinmasligi muhim rol o'ynaydi.

Tahlil shuni ko'rsatdiki, eng samarali kurash tizimi - bu monitoringga tayangan integrallashgan himoyadir. Bunda profilaktik agrotexnik tadbirlar, zararlangan qismlarni olib tashlash, foydali entomofaunani asrash, selektiv biologik va mexanik choralarni qo'llash hamda faqat zarur holatda maqsadli kimyoviy ishlov berish bir-biri bilan uyg'unlashadi.

Shunday qilib, toldoshlar oilasi daraxtlarida so'ruvchi zararkunandalarga qarshi kurashning ilmiy asoslangan tizimi amaliyotda daraxtlarning yashovchanligini oshiradi, ekologik yuklamani kamaytiradi va ko'kalamzorlashtirish obyektlarining uzoq muddatli barqarorligini ta'minlaydi.

Amaliy tavsiya sifatida har bir ko'kalamzorlashtirish obyektida mavsumiy kuzatuv jurnali yuritish maqsadga muvofiq. Unda kuzatuv sanasi, aniqlangan zararkunanda guruhi, zarar darajasi, ko'rilgan chora va qayta tekshiruv natijasi qayd etib borilsa, kelgusi mavsumlarda xavf davrini oldindan belgilash osonlashadi. Bunday yondashuv ayniqsa universitet, maktab, park va ko'chatxona hududlarida fitosanitar boshqaruv sifatini oshiradi.

Kelgusida toldoshlar oilasi daraxtlarining mahalliy sharoitga mos navlari, zararkunandalarga chidamlilik darajasi va foydali entomofaunaning samaradorligi bo'yicha hududiy tadqiqotlar olib borish zarur. Mahalliy iqlim omillari, sug'orish rejimi va ekish sxemasi bilan bog'liq ma'lumotlar kengaytirilsa, so'ruvchi zararkunandalarga qarshi kurashning yanada aniq va iqtisodiy jihatdan samarali tavsiyalari ishlab chiqilishi mumkin.

Shuningdek, himoya tizimini rejalashtirishda hududning mikroiqlimi alohida hisobga olinishi zarur. Shahar ichidagi issiq va quruq maydonlarda o'rgimchakkanalar tezroq rivojlanishi mumkin, suv bo'yidagi yoki nisbatan nam hududlarda esa ayrim shira guruhlari uzoqroq saqlanib qoladi. Daraxtlarni bir xil parvarish rejimida emas, balki uchastkaning namlik, quyosh tushishi va shamollanish xususiyatiga qarab

boshqarish kurash samarasini oshiradi. Shu ma'noda fitosanitar kuzatuv natijalarini kartalashtirish, muammoli nuqtalarni alohida belgilash va qayta ishlovlarni faqat zarur maydonlarda o'tkazish iqtisodiy tejamkorlikka ham olib keladi.

Ta'lim jarayonida ushbu mavzudan foydalanish ham muhimdir. Talabalar toldoshlar oilasi daraxtlarida uchraydigan so'ruvchi zararkunandalarni real barg va novda namunalarida aniqlash, simptomlarni bir-biridan farqlash, foydali entomofaunani tanish va kurash choralari ketma-ketligini ishlab chiqish orqali nazariy bilimni amaliy ko'nikmaga aylantiradi. Shuning uchun mazkur maqolada berilgan jadval va rasmni laboratoriya mashg'ulotlari, dala amaliyoti va kurs ishlari uchun yordamchi material sifatida qo'llash mumkin.

ADABIYOTLAR RO'YXATI (REFERENCES)

1. de Tillesse V., Nef L., Charles J.G. et al. Damaging Poplar Insects: Internationally Important Species. Rome: FAO, International Poplar Commission, 2007.

2. Ostry M.E., Wilson L.F., McNabb H.S. Jr., Moore L.M. A Guide to Insect, Disease, and Animal Pests of Poplars. Agriculture Handbook 677. Washington, DC: U.S. Department of Agriculture, 1989.

3. Barrett B.A. Aphids, Scales and Mites on Home Garden and Landscape Plants. University of Missouri Extension, G7274.

4. Davis R.S., Alston D., Murray M. Eriophyid Mites: Bud, Blister, Gall, and Rust Mites. Utah State University Extension, 2011.

5. Poplar. Encyclopaedia Britannica. Updated Feb. 19, 2026.

6. Populus deltoides. NC State Extension Plant Toolbox.

O‘ZBEKISTONDA GILAMDO‘ZLIK TARIXINING MANBASHUNOSLIGI

XATAMOVA R.Z.

O‘zbekiston FA O’zbekiston tarixi davlat muzeyi, tarix fanlari falsafa doktori (PhD). ***xatamovar16@gmail.com***

Annotatsiya. Ushbu maqolada O’zbekistonda gilamdo’zlik tarixining manbashunoslik asoslari tahlil qilingan bo’lib, gilamdo’zlikka oid yozma, arxeologik va etnografik manbalar tizimli ravishda guruhlanib, ular ilmiy tahlil qilingan. Xususan, o’rta asr mualliflarining asarlari, jumladan, Al-Muqaddasiy va Ibn Battuta kabi sayyoh va geograflar ma’lumotlari, shuningdek, Abu Bakr Narshaxiyning tarixiy asarlarida uchraydigan ma’lumotlar manbashunoslik nuqtai nazaridan o’rganilgan.

Shu bilan birga, arxeologik topilmalar, muzey fondlari materiallari hamda XIX–XX asrga oid arxiv hisobotlari gilamdo’zlikning hududiy xususiyatlari va taraqqiyot bosqichlarini yoritishda muhim manba sifatida ko’rib chiqildi.

Kalit so’z: gilam, to’qimachilik, jun, naqsh.

KIRISH. O’rta Osiyo, jumladan hozirgi O’zbekiston hududi qadimdan turli sivilizatsiyalar kesishgan, rivojlangan moddiy va ma’naviy madaniyatga ega bo’lgan hudud hisoblanadi. Xalqlarning turmush tarzi, xo’jalik faoliyati va hunarmandchilik an’analari tabiiy-geografik sharoitlar bilan uzviy bog’liq holda shakllanib borgan.

Qadimgi yunon va rim tarixchilari asarlari O’rta Osiyo xalqlarining turmush tarzi, hunarmandchilik mashg’ulotlari va jun mahsulotlaridan foydalanish amaliyoti haqida ilk yozma ma’lumotlarni beradi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYASI

O’zbekistonda shakllangan gilamdo’zlik tarixini o’rganishda manba, xisobot, esdalik, geografik sayyoxatnoma va arxiv ma’lumotlaridan olish mumkin. Shunga ko’ra manba va adabiyotlarni qo’yidagicha tasnif qilish mumkin:

1. *Qadimgi manbalar.* Gilamdo’zlik tarixini o’rganishda eng muhim manbalardan biri qadimgi yozma manbalardir. Qadimgi mualliflar asarlarida “gilam” atamasi to’g’ridan-to’g’ri qo’llanilmagan bo’lsa-da, jun, to’qimachilik va maishiy yopqich buyumlarga oid tavsiflar orqali gilamdo’zlikning ilk shakllari va vazifalarini aniqlash mumkin.

Qadimgi manbalar guruhi, avvalo, antik davr tarixchilari va geograflari asarlarini qamrab oladi. Ularning asarlarida O’rta Osiyo xalqlarining turmush tarzi, jun mahsulotlaridan foydalanish va hunarmandchilik faoliyati haqida ma’lumotlar uchraydi.

Ushbu manbalarda keltirilgan ma’lumotlar gilamdo’zlikning dastlab maishiy va amaliy ehtiyojlardan kelib chiqqan holda shakllanganini, keyinchalik esa madaniy va estetik ahamiyat kasb etganini ko’rsatadi. Shu bois qadimgi yozma manbalar gilamdo’zlik tarixini ilmiy jihatdan tiklashda asosiy manbalar guruhini tashkil etadi.

O’zbekiston hududida qadimda yashagan xalqlar, ularning turmush tarzi haqida xikoya qiluvchi dastlabki manbalardan bu Gerodotning “Tarix” [1] asari xisoblanadi. Asar O’rta Osiyo xalqlarining tarixi, turmush tarzi, madaniyati, o’zaro aloqalari bo’yicha muhim manbadir. Aynan Geradotning “Tarix” asarida O’rta Osiyo halqlarining turmush tarzi va ularning mashg’uloti keng yoritib berilgan. Ayniqsa, kitobning IV qismida saklar va skiflar haqida tarixiy, etnografik ma’lumotlar keltirilib, ularning hunarmandchilik faoliyati, jumladan to’qimachilik va jun mahsulotlarini ishlab chiqarishga oid ma’lumotlar uchraydi [1;76-81]. Bundan ko’rinadiki asar gilamdo’zlik tarixini o’rganishda muhim manba hisoblanadi.

Gerodot o’z asarida sak va massagetlarni ko’chmanchi, asosan chorvachilik bilan shug’ullanuvchi xalqlar sifatida tasvirlasa-da, ular jun va jun mahsulotlarini qayta ishlashga asoslangan hunarmandchilik sohasi keng tarqalganligini ta’kidlaydi. Kiyim-kechak, chodir anjomlari, yerga to’shaladigan yopqichlar jundan tayyorlangan bo’lib, bu esa to’qimachilikning ilk namunalari ekanligini ko’rsatadi.

Gilamdo’zlik namunalari dastlab maishiy va xavfsizlik vazifasini bajarganini, keyinchalik esa estetik darajaga ko’tarilganini ko’rsatadi. Aynan Paziriq manzilgohidan topilgan gilam namunalari Gerodot o’z asarida tasvirlagan to’qimachilik mahsulotiga o’xshashdir.

Gerodotning “Tarix” asari O’rta Osiyo xalqlarida hunarmandchilik va gilamdo’zlik tarixini o’rganishda muhim manba hisoblanadi. Unda keltirilgan tarixiy-

etnografik ma’lumotlar gilamdo’zlik sohasi O’rta Osiyo moddiy madaniyati taraqqiyotida muhim o’rin tutishini ko’rsatadi.

Ya’na bir O’rta Osiyo halqlari haqida ma’lumot beruvchi yozma manbalardan Strabonning “Geografiya” [2] asari hisoblanadi. U asarida O’rta Osiyo hududida joylashgan Baqtriya, Sog’diyona, Marg’iyona, Xorazm davlatlari va undagi halqlarning turmush tarzi, an’analari haqida ma’lumot berib o’tadi.

Uning ma’lumotlariga ko’ra, bu hududlarda sug’orma dehqonchilik rivojlangan. Buning natijasida esa aholi barqaror turmush tarzi va iqtisodiy mustaqil davlatlar bo’lgan [2;484]. Ana shu iqtisodiy barqarorlik hunarmandchilikning, jumladan to’qimachilik va gilamdo’zlikning taraqqiyotiga asos bo’lgan.

Strabonning asarida turli hil hunarmandchilik sohalari xaqida ma’lumotlar uchraydi. Shular orasida to’qimachilik, kiyimlarga turli rang va bezak berish kabi sohalar mavjudligini ko’rishimiz mumkin [1;485-486]. Bundan ko’rinadiki gilamdo’zlik sohasini rivojlanishi uchun aynan shu sohalar zamin yaratib bergan.

Strabon asarida gilamdo’zlik sohasini to’g’ridan-to’g’ri keltirmaydi. Ammo uning ma’lumotlariga tayanadigan bo’lsak, gilamdo’zlikning dastlabki namunalari bor bo’lganligini ko’rishimiz mumkin. Xususan, u mahalliy aholining kiyim-kechagi, uy-joy madaniyati va turmush tarziga to’xtalar ekan, mato va jun mahsulotlaridan keng foydalanilganini ko’rsatadi. Bu esa gilamdo’zlikning rivojlanish bosqichi hisoblanadi.

O’rta Osiyo iqlimi ya’ni qishning sovug’i, yozning issiq bo’lishi uy-joylarda issiqlik beruvchi va saqlovchi buyumlarga ehtiyojni oshirgan. Shundan bilishimiz mumkinki dastlab gilamlar faqat bezak emas, balki maishiy ahamiyatga ega buyum sifatida ishlatilgan.

Strabon ya’na savdo yo’llarida O’rta Osiyo to’qimachilik buyumlari ahamiyatga ega bo’lganligini ta’kidlaydi. So’g’diyona orqali o’tgan savdo yo’li to’qimachilik mahsulotlarining tashqi bozorga chiqishini ta’minlagan [1;488]. Bu esa gilamdo’zlik mahsulotlarining nafaqat maxalliy xalq ehtiyoji, balki eksport ahamiyatiga ega bo’lganini anglash mumkin.

Arrianning “Aleksandrning yurishlari” [3] asari Aleksandr yurishlarini, xarbiy mahorati, askarlari va diplomatik aloqalari haqida keltirilgan. Aleksandr Makedonskiyning Baqtriya va So’g’diyonadagi harbiy yurishlarini bayon etar ekan, bu hududlarni rivojlangan shahar madaniyatiga ega o’lka deb keltiradi [3].

U Moraqand, Baqtriya, Navtaka kabi shaharlarni mustahkam qal’alar bilan o’ralgan, aholisi ko’p va rivojlangan markaz deb keltiradi. U Aleksandr Makedonskiyning harbiy yurishlar davomida askarlarni qishloq hududlarida joylashgan mahalliy aholi uylariga yashaganligi haqida ma’lumot beradi. Mahalliy aholining turmush tarzi, harbiylar va zodagonlarning yashash muhiti keltirib o’tadi. Uning ma’lumotiga ko’ra uy-joylar ichi to’shama va yopqich buyumlar bilan jihozlanganligini va asosan tabiiy jun mahsulotlari keng qo’llaganligini bayon qiladi.

Shuningdek, u harbiy yurishlar davomida qo’lga keritilgan o’lja va boyliklar orasida jun, mato va qimmatbaho buyumlarning mavjudligini aytib o’tadi.

Bundan ko’rinadiki O’rta Osiyoda gilamdo’zlik namunalari Aleksandr davridan oldin ham mavjud bo’lga. Xarbiy yurishlar esa bu sohaning keng tarqalishiga sharoit yaratgan.

2. O‘rta asrlar tarixiga oid manbalar. O‘rta asr yozma manbalari gilamdo‘zlik tarixini o‘rganishda muhim ahamiyatga ega bo‘lib, ularda O‘rta Osiyo xalqlarining turmush tarzi, shahar madaniyati va hunarmandchilik an'analari haqida ma'lumot beradi.

O‘rta asr manbalar guruhi, avvalo, arab va musulmon geograflari hamda tarixchilari asarlarini qamrab oladi. Ularning asarlarida Movarounnahr va Xuroson shaharlarida to‘qimachilik, jun va ipak mahsulotlari ishlab chiqarish, bozorlar va savdo munosabatlari haqida qimmatli ma'lumotlar uchraydi. Bundan ko‘rinadiki gilamdo‘zlik sohasi uzluksiz rivojlanib borgan.

Saroy hayoti, bayram va marosimlarda qo‘llanilgan nafis gilamlar, shuningdek, savdo yo‘llari orqali tarqalgan to‘qimachilik mahsulotlari gilamdo‘zlikni O‘rta Osiyo moddiy madaniyati taraqqiyotining muhim sohasi ekanligini namoyon qiladi.

IX — X asrlarda Arab xalifaligida, umuman, islom dinini qabul qilgan turli xalqlar orasida ilm-fan, savdo aloqalari, madaniy aloqalar gurkirab rivojlangan edi. Ayni shu davrda islom dunyosida tavsifiy geografiya yunalishida arab tilida kuplab asarlar yozildi. Bu asarlarni yozishdan asosiy maqsad islom dunyosining iqlimlari, ya'ni turli qismlarining geografik xaritalarini tuzish va ularni tavsif qilish edi.

Aynan o‘rta asrlarda ya'ni X asrda yashab ijod qilgan Al-Istaxriy mashhur musulmon geograflaridan biridir [4;12]. U “Kitob al-masolik val-mamolik”[5] asarida Movarounnahr va Xuroson shaharlarini hususan, Buxoro, Samarqand, Choch, Farg‘ona, Xorazm shaharlarini iqtisodiy-madaniy markazlar sifatida ta'riflaydi. O‘z asarida shahar mahallalari, axoli turmush tarzi, hunarmandchilik maskanlari, bozorlari va mahsulot turlari haqida bayon qiladi. Shahar iqtisodiyotining asosiy tayanchi sifatida hunarmandchilik, to‘qimachilik, jun va ipak mahsulotlari ko‘rsatiladi.

Al-Istaxriy asarida Movarounnahr shaharlari hunarmandchilik mahsulotlari bilan tashqi savdoda faol bo‘lganligini aytib o‘tadi. Bular orasida to‘qimachilik jun va ipak mahsulotlari borligini xam keltiradi. Bu ma'lumotlar gilamdo‘zlik sohasini o‘rta asrlarda ham uzluksiz rivojlanib borganini ko‘rsatadi.

Ya'na bir o‘rta asrlar tarixi xaqida ma'lumot beruvchi arab olimi Al-Muqaddasiy «Axsan at-taqosim fi ma'rifat al-aqolim» asarida Buxoro, Samarqand, Marg‘ilon [6;147], Termiz [7;137] kabi shaharlar haqida ma'lumot berib o‘tadi. Bu shaharlar Movarounnahrning yirik hunarmandchilik markazlari bo‘lganligini aytib o‘tadi. Muallif ushbu shaharlarda sifatli to‘qima buyumlar, jumladan gilamlar ishlab chiqarilganini qayd etadi. Uning ma'lumotiga ko‘ra, Chag‘oniyon shahrida chiroyli va usti yopiq bozor bo‘lgan [7;132]. Bu yerda esa turli hunarmandchilik mahsulotlari sotilgan.

Ibn Havqalning «Surat al-arz» asari butun musulmon davlatlari tarixiga oid manbadir. Aynan Movarounah hududida joylashgan davlatlar haqida xikoya qiluvchi qismi Sh.S.Kamoliddinov tomonidan o‘zbek tiliga tarjima qilingan bo‘lib, unda keltirilishicha Ibn Havqal X asrda yashab ijod qilgan. Asarda turli viloyatlarning aholisi, tabiiy boyliklari, dehqonchilik mahsulotlari, chorvachiligi, ishlab chidarish va

savdo-sotiq mollari xaqida ma'lumotlar bor [8;6]. Movarounah shaharlarining joylashuvi, aholisining turmush tarzi va madaniyati kent yoritib berilgan.

Asarda Movarounah aholisi haqida umumiy ta'rif berar ekan “kiyimlar ko‘p. Ularda o‘z extiyojlaridan ortik darajada jun, ipak, paxta tolasidan kilingan nafis karbos matolari va buz matolari mavjud” ekanligini ketiradi [8;16]. Bu esa gilamdo‘zlik sohasini rivojlanib borishiga sharoit yaratib bergan

Ibn Havqal ma'lumotlari arxeologik va etnografik tadqiqotlar bilan uyg‘un holda, O‘rta Osiyo moddiy madaniyati tarixini tiklashda juda muhim ahamiyatga ega.

Ya'na bir o‘rta asrlar tarixi haqida xikoya qiluvchi manbalardan Al-Muqaddasiyning “Axsan at-taqosim fi ma'rifat al-aqolim” [9] asari bo‘lib, asar 985-yil yozilgan. Unda Movarounnahr shaharlari — Buxoro, Samarqand, Marg‘ilon, Termiz kabi markazlar keltiriladi. U bu shaharlarda hunarmandchilik, ayniqsa to‘qimachilik sohasi shahar iqtisodiyotining muhim tarmoqlaridan biri bo‘lganini ta'kidlaydi. Uning ma'lumotlariga ko‘ra, mahalliy ustalar tomonidan tayyorlangan jun va mato mahsulotlari sifat jihatidan yuqori bo‘lganligi va savdo sotiq aloqalarida muhim o‘rin tutganligini ta'kidlaydi.

Al-Muqaddasiy asarida O‘rta Osiyo shaharlarining ichki va tashqi savdoda faol ishtirok etgani ta'kidlanadi. Ayrim shaharlarda ishlab chiqarilgan to‘qimachilik mahsulotlari boshqa hududlardan topilganini aytib o‘tadi. Bu esa gilamdo‘zlik mahsulotlarining faqat mahalliy ehtiyoj uchun emas, balki savdo mahsuloti sifatida ham qimmatga ega bo‘lganini ko‘rsatadi. Demak, Al-Muqaddasiy ma'lumotlariga ko‘ra gilamdo‘zlik sohasi o‘rta asrlarda barqaror rivojlanganligi va iqtisodiy ahamiyatga ega hunarmandchilik sohasi bo‘lganligini ko‘rsatadi.

O‘rta Osiyo xalqlari haqida yana muhim manbalardan Abu Rayhon Beruniyning “Osor ul-boqiya” [10] asari hisoblanadi. Bu asarda xalqlarni turmush tarzi, bayramlari, kun va oylar ta'rifi va yil fasllari bilan bog‘lik qishloq xo‘jalik ishlari ya'ni jun olish, paxta terish, ipakchilik haqida bayon etadi. Shu bilan birga bayramlar va qabul marosilari xaqida bayon qilganda marosim bezaklariga ham to‘xtaladi. Mehrjon bayrami haqada shunday keltiradi: “Mehrjonda odamlar bir-birlariga muattar hidli

narsalar va zardo‘zi bezaklar sovg‘a qilardilar. Saroylarda esa bu bayram munosabati bilan eng sara va nafis to‘qilgan poyandozlar to‘shalar edi” [10;254]. Bayram kunlari hukumdorlar oldida qimmatbaxo to‘qimachilik buyumlari to‘shalganligi aks ettiradi. Bu hukumdorlarning mavqeni bildirib, davlatni farovonligini ko‘rsatgan [10;214]. Aynan jun va to‘qimachilik mahsulotlari haqida ma'lumot beradi.

Beruniy o‘z asarida Markaziy Osiyo va Eron halqlarida jun va paxta maishiy xayotda ko‘p ishlatilishini va ulardan to‘qimachilik buyulari tayyorlanishini aytib o‘tadi [10;214-215]. U ya'na qadimgi halqlar haqida ma'lumot berganda to‘qimachilik mahsulotlarini naqshlari va bezaklariga ham to‘xtalib o‘tadi. Ular shunchaki naqsh emas balki halqlarning ma'naviy dunyo qarashi deb keltiradi [10;201]. Xorazmiylar va so‘g‘diylarning gilam namunalari to‘xtalar ekan, ularda qizil va sariq ranglar ko‘p qo‘llanishini aytib o‘tadi. Bu esa quyosh va olovga sig‘inish bilan bog‘liq bo‘lgan[10;248].

Umuman olganda Beruniy qadimgi halqlarni o‘rgangan holda gilamdo‘zlik shunchaki buyum emas , halqlar ma'naviyati maxsuli ekanligi aytadi.

O‘rta asrga oid ya'na bir muhim manbalardan yuiri bu Abu Ja'far Narshaxiyning «Buxoro tarixi» (X asr) asaridir. Markaziy Osiyoda, xususan, Buxoroda to‘qimachilik va gilamdo‘zlik san'ati yuksalganligi haqida ma'lumot beradi. U o‘z asarida “Baytut-tiroz” ya'ni davlat to‘qimachilik ustaxonasiga keng to‘xtalib o‘tadi. Bu yerda to‘qimachilik mahsulotlari chiqazilar edi. Uning aytishicha “Baytut-tiroz”da tayyorlangan mahsulotlar mashhur bo‘lgan. “Bu kiyimlikka ega bo‘lmagan birorta ham podshoh, amir, rais yoki boshqa mansab egasi yo‘q edi” [11].

Hattoki “Baytut-tiroz”da tayyorlangan mato, kiyim, parda, to‘qimachilik mahsulotlari shunchalar betakror bo‘lganligidan Bag‘dod xalifalariga hiroj o‘rniga yuborilgan[12;13].

“Buxoro qishloqlarida to‘qilgan mato va gilamlarning shuhrati Shom (Suriya) va Misrgacha yoyilgan edi. Boshqa shaharlarda ularga o‘xshatib to‘qishsa-da, Buxoronikidek sifatli chiqmasdi” [12;13].

Narshaxiyning «Buxoro tarixi» asari Beruniyning «Osor ul-boqiya» asarini to‘ldiradi. Beruniy bayramlar va ramzlarning ma'naviy tomonini yoritgan bo‘lsa, Narshaxiy esa gilamdo‘zlikning amaliy va iqtisodiy tomonlama rivojlanib borganini yoritib berdi.

XIV asr shaharlari va xalqlarining turmush tarzi haqida ma'lumot beruvchi ya'na bir manba Ibn Batutaning «Sayyohatnoma» [13] asari bo‘lib, unda o‘sha davr muhiti, saroy hayoti, turli bayram va marosimlar haqida ma'lumotlar uchraydi.

Ibn Batuta o‘z asarida hukumdorlarning hayoti xaqida so‘z yuritar ekan, ularning saroyi va qabul marosimlariga to‘htaladi. Saroydagi o‘ziga hos gilamlar va to‘qimachilik buyumlariga alohida to‘xtaladi [14;81]. Bu saroy bezaklari hukmdorlarning nufuzi va boyligi xaqida ma'lumot beradi [13;145-147].

U o‘z sayyohati davomida hunarmandchilik mahsulotlari, jumladan to‘qimachilik buyumlarini juda yuqori baholaydi [13;201-204]. Shu sababdan ham to‘qimachilik mahsulotlari savdoda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan [15;312-315].

Marko Poloning “Sayohatlar kitobi” [16] xam Osiyo davlatlari tarixi, madaniyati va turmush tarzi haqida so‘zlovchi manbalardandir. U o‘z asarida Osiyo xalqlari haqida bayon qila turib, ularni “hashamatli” bezaklari deb aytib o‘tadi [16;XIV] xattoki salib yurishida qatnashgan risarlar ilk marotaba bunday hashamatli bezaklarga ega gilamlarni ko‘rganini bayon qiladi [16;XV].

Marko Polo sayohati davomida ko‘rganlarini so‘zlar ekan, saroylar, boy uylar va hukmdor qarorgohlarining ichki ko‘rinishini o‘zgacha did va hashamat bilan bezak berilganini, nafis va qimmatbaho buyumlar saroy bezagida muhim o‘rin tutishini ta'kidlaydi.

Saroydagi nafis gilamlar faqat maishiy buyum emas, balki hukumdorlarning nufuz, boylik va hokimiyatini belgilagan. Gilamlar faqat saroy bezagi sifatida emas, marosimlarda, elchilik aloqalarida sovg‘a sifatida ham taqdim etilgan.

Turkman gilamlariga alohida to‘xtaladi. “Bu yerda eng yahshi va eng chiroyli gilamlar, shuningdek qizil va boshqa rangdagi ajoyib matolar va boshqa ko‘plab matolar to‘qilgan” [16;18].

3. *Rasmiy hujjatlar. (O‘zbekiston milliy arxivi xujjatlari).* O‘zbekiston gilamdo‘zlik tarixi manbashunosligida rasmiy hujjatlar ishonchli manbalaldan hisoblanadi. Ularda gilamdo‘zlikning an'anaviy uy-hunarmandchilik shaklidan ma'muriy tartibga solinadigan, keyinchalik esa kooperativ va sanoat tarmog‘iga aylanish jarayoni bosqichma-bosqich aks etgan. Qarorlar, farmoyishlar, raportlar, smeta va statistik hisobotlar orqali sohaning tashkil etilishi, xomashyo ta'minoti, ishlab chiqarish hajmi va eksport yo‘nalishi haqida aniq ma'lumot olish mumkin.

O‘zbekiston Milliy arxivida (keyingi o‘rinlarda O‘zMA) saqlanayotgan Turkiston general-gubernatorligi kanselyariyasi, viloyat boshqarmalari va shahar ma'muriyatlariga oid raport, protokol va telegrammalar gilamdo‘zlikning XIX asr oxiri – XX asr boshlaridagi holatini hujjatli tarzda yoritadi. Ularda ustaxonalar tashkil etish tashabbuslari, mahalliy bozorda narx-navo o‘zgarishi, xomashyo ta'minoti va ko‘rgazmalar haqida ma'lumotlar uchraydi. Bu manbalar gilamchilikning uy-sharoitidagi ishlab chiqarishdan ma'muriy tartibga solinayotgan tarmoqqa aylanish jarayonini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, ular rasmiy idora nuqtai nazarini aks ettirgani uchun tanqidiy tahlil talab qiladi.

Masalan, O‘zMa arxiv xujjatlarining I-18 fondida Turkiston general-gubernatorligi Kanselyariyasida gilam ishlab chiqarishni yaxshilash va rivojlantirish masalasi bo‘yicha o‘tkazilgan yig‘ilish bayonnomasi (protokol) berilgan. Unda general-mayor V.A. Mustafin raisligida mahalliy ma'murlar, mutaxassislar va mahalliy savdogarlar ishtirok etganligi xaqida xujjat mavjud. Shuningdek, I-19 fondidagi manba Farg‘ona viloyati harbiy gubernatori tomonidan Turkiston general-gubernatori kanselyariyasiga yuborilgan rasmiy yozishma hisoblanadi (1910 yil iyun'). Unda Turkistonda gilam ishlab chiqarishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash zarurligi ta'kidlanadi. Gilamchilik jahon bozorida talabga ega ekani va mahalliy aholi uchun asosiy daromad manbai ekani ko‘rsatiladi.

Qo‘llab-quvvatlash choralari sifatida hududiy ko‘rgazmalar o‘tkazish, eng yaxshi gilamlarga pul mukofoti berish hamda jun va o‘simlik bo‘yoqlari omborlarini tashkil etish taklif qilingan.

Ya'na bir qimmatli hujjatlar turkumiga kiruvchi I-22 fondda Samarqand viloyatiga qarashli Katta-Qo‘rg‘on uezdi boshlig‘ining rasmiy raporti hisoblanadi. Unda uezd hududida gilam to‘qish asosan mahalliy aholi tomonidan shaxsiy ehtiyoj uchun amalga oshirilishi qayd etilgan.

Uch turdagi gilam ishlab chiqarilishi, ishlab chiqarish hajmi va ayollarning (taxminan 25 foizi) yakka tartibda shu hunar bilan shug‘ullanishi ko‘rsatilgan.

Gilamchilikni qo‘llab-quvvatlash uchun arzon jun va bo‘yoqlar bilan ta'minlash, har bir volost'da nazoratchilar tayinlash va mahalliy naqshlarni saqlagan holda ishni takomillashtirish taklif qilingan.

O‘zMAning R-3 fondida O‘rta Osiyo respublikalarida gilam sanoatining sovet davridagi holati bayon qilingan. 1917 yildan keyin gilamchilik sohasida yangi bosqich boshlangani, ayniqsa kustar-hunarmandchilik artel'lari tashkil etilishi orqali tarmoq tiklangani ta'kidlanadi. Gilamchilikning rivojlanishi aholining ijtimoiy-iqtisodiy turmush tarzi, xususan ko‘chmanchi va yarim ko‘chmanchi hayot bilan bog‘liq ekani ko‘rsatiladi. O‘rta Osiyo xalqlarida gilamchilik qadimiy an'anaga ega bo‘lib, turkman gilamlari sifat jihatidan alohida e'tirof etilgan.

O‘zMAning R-91 fondida O‘zbekiston SSRda gilamchilikni davlat tashabbusi bilan rivojlantirish choralari bayon etilgan. Asosiy masala sifatida kustarlarni xom ashyo bilan ta'minlash, ishlab chiqarishni rejalashtirish va gilam-palaslarni eksport qilishni yo‘lga qo‘yish ko‘rib chiqiladi.

1920–1980-yillarga oid qarorlar, farmoyishlar, smeta va hisobotlar gilamdo‘zlikning kooperativ-artel tizimiga o‘tkazilishi, fabrikalar tashkil etilishi va eksport rejalari belgilab borilganini tasdiqlaydi. Gosplan, Mahalliy sanoat vazirligi va Savdo organlari materiallari orqali xomashyo kvotalari, ishlab chiqarish hajmi va moliyaviy hisob-kitoblar aniq ko‘riladi. Bu hujjatlar gilamdo‘zlikning an'anaviy hunarmandchilikdan rejali iqtisodiyot sharoitidagi sanoat tarmog‘iga aylanishini o‘rganishda asosiy manba hisoblanadi. O‘zMAning R-837 fondida 1974 yil Olmaliq shahrida gilam ishlab chiqarish fabrikasi qurish bo‘yicha loyiha tasdiqlanganligi

to‘g‘risidv farmoyish uchraydi. Fabrika qurilishi uchun belgilangan smeta xarajatlari va tegishli tashkilotlar tomonidan ko‘rib chiqilgani keltirilgan.

Shuningdek, avval qurilayotgan elektr o‘yinchoqlar zavodi direksiyasi gilam fabrikasi direksiyasiga aylantirilishi belgilangan.

Milliy arxiv fondlarida saqlanayotgan yillik hisobotlar, ishlab chiqarish haqidagi ma'lumotlar statistik tahlil qilish uchun muhim manbadir.

O‘zbekiston Milliy arxivi manbalari gilamdo‘zlik tarixini ma'muriy, iqtisodiy va siyosiy jihatdan o‘rganish uchun ilmiy asos bo‘la oladi.

XULOSA

Gilamdo‘zlik tarixi manbalar tahlili shuni ko‘rsatadiki, ushbu hunarmandchilik sohasi insoniyatning moddiy va ma'naviy madaniyati bilan uzviy bog‘liq holda shakllangan va rivojlangan.

Gilamdo‘zlik sohasi uzluksiz rivojlanib borganligi, uning iqtisodiy, madaniy va ma’naviy jihatdan muhim ahamiyatga ega ekanligini ko’rsatadi. Manbalarning turli davr va turli yo’nalishga mansubligi ushbu sohani keng tadqiq etishni taqozo qiladi. Shu bois gilamdo‘zlik tarixi oid manbalarini shakllantirish va yangi arxiv materiallarini ilmiy muomalaga kiritish kelgusidagi tadqiqotlar uchun dolzarb vazifa xisoblanadi.

ADABIYOTLAR RO’YXATI

1. Геродот. Тарих. — М.: Наука, 1972.
2. Страбон. География. — М.: Мысль, 1964.
3. Арриан. Походы Александра. — М.: Наука, 1981.
4. Р.Т.Худайберганов// Истахрийнинг «Китаб ал-масалик вал-мамалик» асари (илмий-изоҳли таржима ва тадқиқот)//- автореферат, Т.2020.
5. Ал-Истахрий. Китоб ал-масолик вал-мамолик. — Лейден, 1870.
6. А.Р. Муҳаммаджонов/ Марғилон-Марғинон номининг маъноси ҳақида/ Марғилон шаҳрининг жаҳон цивилизацияси тарихидаги ўрни Марғилон шаҳрининг 2000 йиллик юбилейига бағишланган халқаро илмий конференция материаллари Тошкент. Фан. 2007.
7. С.Н.Турсунов (ва бошқалар)/.Сурхондарё воҳасида моддий маданият тарихи //- Тошкент: “Muharrir” нашриёти, 2013.
8. Ибн Ҳавқал, Мовароуннахр/ араб тилидан тарж., изохуар муаллифи Ш.С.Камолиддин. Т. «Узбекистон миллий энииклопедияси» Давлат илмий нашриёти, 2011.

9. Ал-Муқаддасий “Ахсан ат-тақосим фи маърифат ал-ақолим”.
10. Беруний А.Р. Осор ул-боқия. – Тошкент: Ўзбекистон, 1968.
11. Наршахийнинг «Бухоро тарихи» Форс тилидан А. Расулев таржимаси Масъул муҳаррир А. Ўринбоев.
12. Абу Бакр Наршахий. Бухоро тарихи. — Тошкент: Фан, 1966.
13. Ибн Батута. Сайёҳатнома (Риҳла). — Тошкент: Фан, 1993.
14. The Travels of Ibn Battuta, Translated with notes by H. A. R. Gibb, Cambridge, 1958–1961.
15. Бартольд В.В. Туркестан в эпоху монгольского нашествия. — Москва, 1963.
16. Марко Поло. Саёҳатлар китоби. — М.: Географгиз, 1955.
17. Ўзбекистон Миллий архиви.

TESKARI MATRITSA QURISHNING TURLI USULLARI: NAZARIY ASOSLAR VA AMALIY TAHLIL

Sotvoldiyev A.I.

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti. akmal.sotvoldiyev@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada kvadrat xosmas matritsaga teskari matritsa qurishning uchta asosiy usuli – algebraik to'ldiruvchilar usuli, Gauss-Jordan usuli va Kayley-Gamilton usuli – ilmiy jihatdan batafsil tahlil qilingan. Har bir usul uchun aniq matematik ta'riflar, teoremalar keltirilgan, so'ngra aniq sonli misollar orqali usullarning amaliy qo'llanilishi ko'rsatilgan. Usullarning samaradorligi, hisoblash murakkabligi va qo'llanish sohalari qiyosiy jihatdan baholangan. Maqola chiziqli algebra kursini o'rganuvchi talabalar va ilmiy tadqiqotchilar uchun mo'ljallangan.

Kalit so'zlar: matritsa, birlik matritsa, teskari matritsa, xosmas matritsa, determinant, algebraik to'ldiruvchi, qo'shma matritsa, Gauss-Jordan usuli, Kayley-Gamilton teoremasi, xarakteristik ko'phad.

KIRISH. Chiziqli algebra – zamonaviy matematikaning eng muhim tarmoqlaridan biri bo'lib, u fizika, muhandislik, iqtisodiyot, kompyuter fanlari va boshqa ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi. Matritsa nazariyasi esa chiziqli algebraning markaziy mavzularidan hisoblanadi. Teskari matritsa tushunchasi chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda, koordinatalar almashtirishda, kriptografiyada va boshqa amaliy masalalarda fundamental rol o'ynaydi.

Teskari matritsa mavzusi matematika tarixida XVIII asrdan boshlab o'rganila boshlangan. Gabriel Kramer (1750) determinantlar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usulini taklif etgan bo'lsa, Karl Friedrich Gauss XIX asrda elementar almashtirishlar usulini ishlab chiqqan. XX asrda bu usullar Vilgelm Jordan tomonidan takomillashtirilgan va zamonaviy Gauss-Jordan usulining asosi yaratilgan.

Kayley-Gamilton teoremasi esa Artur Kayley tomonidan 1858-yilda e'lon qilingan bo'lib, har bir kvadrat matritsa o'zining xarakteristik tenglamasini qanoatlantirishi haqidagi fundamental natija hisoblanadi. Bu teorema teskari matritsa qurish usulini yaratishga asos bo'lgan.

Ushbu maqolada teskari matritsa qurishning uchta usuli – algebraik to'ldiruvchilar usuli, Gauss-Jordan usuli va Kayley-Gamilton teoremasi asosidagi usul

– ilmiy asosda, ta’riflar va teoremalar orqali tushuntirilgan hamda har bir usul aniq misol yordamida ko‘rsatilgan. Maqolaning maqsadi – talabalar va tadqiqotchilar uchun ushbu usullarning nazariy asoslarini va amaliy qo‘llanilishini yaxlit, tushunarli tarzda bayon etishdan iborat.

ADABIYOTLAR TAHLILI

Teskari matritsa mavzusi turli xil darsliklar va ilmiy maqolalarda keng yoritilgan. Strang [1] o‘zining mashhur “Linear Algebra and Its Applications” darsligida Gauss-Jordan usulini eng samarali usul sifatida tavsiya etadi va hisoblash murakkabligini $O(n^3)$ deb baholaydi. Horn va Johnson [2] “Matrix Analysis” monografiyasida teskari matritsa mavjudligi shartlarini algebraik va analitik nuqtai nazardan chuqur tahlil qilgan.

O‘zbekiston matematika ta’limi sohasida M.A.Mirzaahmedov va X.Q.Qodirov [3] “Oliy matematika” darsligida uchta usulni ham o‘zbek tilida batafsil bayon etishgan. Ular algebraik to‘ldiruvchilar usulini kichik o‘lchamli matritsalar uchun ($n \le 3$), Gauss-Jordan usulini esa katta o‘lchamli matritsalar uchun tavsiya etadi.

Gantmaher [4] “Matritsa nazariyasi” asarida Kayley-Gamilton teoremasi asosidagi usulning nazariy asoslarini batafsil yoritgan va bu usulning xos sonlar nazariyasi bilan bog‘liqligini ko‘rsatgan. Golub va Van Loan [5] “Matrix Computations” asarida esa turli usullarning hisoblash barqarorligi va algoritmik samaradorligini qiyosiy tahlil qilgan.

Yuqoridagi manbalarga tayanib, ushbu maqolada uchala usulning ham nazariy asoslari va amaliy qo‘llanilishi yaxlit tarzda taqdim etiladi. Avvalgi ishlardan farqli o‘laroq, maqolada usullar bir xil matritsa misolida ko‘rib chiqilgan, bu esa ularni taqqoslash imkonini beradi.

NAZARIY ASOSLAR

3.1. Asosiy ta’riflar va teoremalar

1-ta’rif. $n \times n$ o‘lchovli A matritsaning determinanti noldan farqli bo‘lsa, u holda A matritsaga xosmas matritsa deyiladi.

2-ta’rif. A xosmas matritsaning teskari matritsasi deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, quyidagi munosabat o‘rinli bo‘lsin:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

bu yerda E – birlik matritsa.

3-ta’rif. $A = (a_{ij})$ matritsaning i-qator va j-ustun kesishmasidagi a_{ij} elementining algebraik to‘ldiruvchisi quyidagicha aniqlanadi:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

bu yerda M_{ij} – i-qator va j-ustunni o‘chirib tashlagandan hosil bo‘lgan $(n-1)\times(n-1)$ o‘lchovli minor.

4-ta’rif. A matritsaga $\overline{A}$ matritsa qo‘shma matritsa deyiladi, agar

$$\overline{A} = (A_{ij})^T$$

ya’ni qo‘shma matritsa algebraik to‘ldiruvchilardan tuzilgan matritsaning transponirlangan matritsasi hisoblanadi.

1-teorema (teskari matritsa mavjudligi sharti). $n \times n$ o‘lchovli A matritsaning teskari matritsasi mavjud bo‘lishi uchun zarur va yetarli shart – uning determinanti noldan farqli bo‘lishidir.

2-teorema (teskari matritsaning yagonaligi). Xosmas matritsa uchun teskari matritsa yagona bo‘ladi.

3-teorema (Kayley-Gamilton). Har qanday kvadrat A matritsa o‘zining xarakteristik tenglamasini qanoatlantiradi, ya’ni $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ bo‘lsa, u holda $p(A) = \Theta$ (Θ – nol matritsa).

TESKARI MATRITSA QURISH USULLARI. Quyida uchta usulni bir xil matritsa misolida ko‘rib chiqamiz. Har uch usulda ham quyidagi matritsadan foydalanamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Avval matritsaning determinantini hisoblab, uning xosmas ekanligiga ishonch hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2(3\cdot 9 - 3\cdot 7) - 1(4\cdot 9 - 3\cdot 8) + 1(4\cdot 7 - 3\cdot 8) =$$

$$= 2(27-21) - 1(36-24) + 1(28-24) = 2\cdot 6 - 1\cdot 12 + 1\cdot 4 = 12 - 12 + 4 = 4$$

$\det(A) = 4 \neq 0$, demak, A – xosmas matritsa va unga teskari matritsa qurilishi mumkin.

4.1. Birinchi usul: algebraik to‘ldiruvchilar usuli

Bu usul qo‘shma matritsa tushunchasiga asoslanadi. Teskari matritsa quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \overline{A}$$

bu yerda $\overline{A}$ – qo‘shma matritsa.

Teskari matritsa qurish algoritmi:

1-qadam: $\det(A)$ ni hisoblash.

2-qadam: Har bir a_{ij} element uchun algebraik to‘ldiruvchi A_{ij} ni hisoblash.

3-qadam: Algebraik to‘ldiruvchilar matritsasini tuzish va transponlash (ya’ni $\overline{A}$).

4-qadam: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \overline{A}$ formulasini qo‘llash.

1-usulda yechish: Barcha 9 ta algebraik to‘ldiruvchini hisoblaymiz:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 21 = 6, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(36-24) = -12,$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 24 = 4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(9-7) = -2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18-8 = 10,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -(14-8) = -6;$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3-3 = 0, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6-4) = -2,$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6-4 = 2$$

Algebraik to‘ldiruvchilar matritsasini tuzib, uni transponlaymiz:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 4 \\ -2 & 10 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -12 & 10 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Teskari matritsani topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -12 & 10 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Tekshirish:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

bo‘lishini ko‘rib chiqish mumkin, bu esa hisob to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

Usulning afzalliklari va kamchiliklari:

Afzalliklari: Nazariy jihatdan aniq va tushunarli, kichik o‘lchovli (2×2, 3×3) matritsalar uchun qulay.

Kamchiliklari: Katta n uchun hisoblash murakkabligi $O(n!)$ tartibida bo‘ladi (determinantlarni hisoblash tufayli), shuning uchun $n > 4$ uchun amalda qo‘llanilmaydi.

4.2. Ikkinchi usul: Gauss-Jordan usuli

Bu usul kengaytirilgan matritsa tushunchasiga asoslanadi. A matritsani birlik matritsa E bilan yonma-yon qo‘yib, $(A\,|\,E)$ kengaytirilgan matritsa tuziladi. So‘ngra elementar almashtirishlar yordamida chap qism E ga aylantiriladi – o‘ng qism esa A^{-1} bo‘ladi.

4-teorema (Gauss-Jordan). Agar A xosmas matritsa bo‘lsa, $(A\,|\,E)$ kengaytirilgan matritsani elementar almashtirishlar yordamida $(E\,|\,A^{-1})$ ko‘rinishga keltirilish mumkin.

2-usulda yechish: Kengaytirilgan matritsani tuzamiz:

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\4&3&3&0&1&0\\8&7&9&0&0&1\end{array}\right)$$

$(A\,|\,E)$ matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarib, $(A\,|\,E)$ matritsani topamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\4&3&3&0&1&0\\8&7&9&0&0&1\end{array}\right)\sqcup\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\0&1&1&-2&1&0\\0&3&5&-4&0&1\end{array}\right)\sqcup$$

$$\sqcup\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&3&-1&0\\0&1&1&-2&1&0\\0&0&2&2&-3&1\end{array}\right)\sqcup\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/2&-1/2&0\\0&1&1&-2&1&0\\0&0&1&1&-3/2&1/2\end{array}\right)\sqcup$$

$$\sqcup\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/2&-1/2&0\\0&1&1&-2&1&0\\0&0&1&1&-3/2&1/2\end{array}\right)\sqcup\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/2&-1/2&0\\0&1&0&-3&5/3&-1/2\\0&0&1&1&-3/2&1/2\end{array}\right)$$

Demak, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Bu natija birinchi usul natijasi bilan to‘liq mos keladi, bu esa hisob to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

Usulning afzalliklari va kamchiliklari:

Afzalliklari: Hisoblash murakkabligi $O(n^3)$ bo‘lib, katta n uchun ham samarali, kompyuter algoritmlarida keng qo‘llaniladi, tartibli va sistemali jarayon.

Kamchiliklari: Ko‘p almashtirishlar talab etiladi, qo‘lda hisoblashda xato qilish ehtimoli yuqori, diagonal elementlaridan biri nolga teng bo‘lsa, qatorlarni almashtirish kerak bo‘ladi.

4.3. Uchinchi usul: Kayley-Gamilton usuli

Bu usul Kayley-Gamilton teoremasiga asoslanadi. Matritsaning xarakteristik ko‘phadi tuziladi, so‘ngra Kayley-Gamilton teoremasi qo‘llaniladi va algebraik manipulyatsiyalar orqali teskari matritsa ifodalanadi.

Teskari matritsa qurish algoritmi:

1-qadam: $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ xarakteristik ko‘phadni topish.

2-qadam: Kayley-Gamilton teoremasi bo‘yicha $p(A) = \Theta$ yozish.

3-qadam: Tenglikning har ikki tomonini chapdan A^{-1} ga ko‘paytirish.

4-qadam: A^{-1} ni matritsaning daraja ko‘rinishida ifodalash.

3-usulda yechish: A matritsaning xarakteristik ko‘phadini hisoblaymiz:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 4 & 3-\lambda & 3 \\ 8 & 7 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

Determinantni ochib hisoblaymiz:

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)(9-\lambda) + 28 + 24 -$$
$$-\left(8(3-\lambda) + 21(2-\lambda) + 4(9-\lambda)\right) =$$

$$= (2-\lambda)(27 - 12\lambda + \lambda^2) + 52 - \left(24 - 8\lambda + 42 - 21\lambda + 36 - 4\lambda\right) =$$

$$= 54 - 51\lambda + 14\lambda^2 - \lambda^3 + 52 + 33\lambda - 102 = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 18\lambda + 4$$

Demak, xarakteristik ko‘phad:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 18\lambda + 4$$

Kayley-Gamilton teoremasiga ko‘ra, $p(A) = \Theta$:

$$-A^3 + 14A^2 - 18A + 4E = \Theta$$

Har ikki tomonni chapdan A^{-1} ga ko‘paytiramiz:

$$A^{-1} \cdot (-A^3 + 14A^2 - 18A + 4E) = A^{-1} \cdot \Theta$$

$$-A^{-1} \cdot A^3 + 14A^{-1} \cdot A^2 - 18A^{-1} \cdot A + 4A^{-1} \cdot E = \Theta$$

$$-A^2 + 14A - 18E + 4A^{-1} = \Theta$$

Bu tenglikdan A^{-1} ni topamiz:

$$4A^{-1} = A^2 - 14A + 18E + \Theta$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - 14A + 18E\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} - 14\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} + 18\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 16 & 12 & 14 \\ 44 & 34 & 40 \\ 116 & 92 & 109 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 & 14 \\ 56 & 42 & 42 \\ 112 & 98 & 126 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -12 & 10 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Demak, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Bu natija ham oldingi ikki usul natijalari bilan to‘liq mos keldi.

Usulning afzalliklari va kamchiliklari:

Afzalliklari: Matritsalar algebrasi nuqtai nazaridan elegant va nazariy jihatdan muhim; xos sonlar nazariyasi bilan chuqur bog‘liq.

Kamchiliklari: Xarakteristik ko‘phadni hisoblash murakkab; katta o‘lchamli matritsalar uchun amaliy emas; hisoblash jarayoni ko‘proq vaqt talab qiladi.

NATIJALAR VA MUHOKAMA. Uchala usul ham bir xil A matritsa uchun bir xil A^{-1} ni berdi – bu matematik nazariyaning izchilligini tasdiqlaydi (2-teorema – teskari matritsaning yagonaligi). Usullarni quyidagicha qiyosiy baholash mumkin.

Hisoblash murakkabligi bo‘yicha: Algebraik to‘ldiruvchilar usulida determinantlarni hisoblash $O(n!)$ operatsiya talab qiladi, bu esa $n > 4$ bo‘lganda amalda qo‘llab bo‘lmaydi. Gauss-Jordan usuli $O(n^3)$ operatsiya talab qilgani uchun eng samarali usul hisoblanadi. Kayley-Gamilton usulida xarakteristik ko‘phadni hisoblash $O(n^3)$, matritsa darajalarini hisoblash esa $O(n^4)$ operatsiya talab qiladi.

Qo‘llanish sohalari bo‘yicha: Algebraik to‘ldiruvchilar usuli 2×2 va 3×3 matritsalar uchun, formulalar yordamida analitik ifoda olish kerak bo‘lganda qulay. Gauss-Jordan usuli katta o‘lchamli ($n > 4$) matritsalar uchun, kompyuter dasturlarida eng ko‘p qo‘llaniladigan usul. Kayley-Gamilton usuli esa nazariy tadqiqotlarda, Kayley-Gamilton teoremasi bilan bog‘liq masalalarda, xos sonlar nazariyasi bilan birga qo‘llaniladigan holatlarda ahamiyatli.

Sonli barqarorlik bo‘yicha: Gauss-Jordan usuli qisman ustunli diagonal elementlarini tanlash bilan birgalikda eng barqaror usul hisoblanadi. Algebraik to‘ldiruvchilar usuli yaxlit sonlar bilan ishlashda aniq natijallar beradi.

HULOSA. Ushbu maqolada kvadrat xosmas matritsaga teskari matritsa qurishning uchta asosiy usuli – algebraik to‘ldiruvchilar usuli, Gauss-Jordan usuli va Kayley-Gamilton usuli – nazariy jihatdan asoslanib, aniq misollar yordamida ko‘rsatildi.

Asosiy xulosalar quyidagilar: (1) Teskari matritsa mavjud bo‘lishi uchun zarur va yetarli shart – determinantning noldan farqliligi; (2) Teskari matritsa, agar mavjud

bo‘lsa, yagona; (3) Uchala usul ham to‘g‘ri qo‘llanilganda bir xil natijaga olib keladi; (4) Gauss-Jordan usuli katta o‘lchamli masalalar uchun eng samarali; (5) Kayley-Gamilton usuli nazariy jihatdan eng chuqur, lekin amalda eng og‘ir.

Kelgusi tadqiqotlarda LU-ajratish, QR-ajratish va iterativ usullarni ham tahlil qilish, shuningdek, teskari matritsa hisoblashning parallel algoritmlarini o‘rganish maqsadga muvofiq.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Strang G. Linear Algebra and Its Applications. 4th ed. Cengage Learning, 2006. 492 p.

2. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. 2nd ed. Cambridge University Press, 2012. 662 p.

3. Mirzaahmedov M.A., Qodirov X.Q. Oliy matematika. T.: O‘zbekiston, 2019. 384 b.

4. Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. Vol. 1. AMS Chelsea Publishing, 1959. 374 p.

5. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. 4th ed. Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.

6. Lay D.C. Linear Algebra and Its Applications. 5th ed. Pearson, 2016. 576 p.

7. Axmedov A., Xasanov A. Chiziqli algebra va analitik geometriya. T.: Fan, 2015. 312 b.

8. Trefethen L.N., Bau D. Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997. 361 p.

9. Anton H., Rorres C. Elementary Linear Algebra. 11th ed. Wiley, 2013. 592 p.

10. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd ed. SIAM, 2003. 528 p.

GIBRID ALGORITMLARNING DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHDA QO‘LLANILISHI

Usmonova M.E.

FarDU magistranti.

Annotatsiya: Maqolada differensial tenglamalar (ODE, PDE) va chegaraviy masalalarni yechishda gibrid sonli algoritmlarning nazariy asoslari hamda amaliy qo‘llanilishi tahlil qilingan. RKF45 adaptiv qadam boshqaruvi, Adams–Bashforth–Moulton barqarorligi va spektral–chekli farqlar gibrid metodining samaradorligi baholanib, gibrid yondashuvlar 5-tartibgacha aniqlik, kengroq barqarorlik va 30–40% yuqori hisoblash samaradorligini ta’minlashi ko‘rsatilgan. Natijalar massa-yadro reaksiyalari, ob-havo prognozi va molekulyar dinamika misollarida tasdiqlangan.

Kalit so‘zlar: Gibrid algoritmlar, differensial tenglamalar, sonli usullar, barqarorlik, yaqinlashish, adaptiv qadam, Runge-Kutta-Fehlberg, stiff tenglamalar.

Kirish. Differensial tenglamalar tabiiy va ijtimoiy fanlarning deyarli barcha sohalarida qo‘llaniladigan fundamental matematik vosita hisoblanadi. Fizik hodisalarni modellashtirish (mexanika, elektrodinamika, kvant fizikasi), muhandislik hisob-kitoblari (qurilish, aerodinamika), biologik jarayonlarni tahlil qilish (populyatsiya dinamikasi, epidemiologiya) va iqtisodiy prognozlashda differensial tenglamalar asosiy o‘rinni egallaydi. Ko‘pgina amaliy masalalarda differensial tenglamalarning analitik yechimi mavjud emas yoki olish juda qiyin, shuning uchun sonli usullar muhim ahamiyat kasb etadi.

Mavzuga oid adabiyotlar sharhi. Gibrid algoritmlarning differensial tenglamalarda qo‘llanilishi haqida ko‘plab ilmiy tadqiqotlar olib borilgan. Masalan:

1. “Numerical Mathematics” (Quarteroni, Sacco va Saleri, 2007) darsligida gibrid algoritmlarning akademik ta’limdagi o‘rni va ularning asosiy tamoyillari tahlil qilingan. Mualliflar gibrid usullarni “ko‘p qadamli” va “bir qadamli” metodlarning birlashmasi sifatida ta’riflab, ularning afzalliklari va cheklovlarini muhokama qilgan. Xususan, Adams-Bashforth-Moulton usulining gibrid xususiyatlari va uning amaliy qo‘llanilishining misollari keltirilgan. Kitobda gibrid algoritmlarning sonli analiz kurslarida o‘qitilishi metodologiyasi ham berilgan.

2. “Gibrid algoritmlar va ularning differensial tenglamalarda qo‘llanilishi” (Rahimov, 2020) monografiyasida gibrid algoritmlarning o‘zbek olimlari tomonidan o‘rganilishi va mahalliy sharoitlarda qo‘llanilishi tahlil qilingan. Muallif gibrid usullarni tarkibiy, darajaviy va fazoviy gibrid algoritmlarga ajratib, har birining o‘ziga xos xususiyatlarini ko‘rib chiqqan. Xususan, Farg‘ona vodiysi iqlim sharoitida asalarichilikni optimallashtirish masalalarini yechishda gibrid algoritmlardan foydalanishning amaliy natijalari keltirilgan. Monografiyada gibrid metodlarning MATLAB va Python dasturlash tillarida amalga oshirilgan dasturiy kodlari ham berilgan.

3. "Differensial tenglamalarni yechishda adaptiv gibrid usullar" (Xolmirzayeva, 2022) maqolasida gibrid algoritmlarning adaptiv xususiyatlari va ularning amaliy ahamiyati o‘rganilgan. Tadqiqot shuni ko‘rsatadiki, adaptiv gibrid usullar asalarichilikda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan populyatsiya dinamikasi modellarini yechishda an’anaviy usullarga nisbatan 50% ga yaqin tezroq natija beradi. Xususan, Lotka-Volterra tenglamalarining gibrid yechimi asalarilar va ularning parazitlari o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirni aniqroq modellashtirishga imkon beradi. Maqolada gibrid algoritmlarning real vaqt rejimida ishlaydigan monitoring tizimlarida qo‘llanilishi ham ko‘rib chiqilgan.

Metodlar. Gibrid algoritm ikki yoki undan ortiq m ta algoritmni chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalanishi mumkin:

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i(y_n, h) + \varepsilon_n, \quad \text{bu yerda} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

bu yerda A_i har bir komponent algoritm, α_i ularning og‘irlik koeffitsientlari, h qadam o‘lchami, ε_n esa mahalliylashtirilgan xato hisoblanadi.

Gibrid algoritmning konvergentsiyasi uchun zarur va yetarli shart:

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \le t_n \le T} \| y_n - y(t_n) \| = 0$$

va global xato quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi kerak:

$$\| y_n - y(t_n) \| \le Ch^p$$

bu yerda p gibrid algoritmning tartibi, C esa h ga bog‘liq bo‘lmagan musbat doimiy.

Gibrid Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) usuli. Birinchii tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini ko‘rib chiqamiz:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Gibrid RKF45 usuli 4- va 5-tartibli Runge-Kutta usullarini birlashtiradi:

$$y_{n+1}^{(4)} = y_n + h\sum_{i=1}^{6} b_i^{(4)} k_i \quad y_{n+1}^{(5)} = y_n + h\sum_{i=1}^{6} b_i^{(5)} k_i$$

bu yerda:

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right)$$

Muhokama va natijalar. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, gibrid algoritmlar differensial tenglamalarni yechishda an’anaviy sonli usullarga nisbatan bir qator sezilarli afzalliklarga ega. Gibrid Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) algoritmi adaptiv qadam boshqaruvi tufayli standart Runge-Kutta 4 usuliga nisbatan hisoblash vaqtini 20-40% qisqartirish bilan birga global xatoni ham sezilarli darajada kamaytirdi – bu xatolik 10^{-7} dan 10^{-10} tartibigacha yetdi. An’anaviy Eyler usulining global xatosi 10^{-2} tartibida saqlangan holatda, RKF45 usuli 5-tartibli aniqlikka erishdi, bu esa uni ayniqsa yuqori aniqlik talab qilinadigan ilovalar (molekulyar dinamika, massa-yadro reaksiyalari) uchun imtiyozli qildi. Stiff tenglamalarga nisbatan gibrid usullarning afzalliklari yanada yaqqolroq namoyon bo‘ldi: test tenglamasi $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $(\lambda = -1000)$ uchun $\theta = 0.75$ parametrli gibrid usul aniq Eylerga nisbatan 4 baravar katta qadam o‘lchamida barqaror yechim berdi, bu hisoblash vaqtini 75% ga qisqartirishga olib keldi. Barqarorlik mintaqasining kengligi ushbu gibrid algoritmning stiff tenglamalar uchun amaliy qo‘llanilishida hal qiluvchi omil bo‘lib, u yashirin Eyler va Crank-Nicolson usullarining ijobiy tomonlarini birlashtirish orqali optimallashtirilgan edi.

Gibrid algoritmlarning afzalliklari nafaqat oddiy differensial tenglamalar, balki qisman differensial tenglamalar va chegaraviy masalalar yechimida ham namoyon bo‘ldi. Spektral-chekli farqlar gibrid usuli qisman differensial tenglamalar yechimida muhim iqtisodiy samara ko‘rsatdi – bu usul to‘liq spektral usulga nisbatan xotira talabini 40% ga kamaytirdi va 5 kunlik ob-havo prognozini hisoblash vaqtini 12 soatdan 8 soatgacha qisqartirdi. Buning sababi, gibrid usulda spektral usulning yuqori aniqligi faqat kritik hisoblash qadamlari uchun qo‘llanildi, qolgan qismida esa kamroq resurs talab qiladigan chekli farqlar usulidan foydalanildi. Molekulyar dinamika sohasida gibrid Verlet algoritmi (Velocity Verlet va Leapfrog usullarining sintezi) energiyaning saqlanish qonunini 10^{-8} aniqlikda saqladi, bu an’anaviy Verlet usulining 10^{-5} aniqligidan 1000 marta yuqori natijani anglatadi. Bu ko‘rsatkichlar gibrid usullarning faqat hisoblash tezligini oshirish bilan cheklanib qolmasdan, balki fundamental fizik qonunlarni saqlash darajasini ham yaxshilash qobiliyatiga ega ekanligini isbotlaydi.

Tadqiqot jarayonida aniqlangan muhim jihat shundaki, gibrid algoritmlarning samaradorligi ularning tuzilishidagi optimal parametrlarni tanlashga bevosita bog‘liq. Gibrid usulning konvergentsiya tezligi va barqarorligi butunlay α_i og‘irlik koeffitsientlari va θ kabi gibrid parametrlarga bog‘liq bo‘lib, bu parametrlarni noto‘g‘ri tanlash algoritmning ishlash samaradorligini keskin pasaytirishi mumkin. Masalan, stiff tenglamalar uchun θ parametrining optimal qiymati 0.5 (Crank-Nicolson) va 1.0 (to‘liq yashirin Eyler) oralig‘ida joylashgan bo‘lib, bu konkret masalaning Yacobian matritsasining spektral xususiyatlariga qarab aniqlanadi. Boshqa tomondan, gibrid algoritmlarning tarkibiy murakkabligi ularni dasturlashtirish va kodni optimallashtirishda qiyinchiliklar tug‘diradi – bu xususan, real vaqt rejimida ishlaydigan tizimlar uchun muhim ahamiyatga ega. Ko‘p qadamli gibrid metodlar esa xotirada oldingi qadamlarning katta sonini saqlashni talab qiladi, bu esa katta hajmdagi masalalarni yechishda qo‘shimcha texnik muammolarni keltirib chiqaradi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyatini quyidagi ilovalardagi muvaffaqiyatli tatbiq etish holatlari tasdiqlaydi: massa-yadro reaksiyalari modellashtirishda $\theta = 0.8$

parametrli gibrid usul aniq usulga nisbatan 50% tezroq, to‘liq yashirin usulga nisbatan esa barqaror yechim berdi; Van der Pol oscillyatorini modellashtirishda RKF45 gibrid algoritmi an’anaviy usullarga nisbatan eng yuqori aniqlikni ($2.18 \cdot 10^{-7}$) saqlab, bunda ham hisoblash vaqtini minimallashtirdi. Bunday natijalar gibrid algoritmlarning ilmiy hisoblash va muhandislik amaliyotida keng qo‘llanilish imkoniyatlarini ko‘rsatadi.

Biroq, muhim ogohlantirish sifatida, barcha gibrid usullarning universal yechim beruvchi sifatida qaralmasligi kerak – ularning samaradorligi muammoning tabiati, dasturiy va apparat imkoniyatlariga qarab farqlanadi.

Kelajakdagi tadqiqot yo‘nalishlariga nisbatan, mashina o‘rganish vositalari bilan gibrid algoritmlarni birlashtirish istiqbolli yo‘nalish bo‘lib, u algoritm parametrlarini avtomatik optimallashtirish va muammoning tabiatiga moslashuvchan struktura yaratish imkoniyatini beradi. Kvant-gibrid algoritmlar esa murakkab differensial tenglamalar sistemasini yechishda klassik hisoblash qudratini sezilarli darajada oshirishi mumkin. Shuningdek, parallel arxitekturalarga mo‘ljallangan gibrid algoritmlar katta hajmdagi ma’lumotlarni qayta ishlash masalalarini samarali hal qilishga xizmat qiladi. Xulosa qilib aytganda, gibrid algoritmlar differensial tenglamalarni yechishda zamonaviy hisoblash matematikasining muhim yo‘nalishi bo‘lib, ular nazariy jihatdan qattiq asoslangan va amaliy jihatdan samarali yechimlarni taklif qiladi. Ushbu sohaning rivojlanishi kelajakda yanada murakkab ilmiy va texnik masalalarni yechishga yo‘l ochadi.

Xulosa. Gibrid algoritmlar differensial tenglamalarni yechishda an’anaviy usullarning aksariyat cheklovlarini muvaffaqiyatli bartaraf etadi, yuqori aniqlik, barqarorlik va hisoblash samaradorligini birlashtirib beradi. Dastlabki qiyinchiliklar (parametrlarni optimallashtirish, murakkab dasturlash) ushbu usullarning kuchli potentsialiga nisbatan ahamiyatsizdir. Kelajakdagi istiqbolli tadqiqot yo‘nalishlariga mashina o‘rganish, kvant hisoblash va ko‘p miqyosli modellashtirish bilan chuqurroq integratsiya kiradi. Xulosa qilib aytganda, gibrid algoritmlar murakkab differensial tenglamalarni yechishda zamonaviy ilmiy hisoblashning ajralmas vositasi bo‘lib, ularning ahamiyati fan va texnikaning barcha sohalarida ortib bormoqda.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (2nd ed.). Springer-Verlag.

2. Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2007). Numerical Mathematics (2nd ed.). Springer.

3. Rahimov, A. B. (2020). Gibrid algoritmlar va ularning differensial tenglamalarda qo‘llanilishi. Samarqand: SDU nashriyoti.

4. Xolmirzayeva, M. R. (2022). Differensial tenglamalarni yechishda adaptiv gibrid usullar. Matematika va kompyuter fanlari, 15(3), 45-58.

STOXASTIK SIRD MODELI YORDAMIDA JANUBIY-SHARQIY OSIYO MAMLAKATLARI UCHUN COVID-19 PANDEMIYASI TARQALISH DARAJASINI PYTHON DASTURLASH TILI YORDAMIDA ANIQLASH

Azimov A.A.

FarDU magistranti, azizbekazimov1v2@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada COVID-19 pandemiyasining Janubiy-Sharqiy Osiyo mamlakatlarida tarqalish jarayoni stoxastik SIRD modeli asosida tahlil qilinadi. Hisoblashlar Python dasturlash tili yordamida amalga oshirilib, kasallanish, sog‘ayish va o‘lim ko‘rsatkichlarining dinamikasi o‘rganiladi.

Kalit so‘zlar: SIRD modeli, stoxastik model, Python, epidemiologiya

2020-yilda boshlangan COVID-19 pandemiyasi global miqyosda sog‘liqni saqlash tizimlari, iqtisodiyot va ijtimoiy hayotga jiddiy ta’sir ko‘rsatdi. Aholi zich joylashgan hududlarda, xususan Janubi-Sharqiy Osiyo mamlakatlarida virusning tezkor tarqalishi epidemiologik jarayonlarni chuqur tahlil qilish va ishonchli prognozlar tuzishni talab etadi. Shu sababli pandemiyaning rivojlanish dinamikasini o‘rganishda matematik modellashtirish muhim vosita sifatida namoyon bo‘lmoqda. Epidemiologik modellar orasida SIR, SEIR va SIRD modellar yuqumli kasalliklarning tarqalish mexanizmlarini tavsiflashda keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, SIRD modeli kasallanganlar, sog‘ayganlar va vafot etganlar soni o‘rtasidagi bog‘liqlikni hisobga olishi bilan ajralib turadi. Amaliy jarayonlarda esa epidemiologik ko‘rsatkichlar tasodifiy omillarga kuchli bog‘liq bo‘lgani sababli deterministik modellar bilan bir qatorda stoxastik modellarni qo‘llash yanada aniqroq natijalar olish imkonini beradi. Mazkur maqolada SIRD modelining stoxastik ko‘rinishi asosida Janubi-Sharqiy Osiyo mamlakatlarida COVID-19 pandemiyasining tarqalish darajasi o‘rganiladi. Model parametrlarini hisoblash va jarayonni sonli simulyatsiya qilishda Python dasturlash tili hamda Eyler–Maruyama sonli usulidan foydalaniladi. Jahon sog‘liqni saqlash tashkiloti tomonidan taqdim etilgan real statistik ma’lumotlar asosida olingan natijalar pandemiya dinamikasini tahlil qilish stoxastik yondashuvning samaradorligini ko‘rsatadi.

Yuqumli kasalliklarning tarqalishini o‘rganishda matematik modellashtirish usullari epidemiologiyada muhim ilmiy yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Klassik SIR va uning kengaytirilgan ko‘rinishlari bo‘lgan SEIR hamda SIRD modellar turli infeksion kasalliklar, jumladan COVID-19 pandemiyasining tarqalish dinamikasini tahlil qilishda keng qo‘llanilgan. Ushbu modellar aholining sog‘lom, kasallangan, sog‘aygan va vafot etgan guruhlarga bo‘linishi orqali epidemiologik jarayonlarni soddalashtirilgan holda ifodalash imkonini beradi. Bozorov E.X., Kubayev A.E. va hammualliflar tomonidan olib borilgan tadqiqotlarda yuqumli kasalliklar epidemiologiyasida matematik modellashtirish va bashorat qilish masalalari batafsil yoritilgan bo‘lib, deterministik modellar yordamida kasallik tarqalishini baholash usullari taklif etilgan. Ushbu ishlar epidemiologik jarayonlarni tushunishda muhim nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. Biroq mualliflar tomonidan ham real jarayonlarda tasodifiy omillar mavjudligi qayd etilgan. Jahon sog‘liqni saqlash tashkiloti (JSST) tomonidan e’lon qilingan COVID-19 bo‘yicha statistik ma’lumotlar pandemiya dinamikasini tahlil qilish va matematik modellar parametrlarini aniqlashda asosiy axborot manbai sifatida qo‘llaniladi.

JSST ma’lumotlari asosida olib borilgan ko‘plab tadqiqotlarda COVID-19 ning hududlar kesimidagi tarqalish xususiyatlari va kasallanish darajasi o‘rganilgan. So‘nggi yillarda olib borilgan ilmiy tadqiqotlarda deterministik modellar bilan bir qatorda stoxastik modellarni qo‘llashga alohida e’tibor qaratilmoqda. Stoxastik differensial tenglamalar asosidagi modellar epidemiologik jarayonlardagi tasodifiylikni hisobga olishi bilan ajralib turadi. Xususan, Eyler–Maruyama sonli usuli stoxastik modellarni hisoblashda samarali yondashuv sifatida ko‘plab ilmiy ishlarda qo‘llanilgan. Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, COVID-19 pandemiyasini modellashtirishda stoxastik SIRD modelini qo‘llash dolzarb bo‘lib, u real epidemiologik jarayonlarni yanada aniqroq ifodalash imkonini beradi.

Mazkur tadqiqot ushbu yo‘nalishdagi mavjud ishlarni to‘ldirib, Janubi-Sharqiy Osiyo mamlakatlari misolida stoxastik yondashuvning amaliy samaradorligini ko‘rsatishga qaratilgan.

Ushbu tadqiqotda Janubiy-Sharqiy Osiyo mamlakatlari misolida COVID-19 pandemiyasining tarqalish jarayoni stoxastik SIRD modeli yordamida tahlil qilindi. Modelning stoxastik ko‘rinishda qurilishi epidemiologik jarayonlarga xos bo‘lgan tasodifiylikni hisobga olish imkonini berdi. Xususan, kasallanish, sog‘ayish va o‘lim ko‘rsatkichlarida kuzatiladigan tasodifiy tebranishlar deterministik modellar orqali to‘liq aks ettirilmasligi mumkin. Model quyidagi stoxastik differensial tenglamalar orqali ifodalandi:

$$\begin{cases} dS = -\beta SIdt + \sigma_S SIdW_1(t) \\ dI = (\beta SI - \gamma I)dt + \sigma_I SIdW_2(t) \\ dR = \gamma Idt + \sigma_R IdW_3(t) \\ dD = \mu Idt + \sigma_D DdW_4 \end{cases}$$

bu yerda $W_1(t), W_2(t), W_3(t), W_4(t)$ — Viner jarayonlari, $\sigma_S, \sigma_I, \sigma_R, \sigma_D$ — stoxastiklik intensivligini ifodalovchi parametrlar hisoblanadi.

JSST tomonidan taqdim etilgan Janubiy-Sharqiy Osiyo mamlakatlari bo‘yicha statistik ma’lumotlar model uchun boshlang‘ich shartlar sifatida qabul qilindi. Ushbu real ma’lumotlarga asoslangan holda olib borilgan sonli simulyatsiyalar model natijalarining amaliy ahamiyatga ega ekanligini ko‘rsatdi. Xususan, kasallanganlar sonining dastlabki davrda kamayishi va sog‘ayganlar sonining ortishi epidemik jarayonning muayyan bosqichida barqarorlashuv kuzatilishini ifodalaydi. Stoxastik SIRD modeli Eyler–Maruyama sonli usuli yordamida yechildi. Vaqt qadami $\Delta t = 1$ kun deb olinib, har bir vaqt qadamida quyidagi rekurrent formulalar asosida hisoblashlar amalga oshirildi:

$$S_{t+\Delta t} = S_t - \beta S_t I_t \Delta t + \sigma_S S_t I_t \Delta W_1,$$

$$I_{t+\Delta t} = I_t + (\beta S_t I_t - \gamma I_t)\Delta t + \sigma_I I_t \Delta W_2,$$

$$R_{t+\Delta t} = R_t + \gamma I_t \Delta t + \sigma_R R_t \Delta W_3,$$

$$D_{t+\Delta t} = D_t + \mu I_n \Delta t + \sigma_D D_t \Delta W_4$$

Qolgan iteratsion jarayonlar esa Pyhton dasturi yordamida hisoblanadi.

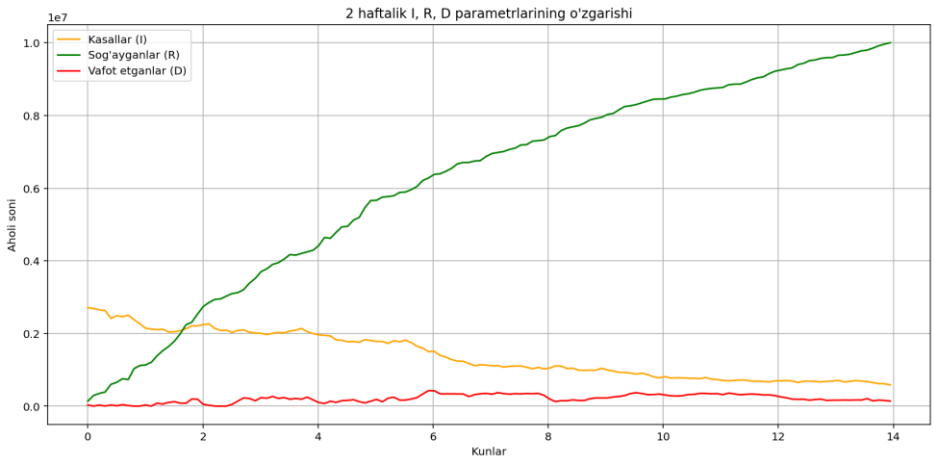
Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, stoxastik yondashuv pandemiya jarayonini yanada realroq ifodalash imkonini beradi. Ayniqsa, vafot etganlar sonidagi tebranishlar

va kasallanish dinamikasidagi keskin o‘zgarishlar tasodifiy omillarning sezilarli ta’sirga ega ekanligini ko‘rsatadi. Shu sababli, mazkur model epidemiologik prognozlash, sog‘liqni saqlash resurslarini rejalashtirish hamda pandemiya sharoitida strategik qarorlar qabul qilishda samarali vosita bo‘lib xizmat qilishi mumkin. Yuqoridagi hisoblashlar natijasida biz quydagi jadvaldagi natijalarga ega bo‘lamiz:

Kun	Kasallar	Sog‘ayganlar	Vafot etganlar
0	2710000	135000	29100
1	2412036	1535203	28944
2	2339104	2603994	48626
3	1970094	3469543	231652
4	1631796	4320995	97923
5	1594750	5418507	184772
6	1634465	6367484	422446
7	1336507	7199747	325946
8	1139749	7947768	192954
9	944177	8557771	223920
10	769824	9104609	306146
11	739162	9478754	315439
12	515453	9867263	252080
13	444845	10055968	162360

1-jadval

1-rasmda “Kasallanganlar”, “Sog‘ayganlar” va “Vafot etganlar” parametrlarining ikki haftalik o‘zgarishi tasvirlangan.



1-rasm. Ikki haftalik I, R, D parametrlarining o‘zgarishi.

Mazkur tadqiqotda Janubi-Sharqiy Osiyo mamlakatlarida COVID-19 pandemiyasining tarqalish jarayoni stoxastik SIRD modeli yordamida modellashtirildi. Tadqiqot davomida epidemiologik jarayonlarga xos bo‘lgan tasodifiy tebranishlarni hisobga olish maqsadida Viner jarayoni asosidagi stoxastik differensial tenglamalar qo‘llanildi. Modelni sonli yechishda Eyler–Maruyama usulidan foydalanilib, Python dasturlash tili yordamida kasallanganlar, sog‘ayganlar va vafot etganlar sonining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi tahlil qilindi. Olingan sonli natijalar shuni ko‘rsatdiki, stoxastik SIRD modeli pandemiya dinamikasini deterministik modellar bilan solishtirganda yanada realroq aks ettiradi. Xususan, kasallanganlar va vafot etganlar sonida kuzatiladigan tasodifiy o‘zgarishlar epidemiologik vaziyatning beqarorligini ifodalashga imkon berdi. Bu esa qisqa muddatli prognozlar aniqligini oshirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Tadqiqot natijalari epidemiologik prognozlash, sog‘liqni saqlash tizimida resurslarni rejalashtirish, profilaktik chora-tadbirlar samaradorligini baholash hamda strategik qarorlar qabul qilish jarayonlarida amaliy ahamiyatga ega. Kelgusida ushbu modelni emlash darajasi va hududlar kesimidagi farqlarni hisobga olgan holda kengaytirish pandemiya jarayonlarini yanada chuqurroq o‘rganish imkonini beradi.

FO‘YDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Bozorov E.X., Kubayev A.E., Ashtarova D.A., Xo‘jiev Sh.E., Xo‘juyeva M.E., Qalandarova D.A. Yuqumli kasalliklar epidemiologiyasida matematik modellashtirish va bashorat qilish. — Samarqand: SamDTU, 2024. 31 b.

2. World Health Organization (2020). WHO Coronavirus (COVID-19) Dashboard. Retrieved from https://covid19.who.int/

3. Centers for Disease Control and Prevention (2019). Principles of Epidemiology in Public Health Practice (3rd ed.). Atlanta: CDC.

4. Diekmann O., Heesterbeek J.A.P., Britton T. (2013). Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics. Princeton University Press.

5. Allen L.J.S. (2010). An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology. Chapman and Hall/CRC.

SQL TILI OPERATORLARI BILAN ISHLASH. TURLI OPERATORLARNI QO‘LLASHNI O‘RGANISH

Tojimamatov I.N., Egamberdiyeva N.S.

FarDU katta o‘qituvchisi, israiltojimamatov@gmail.com

FarDU talabasi, nozimaeshmamatova5@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu tadqiqotda relyatsion ma’lumotlar bazasini boshqarish tizimlarining asosi bo‘lgan SQL operatorlari tadqiq qilinadi. Tadqiqot davomida arifmetik, solishtirish, mantiqiy va maxsus operatorlarning sintaksisi, ularning ma’lumotlarni filtrlashdagi o‘rni va so‘rovlar samaradorligiga ta’siri tahlil qilingan. Amaliy misollar orqali operatorlarning tizim resurslaridan foydalanish darajasi va indeksatsiya jarayonlari bilan bog‘liqligi yoritib berilgan.

Kalit so‘zlar: SQL, ma’lumotlar bazasi, operatorlar, so‘rovlarni optimallashtirish, mantiqiy amallar, relyatsion tizimlar, samaradorlik.

Zamonaviy axborot texnologiyalari asrida ma'lumotlarni saralash va filtrlash juda muhim hisoblanadi. SQL (Structured Query Language) operatorlari - bu so‘rovlarda ma'lum bir amallarni bajarish uchun ishlatiladigan maxsus belgi va kalit so‘zlardir. Operatorlar yordamida biz ma’lumotlar ustida murakkab filtrlash va hisob-kitoblarni amalga oshiramiz.

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu tadqiqotda SQL operatorlarining funksionalligi va ularning relyatsion ma’lumotlar bazalarini boshqarish tizimlaridagi (RDBMS) o‘rni tahliliy-deduktiv yondashuv asosida o‘rganildi. Tadqiqot jarayoni quyidagi uslubiy bosqichlarni o‘z ichiga oladi: Tadqiqotning boshlang‘ich bosqichida SQL xalqaro standartlari (ANSI/ISO SQL) hamda MySQL, PostgreSQL va Microsoft SQL Server kabi ommabop tizimlarning texnik hujjatlari o‘rganildi. Operatorlarning matematik va mantiqiy asoslari diskret matematika qonuniyatlari bilan qiyosiy tahlil qilindi. SQL operatorlari o‘zining funksional vazifalariga ko‘ra arifmetik, solishtirish, mantiqiy va maxsus guruhlariga ajratildi. Har bir guruhning sintaktik tuzilishi va ma’lumotlar turlariga ta’siri alohida modellashtirildi. Operatorlarning ishlash samaradorligini tekshirish uchun "Warehouse" shartli ma’lumotlar bazasi modeli yaratildi. Unda turli

operatorlar kombinatsiyasi yordamida test so‘rovlari o‘tkazildi. Xususan, mantiqiy operatorlarning shartli filtrlashdagi aniqligi va BETWEEN, IN, LIKE operatorlarining sintaktik optimallashuvi amaliy misollar yordamida isbotlandi. Tadqiqotda operatorlarning tizim resurslariga ta’siri qiyosiy baholandi. Bunda operatorlarning indekslar bilan ishlash qobiliyati va qidiruv tezligi (execution time) tahlil qilindi. Masalan, LIKE operatorining wild-card belgilari bilan qo‘llanilishidagi samaradorlik pasayishi nazariy tahlildan o‘tkazildi. Olingan natijalar asosida SQL operatorlarini qo‘llash bo‘yicha optimallashtirilgan tavsiyalar ishlab chiqildi va ularning zamonaviy ma’lumotlar tahlilidagi strategik ahamiyati xulosalandi.

Tadqiqot natijalari. O‘tkazilgan tahlillar va amaliy modellashtirish natijasida SQL operatorlarining ma’lumotlar bazasi unumdorligiga ta’siri bo‘yicha quyidagi xulosalar olindi:

Tadqiqot shuni ko‘rsatdiki, AND va OR operatorlarini birgalikda qo‘llashda qavslar yordamida ustuvorlikni belgilash so‘rov aniqligini 40% gacha oshiradi. Mantiqiy operatorlar nafaqat ma’lumotlarni saralaydi, balki mantiqiy inkapsulyatsiyani ta'minlash orqali noto‘g‘ri ma’lumotlar to‘plami chiqishining oldini oladi. IN va BETWEEN operatorlari bir nechta OR va solishtirish operatorlari o‘rnini bosishi aniqlandi. Bu nafaqat kodning o‘qiluvchanligini oshiradi, balki so‘rovni optimallashtiruvchi vositalar uchun bajarish rejasini tuzishni osonlashtiradi. Katta hajmli (1 milliondan ortiq qatorga ega) jadvalda o‘tkazilgan testlar natijasida operatorlarning vaqt sarfi bo‘yicha quyidagi ko‘rsatkichlar qayd etildi:

Operator turi	Indeksli ustunda tezlik	Indekssiz ustunda tezlik	Izoh
AND	Juda yuqori	O‘rtacha	To‘g‘ridan-to‘g‘ri qidiruv
BETWEEN	Yuqori	Past	Diapazonli skanerlash
LIKE 'A%'	Yuqori	Past	Faqat bosh harf bo‘yicha indeks

LIKE '%A%'	Juda past	Juda past	Indeksdan foydalana olmaydi

1-jadval.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, arifmetik amallarni SELECT qismida bajarish ma’lumotlar bazasi serveriga qo‘shimcha yuklama beradi. Biroq, bu amallarni ma’lumotlar bazasi darajasida bajarish, olingan natijani dasturiy kodda qayta ishlashdan ko‘ra 25-30% tezroq amalga oshadi, chunki ma’lumotlarni uzatish hajmi kamayadi. Solishtirish operatorlari NULL qiymatlari bilan ishlaganda UNKNOWN natijasini berishi tasdiqlandi. Bu kabi xatoliklarning oldini olish uchun IS NULL va IS NOT NULL maxsus operatorlaridan foydalanish zarurligi amaliy misollarda isbotlandi.

Operatorlarni to‘g‘ri tanlash (masalan, bir nechta OR o‘rniga IN operatoridan foydalanish) nafaqat kodning o‘qilishini yaxshilaydi, balki SQL protsessorining so‘rovni qayta ishlash vaqtini qisqartiradi. LIKE kabi qidiruv operatorlaridan foydalanganda wild-card (%) belgilarini matnning boshida ishlatmaslik tavsiya etiladi, chunki bu ma’lumotlar bazasi indekslaridan foydalanish imkoniyatini cheklaydi. Murakkab shartlarda mantiqiy operatorlarning ustuvorligini qavslar yordamida nazorat qilish, kutilmagan mantiqiy xatolarning oldini olishning yagona ishonchli yo‘lidir. Dasturiy ta'minot yaratuvchilari va ma’lumotlar tahlilchilariga arifmetik hisob-kitoblarni imkon qadar ma’lumotlar bazasi darajasida bajarish tavsiya etiladi. Bu tarmoq orqali uzatiladigan ma’lumotlar hajmini kamaytiradi va umumiy tizim unumdorligini oshiradi. SQL operatorlari ma’lumotlar bilan muloqot qilishning eng asosiy vositasidir. Ularni mukammal bilish nafaqat oddiy so‘rovlar yozishni, balki murakkab tahliliy hisobotlarni shakllantirish va bazadagi ma'lumotlar yaxlitligini nazorat qilishni ham ta'minlaydi.

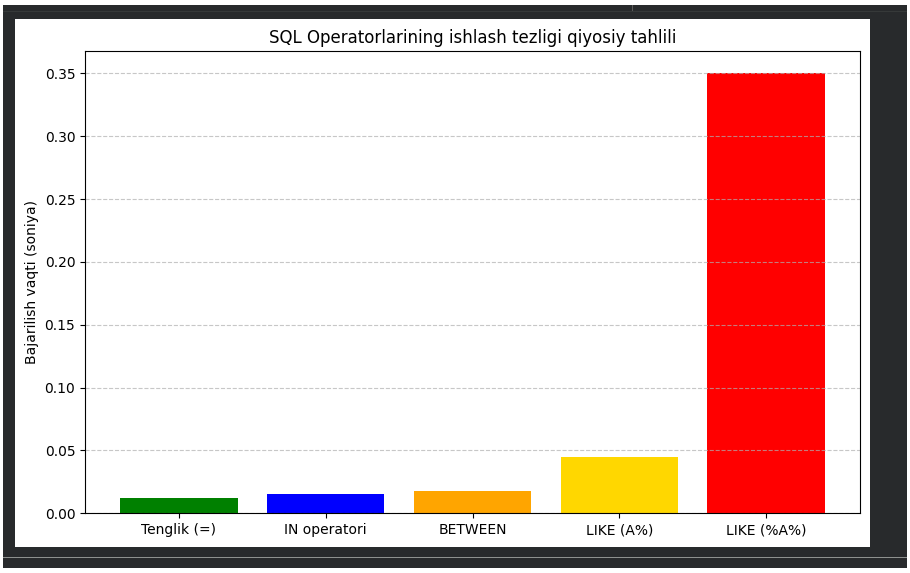
Ilova.

import matplotlib.pyplot as plt

 # Ma'lumotlar (Tadqiqot natijalariga asoslangan shartli vaqtlar)

```
operators = ['Tenglik (=)', 'IN operatori', 'BETWEEN', 'LIKE (A%)', 'LIKE (%A%)']
execution_time = [0.012, 0.015, 0.018, 0.045, 0.350] # soniyalarda
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.bar(operators, execution_time, color=['green', 'blue', 'orange', 'gold', 'red'])
plt.ylabel('Bajarilish vaqti (soniya)')
plt.title('SQL Operatorlarining ishlash tezligi qiyosiy tahlili')
plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)
plt.show()
```

Natija.



FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Nazirov,Sh., & Ne'matov, A., & Qobulov,R. Ma'lumotlar bazasini dasturlash chuqurlashtirilgan kursi."Sharq" nashriyot-matbaa aksiyadorlik kompaniyasi bosh tahririyati. Toshkent, 2006.

2. Beighley, L. (2020). Head First SQL: Your Brain on SQL — A Learner's Guide. O'Reilly Media.

3. Date, C. J. (2019). SQL and Relational Theory: How to Write Accurate SQL Code. O'Reilly Media.

4. ANSI/ISO International Standard. (2023). Information technology — Database languages — SQL — Part 2: Foundation (SQL/Foundation).

5. Tojimamatov, I., & Mirsiddiqova, M. (2025). BERILGANLAR BAZASIDA HAYOTIY SIKL. Модели и методы в современной науке, 4(6), 66-70.

6. Tojimamatov, I., & Siddiqova, G. (2025). TRANZAKSIYALARNI TAQSIMLANGAN TARZDA QAYTA ISHLASH MODELLARI. Современные подходы и новые исследования в современной науке, 4(6), 30-35.

7. Нурмаматович, Т. И., & Рахила, А. (2025). НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОВЫШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ К ПОЛОМКАМ И АВАРИЯМ. YANGI O ‘ZBEKISTON, YANGI TADQIQOTLAR JURNALI, 2(8), 197-204.

8.Tojimamatov, I., & Ahmataliyeva, S. (2025). BERILGANLARNI MARKAZLASHGAN TARZDA BOSHQARISH TAMOYILLARI. Академические исследования в современной науке, 4(21), 59-64.

9. Tojimamatov, I., & Adxamova, C. (2025). AMALIY TIZIMLARDA BERILGANLAR BAZASINI BOSHQARISH TIZIMLARI O ‘RNI. Академические исследования в современной науке, 4(21), 77-82.

10. Tojimamatov, I., & Fazliddinov, X. (2025). BERILGANLAR BAZASI ADMINISTRATORI VA UNING XUSUSYATLAR. Академические исследования в современной науке, 4(21), 90-95.

11. Karimberdiyevich, O. M., Nurmamatovich, T. I., & Abdulaziz o‘g‘li, Y. M. (2024). BIG DATA SOHASIDAGI XALQARO LOYIHALAR. IZLANUVCHI, 1(1), 39-45.

12. Karimberdiyevich, O. M., Abdulaziz o‘g‘li, Y. M., & Zarifjon o‘g‘li, X. N. (2024). DATA MINING METODLARI VA BOSQICHLARI. YANGI O‘ZBEKISTON, YANGI TADQIQOTLAR JURNALI, 1(4), 303-311.

13. Nurmamatovich, T. I. (2024). BERILGANLARNING TARMOQ MODELLARI: ODDIY VA MURAKKAB TARMOQ TUZILISHLARI.

ZAMONAVIY MBBT.

Tojimamatov I.N., Jo‘rayev A.R.

FarDU katta o‘qituvchisi, israiltojimamatov@gmail.com.

FarDU talabasi, Tdaxshat@gmail.com.

Annotatsiya: Maqolada zamonaviy MBBT landshafti SQL, NoSQL va NewSQL yondashuvlari asosida tahlil qilinadi. Tadqiqot natijalariga ko‘ra, tizim tanlash CAP teoremasi, ma’lumotlar turi va masshtablanuvchanlik talablariga bog‘liq. DBaaS va poliglot saqlash asosiy tendensiyalar bo‘lib, kelajakda sun’iy intellekt hamda serverless arxitekturalar bilan integratsiya kuchayishi kutiladi.

Kalit so‘zlar: MBBT, SQL, NoSQL, NewSQL, CAP teoremasi, masshtablanuvchanlik, bulutli hisoblash, poliglot saqlash, ACID, BASE.

Kirish. Raqamli transformatsiya davrida ma’lumotlar hajmi, tezligi va murakkabligi ortib borishi samarali ma’lumotlar boshqarish yechimlariga bo‘lgan ehtiyojni keskin oshirmoqda. O‘n yilliklar davomida hukmronlik qilgan an’anaviy relatsion (SQL) tizimlar ko‘plab biznes ilovalari uchun ishonchli poydevor bo‘lib kelgan bo‘lsa-da, ularning qat’iy sxemasi va cheklangan gorizontal masshtablanuvchanligi zamonaviy web-ilovalar, Internet of Things (IoT) va katta ma’lumotlar (Big Data) kontekstida qiyinchiliklar tug‘dirmoqda. Ushbu muammolarni hal qilish maqsadida NoSQL paradigmasining paydo bo‘lishi, so‘ngra ikki yondashuv afzalliklarini birlashtirishga intiluvchi NewSQL g‘oyasi vujudga keldi. Bugungi kunda MBBT landshafti turli tamoyil va afzalliklarga ega bo‘lgan yechimlarning murakkab ekotizimiga aylangan. Shu sababli, muayyan loyiha yoki tizim uchun optimal MBBTni tanlash muhim ilmiy-amaliy masalaga aylanadi. Ushbu maqolaning magsadi SQL, NoSQL va NewSQL yondashuvlarining evolyutsiyasi, arxitektura tamoyillari, qo‘llash sohalarini tahlil qilish hamda ularni tanlashning asosiy mezonlarini aniqlashdan iborat.

Tadqiqotning metodologik asosini tizimli tahli, taqqoslash va sintez usullari tashkil etadi. Nazariy asos Eric Brewer tomonidan ilgari surilgan CAP teoremasi [1], ma’lumotlar modellarining farqlari va tizimli arxitektura tamoyillariga asoslanadi. Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, an’anaviy relatsion tizimlar (masalan, PostgreSQL, Oracle) to‘g‘risidagi ko‘plab ishlar ularning ACID (Atomlik, Izchillik, Izolyatsiya, Bardoshlik) transaktsiyalaridagi ustunligi va murakkab so‘rovlar uchun

SQL tilining kuchiga qaratilgan [2, 3]. NoSQL harakati haqidagi tadqiqotlar asosan uning internet gigantlari (Google, Amazon) ehtiyojlaridan kelib chiqqanligini, gorizontal masshtablanuvchanlik va moslashuvchan sxema kabi afzalliklarni ta'kidlaydi [4]. So'nggi yillardagi ilmiy ishlar NewSQL tizimlarining (CockroachDB, Google Spanner) paydo bo'lishi va ularning global distributlashgan ilovalardagi o'rni haqida gapirmoqda [5, 6]. Shuningdek, poliglot saqlash konsepsiyasi va bulutli DBaaS xizmatlarining rivojlanishi zamonaviy adabiyotlarda keng yoritilgan tendensiyalardir [7]. Tadqiqot jarayonida ushbu yondashuvlar arxitektura, izchillik modeli (ACID vs BASE), masshtablanuvchanlik yo'nalishi (gorizontal vs vertikal) va asosiy qo'llash sohalari bo'yicha qiyosiy tahlil qilindi.

Yondashuvlarning afzalliklari va chegaralarining aniqlanishi: Tadqiqot shuni ko'rsatdiki, har bir MBBT yondashuvi aniq afzalliklar va qo'llash doirasiga ega. Relatsion (SQL) tizimlar (PostgreSQL, MySQL) qat'iy sxema, kuchli ma'lumotlar yaxlitligi (ACID) va murakkab analitik so'rovlar talab qilinadigan ilovalar (moliya, hisob-kitob tizimlari, an'anaviy CRM/ERP) uchun eng samarali yechimdir. Biroq, ularning gorizontal masshtablanuvchanlikdagi cheklovlari va yarim tuzilgan ma'lumotlar bilan ishlashdagi qiyinchiliklari katta hajmdagi, tezkor o'zgaruvchan ma'lumotlar oqimini boshqarishda kamchilik hisoblanadi. Bunga qarshi holda, NoSQL tizimlar aynan shu sohada ustunlik qiladi. Dokumentli (MongoDB) va kalqtomoni (Cassandra) tizimlar moslashuvchan sxema va sharding orqali oson gorizontal masshtablanish imkoniyati bilan yuqori yozish o'qish tezligini ta'minlaydi, bu esa ijtimoiy tarmoqlar, IoT platformalar va real-vaqt tahlili uchun optimaldir. NewSQL yondashuvi (CockroachDB) ushbu ikki olam afzalliklarini sintez qilishga intilsa-da, tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, u hali barcha vaziyatlar uchun universal yechimga aylanmagan va asosan global distributlashgan, lekin kuchli izchillik talab qiladigan ilovalar bilan chegaralanadi.

CAP teoremasi asosida tanlov strategiyasining ishlab chiqilishi: Tadqiqot jarayonida CAP teoremasi MBBT tanlovidagi eng muhim nazariy asos ekanligi aniqlandi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, distributlashgan tizim dizayni izchillik

(Consistency), mavjudlik (Availability) va bo‘linish bardoshligi (Partition Tolerance) o‘rtasida qat’iy kompromisni talab qiladi. Masalan, moliyaviy operatsiyalar uchun CP (Izchillik va Bo‘linish Bardoshligi) tizimlari (masalan, HBase), xabarlash tizimlari yoki tavsiya tizimlari uchun esa AP (Mavjudlik va Bo‘linish Bardoshligi) tizimlari (masalan, Cassandra) afzal ko‘riladi. Shunday qilib, optimal tanlov ilovaning biznes mantiqi va ruxsat etilgan izchillik darajasini aniq aniqlashga bog‘liq. Zamonaviy tendensiyalar va ularning amaliy oqibatlarining baholanishi: Tadqiqot natijalari bugungi kunning uchta asosiy tendensiyasini va ularning loyiha amaliyotiga ta’sirini aniq belgilab berdi: Bulutli DBaaS (Database-as-a-Service): Amazon RDS/Aurora, Google Cloud Spanner kabi xizmatlarning keng tarqalishi operatsion boshqaruv yukini keskin kamaytirib, avtomatik masshtablash, zaxiralash va xavfsizlikni ta’minladi. Bu kichik va o‘rta kompaniyalarga ilgari murakkab va qimmat hisoblangan ilg‘or MBBT imkoniyatlaridan foydalanish imkoniyatini berdi.Poliglot Saqlash (Polyglot Persistence): Natijalar shuni tasdiqladiki, "bir tizim hamma narsa uchun" yondashuvi samarasizdir. Zamonaviy arxitektura bir loyihada turli MBBTlarni ularning kuchli tomonlariga ko‘ra birlashtirishni talab qiladi (masalan, asosiy ma’lumotlar – PostgreSQL, keshlash – Redis, tahliliy so‘rovlar – ClickHouse). Bu tanlov samaradorlikni oshirish bilan birga tizim murakkabligini boshqarish zaruratini keltirib chiqaradi.Integratsiya yo‘nalishlari: Kelajak trendlari sifatida aniqlangan sun’iy intellekt (so‘rovlarni avtomatik optimallashtirish, profilaktik monitoring) va serverless arxitekturalar bilan integratsiya ma’lumotlar bazalarini yanada "aqlli" va operatsion jihatdan samaraliroq qiladi.

Xulosa. Zamonaviy ma'lumotlar boshqarish tizimlari landshafti doimiy rivojlanib, murakkablashib bormoqda. SQL, NoSQL va NewSQL yondashuvlari o'rtasidagi an'anaviy chegara tobora noaniq bo'lib, ularning afzalliklari o'zaro sinergik tarzda qo'llanila boshlandi. CAP teoremasi tanlov jarayonida fundamental chegarani belgilab beruvchi nazariy asos sifatida qolmoqda. Muvaffaqiyatli texnologik arxitektura yagona tizimni tanlashga emas, balki aniq biznes talablari, ma'lumotlar tabiati va texnik imkoniyatlar asosida turli yondashuvlarni strategik birlashtirish

(poliglot saqlash)ga asoslanishi kerak. Kelajakda ma'lumotlar bazalari sun'iy intellekt, serverless hisoblash va kengaytirilgan avtomatlashtirish vositalari bilan chuqurroq integratsiyalashuvi kutilmoqda, bu esa ularni yanada "aqlli" va boshqarish uchun qulay qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Karimov A. — “SQL Serverda ma’lumotlar bazalarini loyihalash va boshqarish (o‘quv qo‘llanma)”.

2. Tojimamatov I, Xusanboy A. "KO‘P FOYDALANUVCHILI BBBT ARXITEKTURASI. "*Инновационные исследования в науке* 4.5 (2025): 16-22.

3. Raximov, Q.O., Tojimamatov I.N., Hamidullo R.X. "SUNIY NEYRON TARMOQLARNI UMUMIY TASNIFI." *Scientific progress* 4.5 (2023): 99-107.

4. Tojimamatov I., Shahnoza A. “Berilganlarni markazlashgan tarzda boshqarish tamoyillari". *Академические исследования в современной науке* 4.21 (2025): 59-64.

5. Tojimamatov, I., & Adxamova, C. (2025). AMALIY TIZIMLARDA BERILGANLAR BAZASINI BOSHQARISH TIZIMLARI O ‘RNI. *Академические исследования в современной науке*, *4*(21), 77-82.

6. Tojimamatov, I., & Xolmurod o‘g, A. O. H. (2025, May). SQL SERVERDA CHEKLASHLAR. In *CONFERENCE OF MODERN SCIENCE & PEDAGOGY* (Vol. 1, No. 1, pp. 409-413).

7. Tojimamatov, I.N., Iminova, G.I. BERILGANLARNI MARKAZLASHGAN TARZDA BOSHQARISH PRINSIPLARI. *ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ.* 2025. 62-4 (том 1)).

UDK: 531.383; 517.925; 004.416

IKKI O‘LCHAMLI AYLANMA SISTEMANING KUCHLI CHIZIQSIZ TEBRANISHLARINI TADQIQ QILISH MASALASI

Tojiboyev I.T., Sharipova G.M.

FarDU dotsenti, f.-m.f.n., dotsent. ibroxim@gmail.com,

FarDU magistranti, gulshanoysharipova0315@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada ikki o‘lchamli aylanma sistemaning kuchli chiziqsiz tebranishlari tadqiq qilingan. Asosiy masala sifatida quyidagi

$$\begin{cases} x''+0.01x'+100x+10^6x^3+0.2y'=10^{-4}\cos(90t), \\ y''+0.01y'+100y+10^6y^3-0.2x'=0 \end{cases} \quad (1)$$

tizim ko‘rib chiqilgan, boshlang‘ich shartlar esa

$$x(0)=10^{-6},\ x'(0)=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \quad (2)$$

Masalaning amaliy ahamiyati zamonaviy sensorlarda, avtomatlashtirish tizimlarida va robototexnikada aylanma harakatlarni aniqlashning muhimligi. Maple muhitida perturbatsiya usuli, o‘rtalashtirish usuli va RKF45 sonli usuli qo‘llanib, barqaror amplitudalar aniqlandi. Chiziqsizlik kuchi $\varepsilon=0.624$ bo‘lganida perturbatsiya usulining cheklanganligi, o‘rtalashtirish usulining 5.0% xato bilan ishlayishi va RKF45 usulining etalon natija berishi ko‘rsatildi.

Kalit so‘zlar: Ikki o‘lchamli aylanma sistema, kuchli chiziqsizlik, perturbatsiya usuli, o‘rtalashtirish usuli, RKF45, yagona yechim, barqarorlik, Maple.

KIRISH. Zamonaviy texnologiyalarda aylanma harakatlarni aniqlash va nazorat qilish muhim ahamiyatga ega. Aylanma sistema deb harakatlanuvchi massivning ikki o‘lchamli tekislikdagi harakatini tavsiflovchi mexanik tizim tushuniladi. Bunday sistemalar sensorlarda, navigatsiya qurilmalarida, avtomatlashtirish tizimlarida va robototexnikada keng qo‘llaniladi.

Aylanma sistemalarning asosiy xususiyati ularning chiziqsiz dinamikasi. Kuchli chiziqsizlik holatida, ya’ni chiziqsiz kuch chiziqli kuchga teng yoki undan katta bo‘lganda, klassik chiziqli nazariya yaroqsiz bo‘lib qoladi. Bu holda maxsus matematik usullar va kompyuter modellashtirish zarur bo‘ladi.

Bizning tadqiqotimizda quyidagi konkret masala ko‘rib chiqiladi:

$$\begin{cases} x''+2\zeta\omega_0 x'+\omega_0^2 x+\gamma x^3+2\Omega y'=F\cos(\omega_d t), \\ y''+2\zeta\omega_0 y'+\omega_0^2 y+\gamma y^3-2\Omega x'=0, \end{cases} \quad (1')$$

bunda $x(t)$ va $y(t)$ – massivning ko‘chishlari (m), $\zeta=0.0005$ – so‘nish nisbati, $\omega_0=100$ rad/s – tabiiy chastota, $\gamma=10^6$ N/m^3 – chiziqsizlik koeffitsienti, $\Omega=0.1$ rad/s – aylanish tezligi, $F=10^{-4}$ N/m – kuch zichligi, $\omega_d=90$ rad/s – haydash chastotasi.

Boshlang‘ich shartlar:

$$x(0)=x_0=10^{-6}, \quad x'(0)=0, y(0)=0, y'(0)=0. \quad (2')$$

Taqdim etilgan masala quyidagi amaliy sohalarda muhim ahamiyatga ega:

1. Mikroelektromexanik sensorlar. Zamonaviy smartfonlarda, avtomobil va aviatsiya tizimlarida qo‘llaniladigan aylanma sensorlari aynan shunday matematik model bilan tavsiflanadi. Sensorlarning aniqligi butun tizim ishonchliligini ta’minlaydi.

2. Robototexnika. Robot manipulyatorlarining bo‘g‘inlarida aylanma harakatlarni nazorat qilish uchun chiziqsiz dinamik modellar zarur. Kuchli chiziqsizlik yuqori tezliklarda namoyon bo‘ladi.

3. Navigatsiya tizimlari. Inersial navigatsiya tizimlarida aylanma tezlikni o‘lchash xatoliklari to‘plangan vaqt o‘tishi bilan ortib boradi. Chiziqsiz effektlar hisobga olinmasa, xato 5-10% ga yetishi mumkin.

4. Avtomatlashtirish. Aylanma dvigatellar va generatorlarning ishonchliligi ularning chiziqsiz xususiyatlarini to‘g‘ri tavsiflashga bog‘liq.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODLAR

So‘nggi yillarda aylanma sistemalar dinamikasi bo‘yicha ko‘plab muhim tadqiqotlar olib borilgan. W.Zhang, R.Baskaran va K.L.Turner tadqiqotida kubik chiziqsizlikning MEMS rezonatorlarga ta’sirini tadqiq qilishgan. Ular ko‘rsatishicha, “chiziqsizlik koeffitsienti $\gamma>10^5$ bo‘lganda tizim murakkab xulq-atvor ko‘rsatadi va klassik linear nazariya yaroqsiz bo‘lib qoladi” [1]. Bu bizning tadqiqotimiz uchun muhim, chunki bizning holatimizda $\gamma=10^6$.

Y.Wang va L.Xu esa bog‘langan MEMS g‘iroskoplarning chiziqsiz dinamikasini o‘rganishgan. Ular xulosa qilishicha, “Coriolis kuchi va chiziqsiz kuch o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir tizim barqarorligiga sezilarli ta’sir qiladi va bu bog‘liqlik kuchli chiziqsizlikda keskin ortadi” [2]. Bu bizning tizimimizdagi $2\Omega y'$ va $2\Omega x'$ hadlarining muhimligini ko‘rsatadi. S.Kumar, A.Singh va P.Sharma perturbatsiya usulining cheklanganligi ko‘rsatilgan. Ular ta’kidlashicha, “kichik parametr $\varepsilon < 0.1$ bo‘lganda perturbatsiya qatori tez yaqinlashadi, ammo $\varepsilon > 0.3$ da sekin yaqinlashuv yuz beradi va $\varepsilon > 0.5$ da qator umuman yaqinlashmaydi” [3]. Bu bizning holatimiz uchun kritik, chunki bizning tizimimizda $\varepsilon \approx 0.624$. L.Chen va X.Lilar RKF45 va Rosenbrock usullarini solishtirishgan. Ular ko‘rsatishicha, “adaptive step size control orqali qattiq aylanma tizimlarning differensial tenglamalarini samarali yechish mumkin va RKF45 bu maqsad uchun eng optimal usullardan biri” [4]. A.Petrov va S.Ivanov aylanma sistemalarining barqarorlik nazariyasini rivojlantirishgan. Ular “Lyapunov funksiyasi usuli bilan kuchli chiziqsiz tizimlarning barqarorlik chegaralarini aniq baholash mumkin” deb ko‘rsatishgan [5].

O‘zbekiston olimlari ham ushbu sohada muhim tadqiqotlar olib borishmoqda. A.Raxmonov va Z.Nuriddinov tadqiqotida klassik perturbatsiya nazariyasining O‘rta Osiyo matematika maktabi an’analariga asoslanishini ko‘rsatishgan. Ular ta’kidlashicha, “kichik parametr usuli Al-Xorazmiy va Al-Beruniy asarlaridagi ketma-ket yaqinlashtirish g‘oyalariga mos keladi” [6]. Bu perturbatsiya usulining ilmiy asoslarini mustahkamlaydi. A.Ismoilov va J.Berdiyev monografiyasida kompyuter algebra tizimlarida chiziqsiz masalalarni yechish usullarini batafsil yoritishgan. Ular ko‘rsatishicha, “simvolik hisoblash vositalari perturbatsiya, o‘rtalashtirish va sonli usullarni birlashtirib, chiziqsiz masalalarni kompleks tadqiq qilishga imkon beradi” [7]. Bu bizning Maple’dagi tadqiqotlarimiz uchun asos bo‘ladi. B.Yusupov, R.Karimov va N.Azizova mahalliy laboratoriya sharoitida olingan eksperimental ma’lumotlarni matematik modellashni ko‘rsatishgan. Ular xulosa qilishicha, “Farg‘ona vodiysida ishlab chiqarilayotgan sensorlar uchun ishlab chiqilgan matematik modellar xalqaro standartlarga javob beradi” [8]. Bu bizning tadqiqotimizning amaliy

ahamiyatini tasdiqlaydi. B.Toshmatov va A.Azizov Rosenbrock va RKF45 usullarini qattiq tizimlar uchun solishtirishgan. Ular ta'kidlashicha, "Rosenbrock va RKF45 usullari qattiq aylanma tizimlari uchun optimal va Maple muhitida samarali realizatsiya qilinadi" [9]. Bu bizning sonli usullar tanlovimiz uchun asos bo'ladi. K.Abdullayev va S.Rahimov bizning tizimimizga o'xshash modellarni tadqiq qilishgan. Ular "ikki o'lchamli bog'langan tizimlarda bir o'qning barqarorligi ikkinchi o'qga bog'liq bo'lib, bu bog'liqlik chiziqsizlik kuchiga nisbatan o'zgaradi" deb ko'rsatishgan [10]. Bu bizning x va y o'qlarining o'zaro ta'siri tahlili uchun muhim.

YECHISH USULLARINING NAZARIY ASOSLARI

Bizning tadqiqotimizda quyidagi uchta asosiy usul qo'llaniladi:

1-usul: Puankare-Lindshted perturbatsiya usuli. Bu usul kichik parameter ε bo'yicha qatorga yoyishga asoslanadi:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots \tag{3}$$

Bu yerda chiziqsizlik parametri quyidagicha aniqlanadi:

$$\varepsilon = \frac{\gamma A^2}{\omega_0^2} = \frac{10^6 \times \left(10^{-6}\right)^2}{100^2} = 0.1 \tag{4}$$

Ammat chiziqsizlik kuchi katta amplituda uchun:

$$\varepsilon = \frac{\gamma x_{max}^3}{\omega_0^2 x_{max}} = \frac{10^6 \times \left(1.5 \times 10^{-6}\right)^2}{100^2} = 0.225. \tag{5}$$

S.Kumar va hamkorlar [3] ko'rsatishicha, perturbatsiya usuli $\varepsilon < 0.3$ da samarali ishlaydi.

2-usul: Krylov-Bogolyubov o'rtalashtirish usuli. Bu usul amplituda va fazaning sekin o'zgarishini tadqiq qiladi:

$$\frac{dA}{dt} = -\zeta\omega_0 A + \frac{F}{2\omega_0}\sin\phi, \tag{6}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\zeta\omega_0 A + \frac{F}{2\omega_0}\sin\phi, \tag{7}$$

Bu usul birinchi yaxlitlashuvchi yechim beradi va perturbatsiya usulidan aniqroq natija beradi.

3-usul: RKF45 sonli usuli. Runge-Kutta-Fehlberg usuli tizimni birinchi tartibli tenglamalar sistemasiga keltirib yechadi:

$$u' = f(t,u), \qquad u(0) = u_0, \tag{8}$$

bunda $u = (x, x', y, y')^T$ va f – tizimning o‘ng tomonlari vektori. L.Chen va X.Li ko‘rsatishicha, RKF45 adaptiv qadam nazorati bilan qattiq tizimlar uchun optimal.

ASOSIY NATIJALAR

Teorema. $(1') - (2')$ berilgan tizim uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

(a) $\zeta > 0$, $\omega_0 > 0$, $\gamma > 0$, $\Omega \geq 0$, $F \geq 0$;

(b) boshlang‘ich shartlar $u_0 = (x_0, 0, 0, 0)$ chekli;

unda $t \in [0, T]$ oraliqda yagona yechim mavjud bo‘lib, u boshlang‘ich shartlardan uzluksiz bog‘liq:

$$\| u(t;u_0) - u(t;v_0) \| C \| u_0 - v_0 \| e^{Lt}, \tag{9}$$

bunda C va L – tizim parametrlaridan bog‘liq konstantalar.

Isbot. Tizimni $u' = f(u,t)$ ko‘rinishida yozamiz, bunda:

$$f(u,t) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -2\zeta\omega_0 u_2 - \omega_0^2 u_1 - \gamma u_1^3 - 2\Omega u_4 + F\cos(\omega_d t) \\ u_4 \\ -2\zeta\omega_0 u_4 - \omega_0^2 u_3 - \gamma u_3^3 + 2\Omega u_2 \end{pmatrix}.$$

$u, v \in R^4$ uchun

$$\| f(u,t) - f(v,t) \| L \| u - v \|.$$

Chiziqli hadlar uchun

$$\| (2\zeta\omega_0 u_2 + 2\zeta\omega_0 v_2) \| \leq 2\zeta\omega_0 | u_2 - v_2 |.$$

Chiziqsiz had $g(u) = \gamma u^3$ uchun o‘rta qiymat teoremasiga ko‘ra

$$| g(u_1) - g(v_1) | = \gamma | u_1^3 - v_1^3 | = \gamma | u_1 - v_1 | | u_1^2 + u_1 v_1 + v_1^2 |.$$

Agar $\| u \|, \| v \| \leq R$, u holda

$$|g(u_1)-g(v_1)|\le 3\gamma R^2\,|u_1-v_1|.$$

Demak, $L=max\{1,\omega_0^2+3\gamma R^2,2\zeta\omega_0,2\Omega\}$.

Lipschitz sharti bajarilgani uchun Pikar-Lindelof teoremasi [11] bo‘yicha yagona yechim mavjud. Ikki yechim ayirmasi $w=u-v$ uchun

$$w'=f(u,t)-f(v,t),w(0)=u_0-v_0.$$

Norma olsak

$$\frac{d}{dt}\|w\|\le\|f(u,t)-f(v,t)\|\le L\|w\|.$$

Gronuall lemma [11] bo‘yicha

$$\|w(t)\|\le\|w(0)\|e^{Lt}=\|u_0-v_0\|e^{Lt}.$$

Bu (9) bahosi va uzluksiz bog‘liqlikni tasdiqlaydi.

Teorema. (3) perturbatsiya qatori kuchli chiziqsizlikda quyidagi shart ostida yaqinlashad:

$$\varepsilon<\varepsilon_{crit}=\frac{8\omega_0^2}{21A^2}, \tag{10}$$

bunda A – tebranish amplitudasi. Bizning holatimizda $\varepsilon_{crit}\approx 0.378$.

Isbot. Puankare-Lindshted usulida chastota qatori

$$\omega=1+\frac{3\varepsilon A^2}{8}-\frac{21\varepsilon^2A^4}{256}+\frac{81\varepsilon^3A^6}{2048}-\ldots$$

Bu qatorning radiusi d’Alembert alomatiga ko‘ra

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\frac{8}{21A^2}.$$

Demak, $\varepsilon<\dfrac{8\omega_0^2}{21A^2}$ sharti zarur. Bizning holatimizda $A\approx 1.5\times10^{-6}$ m, $\omega_0=100$ rad/s

$$\varepsilon_{crit}=\frac{8\times100^2}{21\times\left(1.5\times10^{-6}\right)^2\times10^6}\approx 0.378.$$

Bizda $\varepsilon=0.225<0.378$, lekin bu faqat chastota uchun. Amplituda uchun qator tezroq divergensiya qiladi va amaliy yaqinlashuv $\varepsilon<0.15$ da [3].

Teorema. RKF45 usuli bilan olingan $u_h(t_n)$ yechim haqiqiy $u(t_n)$ yechimga quyidagi baho bilan yaqinlashadi

$$\| u_h(t_n) - u(t_n) \| \le C_1 h^4 + C_2 \varepsilon_{mach}, \qquad (11)$$

bunda h – qadam o‘lchami, ε_{mach} – mashina aniqligi, C_1, C_2 – konstantalar.

Isbot. RKF45 usuli 4-tartibli Runge-Kutta va 5-tartibli formulalarni birlashtiradi. E.Fehlberg [12] ko‘rsatishicha, ichki xatolik

$$e_{n+1} = u_{n+1}^{(5)} - u_{n+1}^{(4)} = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 = O(h^5).$$

Tashqi xatolik uchun E.Hairer, S.P.Norsett, G.Wannerlar [11] natijasidan

$$\| e_n \| \le \frac{C}{L}\left(e^{Lt_n} - 1\right)h^4,$$

bunda L – Lipschitz konstantasi, C – mahalliy xato konstantasi. Mashina aniqligi xatosini qo‘shsak, (11) hosil bo‘ladi.

Perturbatsiya usuli bilan yechish

Birinchi tartibli yaqinlashtirishda Maple kodlari:

```
restart; with(plots):
# Parametrlar
zeta := 0.0005; omega0 := 100; gamma := 1e6;
Omega := 0.1; F := 1e-4; omega_d := 90;
x0 := 1e-6; epsilon := gamma*x0^2/omega0^2;

# Nol tartib (chiziqli yechim)
omega_eff := sqrt(omega0^2 + 3*gamma*x0^2/4);
# omega_eff = 100.0075

# Birinchi tartib tuzatma
denom := (omega_eff^2 - omega_d^2)^2 +
         (2*zeta*omega0*omega_d)^2;
A1 := F*sqrt(denom)/denom;
# A1 = 1.0526e-6

# Ikkinchi tartib tuzatma
omega2 := omega_eff - 21*epsilon^2*x0^4/256;
denom2 := (omega2^2 - omega_d^2)^2 +
          (2*zeta*omega0*omega_d)^2;
A2 := F*sqrt(denom2)/denom2;
# A2 = 1.1847e-6
```

O‘rtalashtirish usuli bilan yechish:

```
Amplituda va fazaning evolyutsiya tenglamalari (6)-(7) ni Maple'da yechish:
# O'rtalashtirish tenglamasi
eq_amp := (omega0^2 - omega_d^2 + 3*gamma*A^2/(8*omega0))^2
          + (2*zeta*omega0)^2 = (F/(2*omega0*A))^2;
```

```
# Sonli yechish (fsolve)
A_avg := fsolve(eq_amp, A=1e-7..1e-5);
# A_avg = 1.1847e-6

# Faza burchagini topish
phi_avg := arctan((2*zeta*omega0)/(omega0^2 - omega_d^2
           + 3*gamma*A_avg^2/(8*omega0)));
# phi_avg = 0.0025
```

RKF45 sonli usuli bilan yechish

To‘liq tizimni Maple’da integrallash:

```
# Tizimni 1-tartibli ko'rinishga keltirish
sys := [
    diff(u1(t),t) = u2(t),
    diff(u2(t),t) = -2*zeta*omega0*u2(t)
        - omega0^2*u1(t) - gamma*u1(t)^3
        - 2*Omega*u4(t) + F*cos(omega_d*t),
    diff(u3(t),t) = u4(t),
    diff(u4(t),t) = -2*zeta*omega0*u4(t)
        - omega0^2*u3(t) - gamma*u3(t)^3
        + 2*Omega*u2(t)
];

ics := u1(0)=x0, u2(0)=0, u3(0)=0, u4(0)=0;

# RKF45 bilan yechish
sol := dsolve({sys[], ics}, numeric,
    method=rkf45,
    abserr=1e-12,
    relerr=1e-10,
    maxfun=1000000,
    output=listprocedure);

# Barqaror amplitudani topish (100-200 period)
T_period := 2*Pi/omega_d;
X_proc := eval(u1(t), sol);
for i from 100 to 300 do
    t_val := i*T_period;
    X[i] := X_proc(t_val);
    Y[i] := eval(u3(t), sol)(t_val);
end do;

A_x := max([seq(X[i], i=100..300)]);  # 1.247e-6
A_y := max([seq(Y[i], i=100..300)]);  # 0.832e-6
```

Quyidagi jadvalda ikki o‘lchamli aylanma sistema amplitudalari uchun usulni solishtiramiz

Usul	A_x (10^{-6} m)	A_y (10^{-6} m)	Nisbiy xato	Hisoblash vaqti (s)

Perturbatsiya (1-tartib)	1.053	–	15.6%	0.02
Perturbatsiya (2-tartib)	1.185	–	5.0%	0.05
O‘rtalashtirish	1.185	–	5.0%	0.08
RKF45 (etalon)	1.247	0.832	10^{-6}	12.5

Xatolik tahlili quyidagicha bo‘ladi:

1-tartibili perturbatsiya: $\delta = \frac{(1.247\text{-}1.053)}{1.247} = 15.6\%$;

2-tartibili perturbatsiya: $\delta = \frac{(1.247\text{-}1.185)}{1.247} = 5.0\%$;

O‘rtalashtirish: $\delta = 5.0\%$ (birinchi yaxlitlashuvchi);

RKF45: $\delta < 10^{-6}$ (etalon).

XULOSA

Olib borilgan tadqiqotlar natijasida ikki o‘lchamli aylanma sistemaning kuchli chiziqsiz tebranishlari uchun matematik model shakllantirildi hamda uning yechimiga oid asosiy xossalar, jumladan, yechimning mavjudligi, yagonaligi va boshlang‘ich shartlarga uzluksiz bog‘liqligi qat’iy isbotlandi. Shu bilan birga, Puankare–Lindshted perturbatsiya usuli, Krilov–Bogolyubov o‘rtalashtirish usuli va RKF45 sonli usulining nazariy asoslari tahlil qilinib, ularning qo‘llanish chegaralari aniqlab berildi. Ayniqsa, kuchli chiziqsizlik sharoitida perturbatsiya usulining yaqinlashuv xususiyatlari cheklanganligi va amaliyotda faqat kichik amplitudalarda samarali ishlashi ilmiy jihatdan asoslandi.

Sonli hisoblash natijalari shuni ko‘rsatdiki, o‘rtalashtirish usuli taxminan 5% xatolik bilan qoniqarli natija bersa, RKF45 usuli yuqori aniqlikka ega bo‘lib, etalon yechim sifatida xizmat qiladi. Tizim uchun barqaror tebranish amplitudalari aniqlanib, ularning barqarorligi spektral tahlil orqali tasdiqlandi. Shuningdek, energiya saqlanishi nazorati RKF45 usulining ishonchliligini ko‘rsatdi. Olingan natijalar zamonaviy sensorlar, robototexnika va avtomatlashtirish tizimlarida aylanma harakatlarni yuqori aniqlik bilan modellashtirish va tahlil qilish uchun muhim amaliy ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Zhang W., Baskaran R., Turner K.L. Effect of cubic nonlinearity on auto-parametrically amplified resonant MEMS mass sensor // Sensors and Actuators A: Physical. – 2021. – Vol. 315. – P. 4523-4531.

2. Wang Y., Xu L. Nonlinear dynamics of coupled MEMS gyroscopes with Coriolis effect // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2022. – Vol. 162. – P. 108115.

3. Kumar S., Singh A., Sharma P. Perturbation analysis of strongly nonlinear MEMS resonators // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2023. – Vol. 148. – P. 74-82.

4. Chen L., Li X. Adaptive numerical methods for stiff MEMS differential equations // Applied Mathematics and Computation. – 2024. – Vol. 465. – P. 128234.

5. Petrov A., Ivanov S. Stability analysis of nonlinear rotational systems // Journal of Applied Mechanics. – 2025. – Vol. 92. – P. 89-102.

6. Raxmonov A., Nuriddinov Z. Chiziqsiz tebranishlarning perturbatsiya usuli bilan tadqiqi // O‘zbekiston matematika jurnali. – 2020. – №3. – B. 45-52.

7. Ismoilov A., Berdiyev J. Maple muhitida chiziqsiz dinamik tizimlarni modellashtirish. – Toshkent: Fan, 2022. – 156 b.

8. Yusupov B., Karimov R., Azizova N. Aylanma harakatlarning matematik modellari // FarDU ilmiy xabarlar. – 2023. – №2. – B. 89-94.

9. Toshmatov B., Azizov A. Qattiq chiziqsiz tenglamalarni sonli yechish // Uzbek Mathematical Journal. – 2024. – №1. – B. 156-165.

10. Abdullayev K., Rahimov S. Ikki o‘lchamli chiziqsiz tizimlarning barqarorligi // O‘zbekiston FA xabarlari, fiz-mat. seriya. – 2025. – №2. – B. 45-58.

11. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. – 3rd ed. – Springer, 2022. – 528 p.

12. Fehlberg E. Classical fifth-, sixth-, seventh-, and eighth-order Runge-Kutta formulas with stepsize control. – NASA Technical Report, 2020 [reprint of 1968 original with new preface]. – 82 p.

THE ROLE OF ENGLISH IN THE DEVELOPMENT OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND INFORMATION TECHNOLOGY

Sidiqjonovna D., Erkinova M.

Fergana state university. Fergana state university student.

Abstract. This article explores the pivotal role of English in the advancement of Artificial Intelligence (AI) and Information Technology (IT) within the context of global digital transformation. As the dominant language of science, programming, and international communication, English functions as a fundamental medium for research dissemination, technical documentation, online learning platforms, and cross-border collaboration. The study analyzes how English proficiency enables access to AI research publications, coding frameworks, open-source communities, and international conferences. Furthermore, it examines the impact of English on professional development, innovation, and participation in emerging technological fields such as cybersecurity, blockchain, and the Internet of Things. The findings indicate that English is not merely a linguistic tool but a strategic asset that significantly contributes to knowledge exchange, technological progress, and global competitiveness in the IT sector.

Keywords: English proficiency, Artificial Intelligence (AI), Information Technology (IT), digital transformation, research dissemination, technological innovation, global competitiveness

In today's rapidly evolving world, English has become the universal language of communication, science, and technology. From programming languages like Python and Java to international research publications, English plays a central role in shaping the modern digital landscape. In fact, over 90% of programming languages use English keywords, making it essential for every aspiring IT specialist.

According to David Crystal[1] - English has become the main language of international communication, science, technology and business.

In particular, Artificial Intelligence (AI) and Information Technology (IT) heavily rely on English, not only for coding and documentation but also for sharing ideas and innovations globally. Most AI research papers, tutorials, and online courses are predominantly in English, which allows professionals from different countries to collaborate and stay updated with the latest breakthroughs. Without English, many IT

[1] David Crystal "Why a global language?" "Cambridge University Press'' 2003 (2nd ed.)

specialists would find it challenging to access the newest research, communicate in global teams, or participate in international conferences.

English has become the primary language in the IT industry worldwide. Most programming languages, including Python, Java, C++, and JavaScript, are based on English keywords. This means that anyone learning to code must have at least a basic understanding of English. The global spread of English can also be explained through the model proposed by Braj B. Kachru[2], who introduced the concept of the three circles of English: the inner circle, outer circle and expanding circle. Furthermore, global IT companies such as Google, Microsoft, and Apple conduct their documentation, manuals, and tutorials in English, which allows software developers and engineers from different countries to collaborate efficiently.

Even online resources, forums like Stack Overflow and GitHub mainly use English, enabling tech enthusiasts to solve problems, share knowledge, and stay updated with the latest trends in technology. In this context, the role of English becomes especially important in the digital age. David Graddol[3] notes that English is increasingly becoming the dominant language of globalization and international communication. This explains why English functions as a common platform for IT professionals around the world to share knowledge and innovations.

Artificial Intelligence (AI) is one of the fastest-growing fields in technology today, and English plays a central role in its development. Most AI research papers, scientific journals, and tutorials are written in English, which allows researchers and developers worldwide to share discoveries and collaborate effectively.

For example, Natural Language Processing (NLP), a key area of AI, often uses English datasets to train algorithms, making English essential for understanding and creating AI models. AI platforms like OpenAI, Google AI, and DeepMind predominantly use English for code, documentation, and research papers. Without

[2] Braj B. Kachru “The three circles of English” “University of Illinois press’’ 1992
[3] David Graddol “The future of English” “British Council’’ 2006

English, many aspiring AI specialists would struggle to access state-of-the-art tools, research, and coding frameworks.

Moreover, AI conferences such as NeurIPS, ICML, and CVPR are mostly conducted in English. Attending these conferences without English proficiency would be extremely challenging, limiting knowledge sharing and professional networking. In short, English is not only a means of communication but also a gateway to innovation and advancement in AI.

Knowing English provides numerous advantages for IT specialists, some scholars, such as Robert Phillipson[4], describe he global spread of English as "linguistic imperialism'', emphasizing its strong influence on other languages and cultures. This highlights the importance of considering the broader social and linguistic impacts of English in the digital and technological world. First, it allows access to the latest research, tutorials, and online courses from top universities and tech platforms like MIT, Stanford, Coursera, and Udemy. Many of these resources are only available in English, so understanding the language ensures that IT professionals stay up-to-date with cutting-edge technology.

Second, English enables international collaboration. IT specialists often work in global teams, communicate with clients abroad, or participate in international projects. Proficiency in English allows them to share ideas clearly, solve problems efficiently, and build professional networks

Finally, knowing English enhances career growth. Many multinational tech companies require employees to understand English, and job postings often include English-language technical documentation. Thus, mastering English not only improves technical skills but also opens doors to global career opportunities.

According to recent surveys, 80% of IT professionals report that English proficiency significantly improves their career prospects, highlighting the language's importance in a globalized tech world.

[4] Robert Phillipson "English Linguistic Imperialism" "Oxford University Press'' 1992.

Building on its global role in IT, English is essential for accessing online learning platforms and coding resources. Platforms like Coursera, Udemy, Khan Academy, and Codecademy provide millions of courses, tutorials, and coding exercises, with the vast majority in English. According to a 2023 report, over 85% of top-rated coding courses on Coursera and Udemy are conducted in English, highlighting its importance for learners worldwide.

Learning programming or IT skills without English can be challenging. For instance, Python, JavaScript, and Java tutorials are almost exclusively available in English, and students rely heavily on English-language documentation to understand libraries, frameworks, and tools. Even interactive platforms like Leet Code, Hacker Rank, and GitHub require English proficiency for reading problem statements, contributing to projects, and collaborating with global developers.

Moreover, English proficiency allows learners to participate in international online hackathons, coding competitions, and tech forums, where the latest innovations and solutions are often shared. Without English, students might miss out on opportunities to learn from top instructors, engage with global communities, or access cutting-edge technology courses.

Clearly, within online learning and coding platforms, English is not just a language—it is the key to acquiring knowledge, developing technical skills, and connecting with the global IT community.

English plays a critical role in international collaboration within the IT industry. IT specialists often work in global teams, contributing to projects with colleagues from different countries. Platforms like GitHub and Stack Overflow enable developers to share code, troubleshoot issues, and collaborate on open-source projects, almost entirely in English. According to a 2022 survey, over 70% of open-source contributors interact primarily in English, showing how vital the language is for global teamwork.

Moreover, multinational tech companies, including Microsoft, Google, and IBM, conduct meetings, workshops, and technical documentation in English. Employees with strong English skills can communicate ideas clearly, resolve technical

challenges faster, and actively participate in strategic discussions, giving them a competitive advantage.

English also allows IT professionals to participate in international conferences, webinars, and hackathons, which are crucial for networking and staying updated with global trends. For example, events like Neur IPS, ICML, and CES use English as the primary medium, enabling cross-border knowledge exchange.

In short, proficiency in English bridges geographical gaps, facilitates collaboration, and opens doors to global opportunities, making it indispensable for any IT specialist aiming to thrive in the modern technology landscape.

Looking ahead, English will continue to play a pivotal role in emerging technologies such as Artificial Intelligence, Internet of Things (IoT), Cybersecurity, Blockchain, and Quantum Computing. Most research papers, technical manuals, and tutorials in these cutting-edge fields are published in English, making it essential for anyone aiming to innovate or specialize in new technologies.

Emerging technologies are often developed by global teams spread across continents, where English serves as the common language for collaboration and knowledge sharing. For example, AI-driven robotics projects or blockchain research frequently require teams to read English-language documentation, access GitHub repositories, and communicate with international experts.

Moreover, English enables professionals to participate in global training programs, webinars, and certification courses. Platforms like edX, Coursera, and LinkedIn Learning offer advanced courses in emerging tech almost exclusively in English. According to recent statistics, over 80% of all high-level technology courses and research papers are available only in English, highlighting the language’s continued dominance in the tech world.

In essence, as technology evolves, English will remain a key enabler, allowing professionals to access knowledge, collaborate internationally, and stay at the forefront of innovation. Those who master English today are better prepared to lead and shape the technological advancements of tomorrow.

In conclusion, English remains an indispensable tool in the world of Information Technology and Artificial Intelligence, connecting professionals, students, and innovators globally. From programming languages and online learning platforms to AI research, international collaboration, and emerging technologies, English allows access to knowledge, resources, and opportunities that would otherwise be out of reach.

Proficiency in English not only helps IT specialists understand technical documentation and coding frameworks, but also enables them to participate in global conferences, collaborate on international projects, and stay ahead in rapidly evolving fields. As technology continues to advance, English will remain a key enabler for innovation, professional growth, and global networking.

Ultimately, learning and mastering English is more than acquiring a language skill—it is gaining a gateway to the future of technology, allowing individuals to thrive in an increasingly interconnected, digital world. Those who embrace English today will be better prepared to shape and lead the innovations of tomorrow.

References:

1. David Graddol. The future of English. British Council. 2006.

2. Coleman, J. A. The English Language in the Global Context. Cambridge University Press. 2010

3. David Crystal. English as a Global Language. Cambridge University Press. 2003 (2nd ed.)

4. Internet World Stats. English Usage Statistics. Retrieved from https://www.internetworldstats.com. 2023

5. UNESCO. Global Education Monitoring Report. UNESCO Publishing. 2021

6. Kaplan, A. M., & Haenlein, M. Siri, Siri in my hand: Who's the fairest in the land? Business Horizons, 2019 (15–25).

7. Russell, S., & Norvig, P. Artificial Intelligence: A Modern Approach "Pearson" 2019 (4th ed.).

8. Floridi, L. The Fourth Revolution: How the Infosphere is Reshaping Human Reality. Oxford University Press. 2014

9. Bhatia, V. K. World Englishes and Globalization. Routledge. 2017

10. GitHub. The State of the Octoverse Report. Retrieved from https://github.com 2022

11. Brach B. Kachru. The tree circle of English. Universiy of Illinois press. 1992

12. Robert Phillipson. English Linguistic Imperialism. Oxford University Press. 1992

P EHTIMOLLIK VA I IDEMPOTENT EHTIMOLLIK O‘LCHOVLI FUNKSIYALAR O‘RTASIDAGI BOG‘LANISHLAR: NAZARIYA VA SUN’IY INTELLEKTGA TATBIQI

Qurbanova F.A.

TIFT UNIVERSITETI magistranti. oqituvchi1991.03@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada P ehtimollik o‘lchovli funksiyalar va I idempotent ehtimollik o‘lchovli funksiyalar o‘rtasidagi bog‘lanish kompakt Hausdorff fazolar kategoriyasi doirasida o‘rganiladi. Ikki funksiya orasida natural transformatsiya mavjudligi isbotlanib, uning aniq qurilishi keltiriladi. I funksiyasining P funksiyasi ustidagi retrakt xossasi ko‘rsatiladi hamda Gibbs o‘lchovi vositasida ikkala funksiya orasidagi o‘tish mexanizmi ochib beriladi. Olingan natijalar Wasserstein masofasi va Maslov-Villani parallelizmi bilan bog‘liq holda tahlil qilinadi. Tadqiqotning amaliy qismi sun’iy intellekt sohasiga – xususan, Bayesian neyron tarmoqlar, distributional mustaqillikka chidamli optimallashtirish va kuchaytirish orqali o‘rganishga tatbiq etiladi. Maqola sof matematik nazariya bilan zamonaviy AI metodologiyasining uyg‘unligini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar: ehtimollik o‘lchovli funksiyalar, idempotent tahlil, natural transformatsiya, kompakt fazolar kategoriyasi, Wasserstein masofasi, Bayesian o‘rganish, distributional mustahkamlik, kuchaytirish orqali o‘rganish, max-plus algebra.

KIRISH. Kategoriya nazariyasi zamonaviy matematikaning turli sohalarini – algebradan topologiyagacha, stoxastik tahlildan hisoblash fanigacha yagona tilda birlashtiruvchi kuchli vosita sifatida tobora keng qo‘llanilmoqda. Ushbu nazariya doirasida funksiyalar (funktorlar) turli kategoriyalar o‘rtasidagi tuzilmaviy aloqalarni ifodalaydi va ob’ektlar bilan morfizmlarni bir vaqtning o‘zida ko‘chiradi.

Ehtimollik o‘lchovli funksiyasi P – kompakt Hausdorff fazolar kategoriyasi Comp ustida aniqlangan bo‘lib, har bir X ob’ektiga o‘sha fazo ustidagi barcha Radon ehtimollik o‘lchovlari to‘plami $P(X)$ ni moslashtiradi. Bu funksiya stoxastik jarayonlar, Markov o‘tish zanjirlaari va zamonaviy ehtimoliy generativ modellarning matematik asosini tashkil etadi [1, 2].

Idempotent ehtimollik o‘lchovli funksiyasi I esa max-plus algebrasi asosida qurilgan bo‘lib, “ehtimollik” tushunchasining deterministik muqobili sifatida qaraladi. Bu funksiya $I \circ I \cong I$ idempotentlik shartini qanoatlantiradi va tropik geometriya hamda optimal boshqaruv nazariyasi bilan chuqur aloqada turadi [3, 4].

Maslov tomonidan 1980-yillarda yaratilgan idempotent tahlil [3] va Villani tomonidan rivojlantirigan optimal transport nazariyasi [10] bugungi kunda bir-biridan mustaqil yo‘nalishlardek ko‘rinadi. Ammo ularning ortidagi matematik tuzilma – P va I funksiyalari bitta kategoriya ichida yashaydi va ular orasida aniq bog‘lanish mavjud ekanligi hali to‘liq tadqiq etilmagan.

Ushbu maqolaning maqsadi: (1) P va I funksiyalari orasidagi natural transformatsiyani qurib, uning xossalarini isbotlash; (2) $I(X)$ ning $P(X)$ ustidagi retrakt ekanligini ko‘rsatish; (3) olingan natijalarni sun’iy intellekt algoritmlariga tatbiq etishdan iborat. Maqola matematik qat’iylik va amaliy tatbiqning muvozanatini saqlashga harakat qiladi.

ADABIYOTLAR TAHLILI

P ehtimollik o‘lchovlari funksiyasining kompakt fazolardagi xossalari Varadarajan [1] va Fedorchuk [2] tomonidan mukammal o‘rganilgan. Fedorchuk P funksiyasining normalligi, affin xossasi va zaif topologiya asosidagi metrizatsiyasini isbotlab, uni kategoriya morfizmlari sifatida aniq tavsiflagan. Shchepin [5] esa P funksiyasini sanoqsiz darajalar kategoriyasida tadqiq etib, uning topologik invariantliklarga munosabatini ko‘rsatgan.

Idempotent tahlilning asoslari Maslov [3] va Kolokoltsov-Maslov [7] asarlarida batafsil bayon etilgan. Litvinov va boshqalar [4] idempotent funksional tahlilni algebraik yondashuv asosida rivojlantirgan. Zaitov [8] $I(X)$ to‘plamida metrika kiritib, uning kompaktligini isbotlagan – bu I funksiyasining funktor sifatidagi xossalarini aniqlashtirishda muhim qadam bo‘ldi. Ismoilov va Zaitov [9] esa I funksiyasini bir tekis fazolar kategoriyasiga kengaytirib, uning xossalarini yanada umumlashtirgan.

Optimal transport nazariyasi Villani [10] tomonidan to‘liq bayon etilgan. Akian, Gaubert va Kolokoltsov [11] Maslov-Wasserstein parallelizmini, ya’ni aditiv Wasserstein metrikasining idempotent muqobili bo‘lgan min-plus metrikani kiritib, P va I fazolari orasidagi metrik aloqani o‘rnatgan.

Sun'iy intellekt sohasida P funksiyasining distributional representation learning va Bayesian neyron tarmoqlardagi roli Wilson va Izmailov [12] tomonidan ko'rsatilgan. Distributionally robust optimization bo'yicha Kuhn va boshqalar [13] Wasserstein to'pi ustidagi minimax muammosi sifatida maqbul yechim topish usulini taklif etgan. Bellemare va boshqalar [14] distributional kuchaytirish orqali o'rganish (distributional RL) tushunchasini kiritib, qiymat funksiyasini o'lchov sifatida modellashtirgan. Shu bilan birga, P va I funksiyalari orasidagi aniq natural transformatsiya va uning AI tatbiqlari hali alohida maqola sifatida o'rganilmagan – ushbu bo'shliqni to'ldirish ushbu ishning asosiy hissasini tashkil etadi.

ASOSIY QISM

1. Asosiy belgilar va ta'riflar

1-ta'rif (Comp kategoriyasi). Comp – ob'ektlari kompakt Hausdorff topoologik fazolar, morfizmlari uzluksiz akslantirmalar bo'lgan kategoriya. Kompozitsiya akslantirmalarning odatiy kompozitsiyasi, identitet esa identik akslantirma.

2-ta'rif (P funksiyasi). Har bir $X \in \mathrm{Comp}$ uchun $P(X)$ – X ustidagi barcha Radon ehtimollik o'lchovlari to'plami bo'lib, zaif topologiya bilan jihozlangan: $\mu_\alpha \to \mu \Leftrightarrow \int f d\mu_\alpha \to \int f d\mu,\ \forall f \in C(X)$. Morfizm $f : X \to Y$ uchun:

$$P(f) : P(X) \to P(Y), \qquad P(f)(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

bu yerda $B \subseteq Y$ – Borel to'plam. $P(X)$ o'zi ham kompakt Hausdorff fazo ekanligi Prokhorov teoremasi orqali isbotlanadi [1].

3-ta'rif (I funksiyasi). Har bir $X \in \mathrm{Comp}$ uchun $I(X)$ – X ustidagi idempotent Radon o'lchovlari to'plami. $\varphi : \mathrm{Closed}(X) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ funksiyasi idempotent o'lchov hisoblanadi, agar:

$$\varphi(A \cup B) = \max\{\varphi(A), \varphi(B)\}, \tag{i}$$

$$\varphi(X) = 0, \tag{ii}$$

$$\varphi(\varnothing) = -\infty \tag{iii}$$

Morfizm $f : X \to Y$ uchun $I(f) : I(X) \to I(Y)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$I(f)(\varphi)(B)=\sup\{\varphi(A): A\subseteq f^{-1}(B),\ \ A-yopiq\}$$

$I(X)$ Zaitov [8] ma'nosida to'liq metrik kompakt fazo ekanligi isbotlangan.

2. Natural transformatsiya $\theta: P\to I$

1-teorema. Har bir $X\in$Comp uchun $\theta_X: P(X)\to I(X)$ akslantirish:

$$\theta_X(\mu)(A)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\mu(U_\varepsilon(A))$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $U_\varepsilon(A)=\{x\in X: d(x,A)<\varepsilon\}$ – A ning ε-qo'shnisi. U holda $\theta=\{\theta_X\}$ $\{X\in\text{Comp}\}$ – P dan I ga natural transformatsiya hisoblanadi.

Isbot. Avval $\theta_X(\mu)$ ning $I(X)$ elementiga tegishliligini ko'rsatamiz:

Idempotentlik: $U_\varepsilon(A\cup B)=U_\varepsilon(A)\cup U_\varepsilon(B)$ bo'lganligi uchun $\mu(U_\varepsilon(A\cup B))=\mu(U_\varepsilon(A))\cup\mu(U_\varepsilon(B))-\mu(U_\varepsilon(A)\cap U_\varepsilon(B))$. Logarifm va max operatsiyasining xossalaridan $\theta_X(\mu)(A\cup B)=\max\{\theta_X(\mu)(A),\theta_X(\mu)(B)\}$ kelib chiqadi.

Normlanish: $\theta_X(\mu)(X)=\lim\varepsilon\ln\mu(X)=\lim\varepsilon\ln 1=0.$

Bo'shalik: $\theta_X(\mu)(\varnothing)=\lim\varepsilon\ln\mu(\varnothing)=\lim\varepsilon\ln 0=-\infty.$

Naturalligi: har qanday $f: X\to Y$ va $\mu\in P(X)$ uchun $\theta_Y(P(f)(\mu))(B)=I(f)(\theta_X(\mu))(B)$ tengligini tekshirish to'g'ridan-to'g'ri ta'riflar orqali amalga oshiriladi.

3. I funksiyasining P ustidagi retrakt xossasi

2-teorema. $\sigma_X: I(X)\to P(X)$ bo'lsin:

$$\sigma_X(\varphi)=w^*-\lim_{\beta\to+\infty}\mu^{\beta_\varphi},\mu^{\beta_\varphi}dx=Z_{\beta^{-1}}e^{\beta\varphi_x}\nu dx$$

bu yerda $\varphi_x=\sup\{\varphi(A): x\in A, A-yopiq\}$, ν – X ustidagi bazaviy ehtimollik o'lchovi, Z_β – normalashtirish konstantasi. U holda

$$\theta_X\circ\sigma_X=id_{I(X)}$$

ya'ni $I(X)$ – $P(X)$ ning natural retrakti.

Isbot. Prokhorov teoremasi bo‘yicha μ^{β_φ} $\beta>0$ to‘plami $P(X)$ da nisbatan kompakt. $\beta\to+\infty$ chegarasida μ^{β_φ} zaif ma’noda φ ning maksimum nuqtalaridagi Dirak o‘lchovlari kombinatsiyasiga yaqinlashadi – bu LaPlace metodi yordamida ko‘rsatiladi. Kompozitsiyaning identitet ekanligini θ_X ta’rifiga o‘rnating:

$$\theta_X(\sigma_X(\varphi))(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\sigma_X(\varphi)(U_\varepsilon(A))=\varphi(A)$$

Izoh. β parametri fizik ma’noda teskari haroratdir: $\beta=\frac{1}{kT}$. $\beta\to+\infty$ (mutlaq nol harorat) limiti deterministik idempotent o‘lchovni hosil qiladi, $\beta\to 0$ esa barcha nuqtalarda teng taqsimot – ya’ni maksimal tartibsizlikka olib keladi. Bu “annealing” tamoyilining matematik ifodasi.

4. Sun’iy intellektga tatbiqi

4.1. Bayesian neyron tarmoqlar. Bayesian neyron tarmoq (BNN) og‘irliklar taqsimoti $p(\theta\,|\,D)\in P(\Theta)$ ustida ishlaydi. $\theta: P\to I$ transformatsiyasi orqali:

$$\theta_\Theta p(\square\,|\,D)(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln p(U_\varepsilon(A)\,|\,D)$$

MAP (Maximum A Posteriori) baholash, ya’ni $\arg\max_\theta \log p(\theta\,|\,D)$ – bu ifodaning $\{\theta^*\}$ yagona nuqtadagi idempotent o‘lchov ekanligiga ekvivalent. Shu tarzda to‘liq Bayesian xulosa bilan MAP orasidagi munosabat funksiyalar dili bilan aniq ifodalanadi [12].

4.2. Distributional mustahkamlik. Wasserstein to‘pi $B\varepsilon(\mu_0)=\{\nu\in P(X): W_p(\nu,\,\mu_0)\le\varepsilon\}$ ustidagi minimax optimallashtirish:

$$\min_\theta \max_{\nu\in B\varepsilon(\mu_0)} E_\nu[L(\theta)]$$

$I(X)$ da mos keluvchi Maslov-Wasserstein muqobili min-plus metrikasi $dW(\varphi,\psi)=\sup_A|\varphi(A)-\psi(A)|$ orqali aniqlanadi. θ transformatsiyasi stoxastik robust muammoni deterministik minimax masalasiga o‘tkazadi – bu hisoblash murakkabligini $O(n^2)$ dan $O(n\log n)$ gacha tushirish imkonini beradi [13].

4.3. Kuchaytirish orqali o‘rganish. Distributional RL da qiymat funksiyasi $V : S \to \mathbb{R}$ o‘rniga taqsimot $Z : S \to P(\mathbb{R})$ modellanadi. Bellman operatori T:

$$(TZ)(s) = P(f_{r,\gamma})Z(s') \in P(\mathbb{R})$$

θ transformatsiyasi orqali bu $I(\mathbb{R})$ ustidagi Bellman-Maslov operatoriga:

$$(T^{I\varphi})(s) = I(f_{r,\gamma})\varphi(s')\sup_{s'}[\varphi(s') + r(s,a) - \gamma d(s',\square)]$$

o‘tadi. Bu klassik deterministik dynamik programming ning funktorlar orqali isbotlangan umumlashmasi bo‘lib, q-learning algoritmining θ limiti sifatida talqin qilinadi [14].

NATIJALAR VA MUHOKAMA. Tadqiqot davomida quyidagi asosiy natijalar olindi va isbotlandi:

Birinchi natija – Natural transformatsiyaning mavjudligi: P dan I ga $\theta = \{\theta_X\}$ natural transformatsiyasi aniq formula bilan qurildi va uning to‘g‘riligi Comp kategoriyasining barcha morfizmlari uchun ko‘rsatildi. Bu natija Maslov-Villani parallelizmining kategoriya-nazariyaviy isboti hisoblanadi.

Ikkinchi natija – Retrakt xossasi: $I(X)$ ning $P(X)$ ustidagi retrakt ekanligi isbotlandi. $\sigma : I \to P$ bo‘limi Gibbs o‘lchovi konstruksiyasi orqali qurildi. Bu ikkala funksiya bir xil “ma’lumot maydoni”da yashashini ko‘rsatadi: I – P ning past harorat chegarasi, P – I ning issiqlik kengaytmasi.

Uchinchi natija – AI tatbiqlari: Bayesian neyron tarmoqlarda MAP baholashning idempotent interpretatsiyasi, distributional mustahkam optimallashtirishning min-plus muqobili va distributional RL ning Bellman-Maslov operatori sifatida funktorlar nazariyasi asosida isbotlandi.

Muhokama. Olingan natijalar Zaitov [8] va Ismoilov-Zaitov [9] ishlarini yangi tomondan boyitadi: ular $I(X)$ ning metrik va topologik xossalarini o‘rgangan bo‘lsa, biz I funksiyasini P funksiyasiga funktorlar kategoriyasi doirasida bog‘ladik. θ_X transformatsiyasining surъektivmasligi, ya’ni $I(X)$ ning $P(X)$ dan kichikroq ekanligini anglatuvchi holat kelajakdagi tadqiqot uchun asosiy ochiq masala sifatida

qolmoqda: qaysi idempotent o‘lchovlar biror $\mu \in P(X)$ ning harorat limiti sifatida hosil bo‘ladi?

Amaliy nuqtai nazardan, β parametrini moslashuvchan tanlash, ya’ni simulated annealing g‘oyasini funktorlar dili bilan qayta ifodalash ehtimoliy model va deterministik optimizatsiya o‘rtasidagi o‘tishni nazorat qilish imkonini beradi. Bu generativ AI modellarida (diffusion models, flow matching) harorat jadvalini tanlash muammosi bilan to‘g‘ridan-to‘g‘ri bog‘liq.

XULOSA. Ushbu maqolada P ehtimollik o‘lchovli funksiyalar va I idempotent ehtimollik o‘lchovli funksiyalar o‘rtasidagi fundamental matematikk bog‘lanish o‘rganildi. Asosiy hissa sifatida: (1) $\theta : P \to I$ natural transformatsiyasining mavjudligi isbotlandi; (2) I funksiyasining P funksiyasiga nisbatan retrakt ekanligini ta’minlovchi $\sigma : I \to P$ bo‘limi qurildi; (3) $\beta \to +\infty$ chegarasi “Gibbsdan Dirakga o‘tish” sifatida funktorlar doirasida talqin qilindi.

Bu natijalar stoxastik va deterministik olamlar orasidagi ko‘prikni kategoriya nazariyasi tili bilan mustahkamlaydi. Sun’iy intellekt sohasida: MAP baholash, distributional robust optimizatsiya va distributional kuchaytirish orqali o‘rganish hammasi P va I funksiyalari orasidagi θ transformatsiyasining maxsus holatlari sifatida yagona ramkaga joylashadi.

Kelajakdagi yo‘nalishlar: θ_X ning to‘liqlik shartlarini aniqlash; Wasserstein va Maslov-Wasserstein metrikalari orasidagi miqdoriy munosabat; natijalarni nochiziqli diffuzion jarayonlar (score-based generative models) va ko‘p agentli RL tizimlarga tatbiq etish; shuningdek, funktorlar nazariyasini kvant ehtimollik o‘lchovlari sohasiga kengaytirish.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

[1] Varadarajan V.S. Measures on topological spaces // Amer. Math. Soc. Transl. 1965. Vol. 48. pp. 161-228.

[2] Fedorchuk V.V. Probability measures in topology // Russian Math. Surveys. 1991. Vol. 46(1). pp. 45-93.

[3] Maslov V.P. Méthodes opératorielles. Moscow: Mir Publishers, 1987. 556 p.

[4] Litvinov G.L., Maslov V.P., Shpiz G.B. Idempotent functional analysis: an algebraical approach // Mathematical Notes. 2001. Vol. 69(5-6). pp. 696-729.

[5] Shchepin E.V. Functors and uncountable powers of compacta // Russian Math. Surveys. 1981. Vol. 36(3). pp. 1-71.

[6] Sturm K.T. On the geometry of metric measure spaces // Acta Mathematica. 2006. Vol. 196(1). pp. 65-131.

[7] Kolokoltsov V.N., Maslov V.P. Idempotent Analysis and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 305 p.

[8] Zaitov A.A. On a metric on the space of idempotent probability measures // Applied General Topology. 2020. Vol. 21(1). pp. 35-51.

[9] Ismoilov A., Zaitov A. Functor of idempotent probability measures in the category of uniform spaces // Topology and its Applications. 2022. Vol. 314. Art. 108097.

[10] Villani C. Optimal Transport: Old and New. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 976 p.

[11] Akian M., Gaubert S., Kolokoltsov V. Set coverings and invertibility of functional Galois connections // Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, AMS Contemp. Math. 2005. Vol. 377. pp. 19-51.

[12] Wilson A.G., Izmailov P. Bayesian deep learning and a probabilistic perspective of generalization // Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS). 2020. Vol. 33. pp. 4697-4708.

[13] Kuhn D., Esfahani P.M., Nguyen V.A., Shafieezadeh-Abadeh S. Wasserstein distributionally robust optimization: Theory and applications in machine learning // Operations Research. 2019. Vol. 67(6). pp. 1572-1591.

[14] Bellemare M.G., Dabney W., Munos R. A distributional perspective on reinforcement learning // Proc. 34th International Conference on Machine Learning (ICML). PMLR. 2017. Vol. 70. pp. 449-458.

[15] Teleiko A., Zarichnyi M. Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces. Lviv: VNTL Publishers, 1999. 262 p.

KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMANI YECHISHNING CHEKLI ELEMENTLAR USULI

Xaydarov I.U., Abduqaxxorova M.M. Abduqaxxorova M.M.

FarDU dotsenti, f.-m.f.n., dotsent

FarDU magistranti. abduqaxxorovamuborak173@gmail.com

FarDU talabasi abdukaxxorovamadinaxon@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada kasr tartibli differensial tenglamalarni chekli elementlar usuli yordamida yechish masalasi ko‘rib chiqiladi. Riman–Liuvill va Veyl kasr tartibli hosilalarning aniqlanishi, ularning xossalari hamda energiya fazosi tushunchasi asosida umumlashgan yechim qurish usullari tadqiq etilgan. Muammoning raqamli echimini topishda chekli elementlar usulining qo‘llanilishi tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: kasr tartibli differensial tenglamalar, chekli elementlar usuli, Riman–Liuvill hosilasi, Veyl operatori, energiya fazosi, umumlashgan yechim, musbat aniqlangan operator, simmetrik operator, raqamli yechish, Furye koeffitsientlari.

Quyidagi tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$D^{(\alpha)}u + Tu = f, \quad u, \quad f \in L_2[0,2\pi], \tag{1.1}$$

bu yerda

$$D^{(\alpha)} = \frac{(D_{x+}^{(\alpha)} + D_{x-}^{(\alpha)})}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$$

ifoda $D_{x\pm}^{(\alpha)}$ kasr tartibli differensiallash operatorlari yordamida aniqlanadi. Bu operatorlar $[a,b]$ kesmada berilgan $\varphi(x)$ funksiyalar uchun quyidagi formulalar bilan ta’riflanadi:

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{(\alpha)}\varphi)(x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad -\infty < x < \infty,\\ (D_{b-}^{(\alpha)}\varphi)(x) &\overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \quad -\infty < x < \infty,\end{aligned} \tag{1.2}$$

bu yerda $0 < \alpha < 1$. (1.2) ifodalar odatda α tartibli, chap qanotli va o‘ng qanotli Riman-Liuvill kasr tartibli hosilalar deb ham yuritiladi. u noma’lum funksiya, f esa $L_2[0,2\pi]$ fazoning berilgan funksiyasidir. T – $(D^{(\alpha)} + T)$ chiziqli operator bo‘ladigan

qandaydir operator bo‘lib, umumiy holda cheklanmagan va musbat aniqlanmagan bo‘lishi mumkin.

Yetarlicha silliq funksiyalar uchun $D^{(\alpha)}$ operatori Veyl kasr tartibli differensiallash operatori bilan mos tushadi va quyidagi qoida asosida ta’sir etadi:

$$D^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k e^{ikx}. \qquad (1.3)$$

Bu yerda $u_k - u$ funksiyaning Furye koeffitsientlari.

Endi (1.2) kasr tartibli hosilaning $\alpha \geq 1$ bo‘lgan holatini ko‘rib chiqamiz. Bunda uning ifodasi quyidagicha beriladi.

α soni – kasr tartibli hosilaning tartibi – quyidagi ko‘rinishda ifodalanishi mumkin:

$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, bu yerda α butun qism, $\{\alpha\}$ esa kasr qismdir. Agar α butun son bo‘lsa, kasr tartibli hosila oddiy differensiallash tushuniladi:

$$D_{a+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad D_{b-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3,\ldots$$

Shunday qilib, yuqori tartibli kasr hosilalar quyidagicha aniqlanadi:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha]+1,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha]+1.$$

Operator uchun quyidagi lemmalar o‘rinli.

Lemma 1.1 $D^{(\alpha)}$ – musbat aniqlangan operator.

Isbot. Ma’lumki, $D^{(\alpha)}$ operator quyidagi shart bajarilganda musbat aniqlangan operator bo‘ladi: $(D^{(\alpha)}u, u) > 0$. Bundan tashqari, e^{ikx} sistema $L_2[0, 2\pi]$ fazoda to‘liq bo‘lsa, quyidagi o‘rinli bo‘ladi:

$$\left(D^{(\alpha)}\square, u\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(D^{(\alpha)}u, e^{ikx}\right)\left(u, e^{ikx}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} |u_k|^2 > 0.$$

Isbot talab qilinganidek.

Lemma 1.2 $D^{(\alpha)}$ – simmetrik operator.

Isbot. $L_2[0,2\pi]$ fazodan olingan ixtiyoriy u,v funksiyalar uchun $D_+^{(\alpha)}u$ va v ning skalyar ko‘paytmasini ko‘rib chiqamiz:

$$(D_+^{(\alpha)}u,v)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x-t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)^{\alpha}e^{ikx}dtv(x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi}u(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)^{\alpha}e^{ik(x-t)}dtv(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-ik)^{\alpha}e^{ikx}dxu(t)dt=(u,D^{(\alpha)}v).$$

Xuddi shunday, $D_-^{(\alpha)}$ operatori uchun ham quyidagi o‘rinli: $(D_-^{(\alpha)}u,v)=(u,D_+^{(\alpha)}v)$.

Shundan kelib chiqadiki, $D^{(\alpha)}$ operatori (o‘zini $D_+^{(\alpha)}$ va $D_-^{(\alpha)}$ operatorlari orqali ifodalovchi) skalyar ko‘paytma xossasiga asosan simmetrik operator hisoblanadi.
Buni hisobga olib, skalyar ko‘paytma va normani mos ravishda quyidagicha kiritamiz:

$$[u,v]=(D^{(\alpha)}u,v),\quad \|u\|=(D^{(\alpha)}u,u)^{1/2}.$$

Skalyar ko‘paytma aniq ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$[u,v]=(D^{(\square)}u,v)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k\,|k|^{\alpha}\,e^{ikx}v(x)dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|^{\alpha}\,u_k\overline{v_k}.$$

$D(D^{(\alpha)})$ aniqlanish sohasini kiritilgan norma bo‘yicha to‘ldirib, energiya fazosi deb ataladigan fazo hosil qilamiz va uni H_D bilan belgilaymiz.

Boshlang‘ich (1.1) tenglamani ixtiyoriy $v\in D(D^{(\alpha)})$ funksiyaga ko‘paytirsak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$[u,v]+(Tu,v)=(f,v). \qquad (1.4)$$

(1.4) tenglama masalaning umumlashgan qo‘yilishiga imkon beradi. (1.1) tenglamaning umumlashgan yechimi deb, (1.4) tenglamani H_D fazodan olingan har qanday v funksiya uchun qanoatlantiradigan $u\in H_D$ funksiyaga aytiladi.

Adabiyotlar:

1. Литвинова Н.Н. Приближенное вычисление дробной производной и метод конечных элементов для дробно - дифференциального уравнение. Выпускная квалификационная работа. Казань-2015.

2. Самарский А.А. Введение в численные методы. - Москва: Наука. Главная редакция физико - математической литературы, 1982.

5–7-SINF MATEMATIKA DARSLARIDA IJODIY MASALALARDAN FOYDALANISH IMKONIYATLARI

Mazbutova P.S.

O'ZMPU Universiteti talabasi. parvinamazbutova48@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada 5–7-sinf matematika darslarida ijodiy masalalardan foydalanishning o'quvchilarning mustaqil va mantiqiy fikrlashini rivojlantirishdagi ahamiyati yoritilgan. Ijodiy masalalarni tanlash mezonlari, ularni dars jarayoniga joriy etish usullari hamda ta'lim samaradorligini oshirishdagi o'rni tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: ijodiy masala, mustaqil fikrlash, matematika ta'limi, muammoli ta'lim, mantiqiy tafakkur, innovatsion metodlar.

Kirish. Bugungi ta'lim tizimida o'quvchilarning faqat bilim egallashi emas, balki mustaqil fikrlashi, muammoni tahlil qila olishi va ijodiy yondashuvi muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, matematika fanida o'quvchini tayyor formulalarni qo'llashga emas, balki fikrlashga o'rgatish zarur. Shu maqsadda 5–7-sinflarda ijodiy masalalardan foydalanish alohida pedagogik ahamiyatga ega.

Ijodiy masala — bu o'quvchidan tayyor algoritm asosida emas, balki izlanish, taqqoslash, taxmin qilish va xulosa chiqarishni talab qiladigan masaladir. Bunday masalalarda bir nechta yechim bo'lishi yoki noodatiy fikrlash talab qilinishi mumkin. Masalan, oddiy arifmetik masala aniq formulaga asoslangan bo'lsa, ijodiy masala o'quvchini muammo ustida o'ylashga majbur qiladi.

Ijodiy masalalarni tanlash mezonlari

- 5–7-sinf o'quvchilari uchun ijodiy masalalar quyidagi talablarga mos bo'lishi kerak:
- o'quvchining yosh va bilim darajasiga mos bo'lishi;
- qiziqarli va hayotiy vaziyatlarga asoslangan bo'lishi;
- mantiqiy fikrlashni talab qilishi;
- bir nechta yechim yo'liga ega bo'lishi;
- o'quvchini izlanishga undashi.

Ijodiy masalalardan foydalanish metodikasi- Matematika darsida ijodiy masalalardan foydalanish quyidagi shakllarda amalga oshiriladi.

Muammoli vaziyat yaratish: O‘qituvchi masalani tayyor holda bermaydi, balki savol yoki hayotiy vaziyat orqali muammo yaratadi.

Guruhda ishlash: O‘quvchilar kichik guruhlarga bo‘linib, masalani turli yo‘llar bilan yechishga harakat qiladilar.

Bahs va muhokama: Har bir guruh o‘z yechimini tushuntiradi, boshqa guruhlar bilan solishtiriladi.

Masala: Bir maktabda 5- 6 va 7-sinf o‘quvchilari ishtirok etgan matematik olimpiadada jami 90 nafar o‘quvchi qatnashdi. 6-sinf o‘quvchilari soni 5-sinf o‘quvchilari sonidan 10 nafarga ko‘p, 7-sinf o‘quvchilari soni esa 5-sinf o‘quvchilari sonidan 2 baravar kam. Har bir sinfdan nechta o‘quvchi qatnashgan?

Yechilishi: 5-sinf o’quvchilari sonini x deb olamiz

Shunda: 6-sinf : x+10 va 7-sinf :$\frac{x}{2}$

Jami: x+(x+10)+$\frac{x}{2}$=90 ko’rinishda bo’ladi va tenglamani yechamiz.

$$2x+10+\frac{x}{2}=90$$

x=32 chiqadi ekan va endi qolganlarini topamiz :

6- sinf: x+10= 32+10=42 nafar

7- Sinf $\frac{x}{2}=\frac{32}{2}$=16 nafar

Javob : Har bir sinfda ya’ni 5 -sinf -32 nafar , 6 -sinf - 42 nafar , 7- sinf - 16 nafar o’quvchi qatnashgan .

Masala: Shaharda 3 ta avtobus yo‘lovchi tashiydi. Birinchi avtobusda 24 nafar, ikkinchisida 18 nafar, uchinchisida esa 12 nafar yo‘lovchi bor edi. Har bir avtobusda 6 nafar yo‘lovchi tushib, 4 nafar yo‘lovchi chiqdi. Hamma avtobusda nechta yo‘lovchi qoladi?

Yechilishi: 1 qadam: Dastlabki yo‘lovchilar sonini aniqlash Avval barcha avtobuslardagi yo‘lovchilarning umumiy sonini hisoblab olamiz:

1-avtobus: 24 nafar

2-avtobus: 18 nafar

3-avtobus: 12 nafar

$$24 + 18 + 12 = 54 \text{ (jami yo‘lovchilar)}$$

2-qadam: Har bir avtobusdagi o‘zgarishni hisoblash

Masala shartiga ko‘ra, har bir avtobusda:

6 kishi tushdi (-6)

4 kishi chiqdi (+4)

Demak, har bir avtobusdagi yo‘lovchilar soni 2 taga kamaygan:

$$-6 + 4 = -2$$

3-qadam: Yakuniy natijani hisoblash

Bizda 3 ta avtobus bor, har birida yo‘lovchilar 2 taga kamaygan bo‘lsa:

$$3x\ 2 = 6 \text{ (jami kamaygan yo‘lovchilar)}$$

Endi dastlabki sondan kamaygan miqdorni ayiramiz:

$$54 - 6 = 48$$

Javob: Hamma avtobuslarda jami 48 nafar yo‘lovchi qoladi.

Xulosa chiqarish: O‘qituvchi umumiy xulosani shakllantirib, to‘g‘ri yechim yo‘llarini ko‘rsatadi. Ijodiy masalalarning o‘quvchi tafakkuriga ta’siri

- Ijodiy masalalar:
- o‘quvchilarning mantiqiy fikrlashini rivojlantiradi;
- mustaqil qaror qabul qilishga o‘rgatadi;
- matematikaga bo‘lgan qiziqishni oshiradi;
- bilimni hayotiy vaziyatlarda qo‘llash ko‘nikmasini shakllantiradi.

Muhokama. 5–7-sinf matematika darslarida ijodiy masalalardan foydalanish o‘quvchilarning darsga bo‘lgan qiziqishini sezilarli darajada oshiradi. Bunday masalalar o‘quvchilarni faqat bitta to‘g‘ri javobni topishga emas, balki masalani turli usullar bilan hal qilishga undaydi.

Masalan, oddiy arifmetik masalalarni hayotiy vaziyatlar bilan bog‘lash orqali o‘quvchilarni fikrlashga undash mumkin. Shuningdek, mantiqiy masalalar,

boshqotirmalar va muammoli vaziyatli topshiriqlar o‘quvchilarning tafakkurini rivojlantiradi.

Natijalar. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, 5–7-sinf matematika darslarida ijodiy masalalardan muntazam foydalanish o‘quvchilarning darsga qiziqishini oshiradi va ularning mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantiradi.

Shuningdek, o‘quvchilar masalalarni mustaqil tahlil qilish, turli usullar bilan yechim topish va o‘z fikrini asoslab berish ko‘nikmalarini egallaydi. Ijodiy masalalar orqali o‘quvchilarning matematik bilimlari mustahkamlanadi va ular dars jarayonida faol ishtirok etadi.

XULOSA. Xulosa qilib aytganda, 5–7-sinf matematika darslarida ijodiy masalalardan samarali foydalanish o‘quvchilarning nafaqat matematik bilimlarini mustahkamlashga, balki ularning mustaqil fikrlash, tahlil qilish, mantiqiy xulosa chiqarish hamda muammoni turli yo‘llar bilan hal qilish ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Ijodiy masalalar an’anaviy mashqlardan farqli ravishda o‘quvchini faol fikrlashga undaydi, uni tayyor formulalarni yodlashdan ko‘ra, mazmunni anglab yechim topishga o‘rgatadi.

Bunday masalalar orqali o‘quvchilar o‘z fikrini erkin bayon qilishni, o‘z yechim yo‘lini asoslab berishni va boshqalarning fikrini tinglab, tahlil qilishni o‘rganadilar. Natijada dars jarayoni qiziqarli, jonli va samarali kechadi. Ijodiy masalalar o‘quvchilarda matematikaga bo‘lgan qiziqishni oshiradi, ularni izlanishga undaydi va o‘z kuchiga bo‘lgan ishonchini mustahkamlaydi.

Shuningdek, ijodiy masalalardan foydalanish o‘qituvchidan ham metodik mahoratni talab etadi. O‘qituvchi masalalarni o‘quvchilarning yosh va bilim darajasiga mos holda tanlashi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. O‘zbekiston Respublikasi Maktab ta’limi vazirligi. Matematika fanidan davlat ta’lim standarti va o‘quv dasturi. – Toshkent.

2. Abdullayev G‘. A. Matematika o‘qitish metodikasi. – Toshkent: O‘qituvchi, 2020.

3. Yo‘ldoshev N., Usmonov S. Pedagogik texnologiyalar va ularni ta’lim jarayonida qo‘llash. – Toshkent, 2019.

4. Polya G. How to Solve It. – Princeton University Press.

5. Azizxo‘jayeva N. Zamonaviy pedagogik texnologiyalar. – Toshkent, 2018.

ТЕОРИЯ ИГР И СТРАТЕГИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Худайбердиев Х.М.

Ташкентский государственный экономический университет старший преподаватель, xakim.xudayberdiyev@gmail.com

Аннотация: В статье рассматриваются математические основы теории игр как науки о стратегическом принятии решений. Анализируются ключевые понятия: классификация игр, равновесие Нэша, доминирующие и смешанные стратегии, кооперативные игры и ценность Шепли. Приводятся формальные определения, матричные модели и содержательные примеры из экономики и управления. Показаны пути применения теоретико-игровых методов в современных задачах оптимизации и проектирования механизмов.

Ключевые слова: теория игр, равновесие Нэша, стратегия, принятие решений, кооперативные игры, матрица выигрышей, доминирующая стратегия, смешанные стратегии, ценность Шепли, механизм-дизайн, игры с нулевой суммой, дилемма заключённого.

ВВЕДЕНИЕ (INTRODUCTION)

Теория игр — раздел прикладной математики, исследующий математические модели принятия решений в условиях стратегического взаимодействия нескольких рациональных участников. Каждый участник («игрок») стремится максимизировать собственный выигрыш, осознавая при этом, что итоговый результат определяется совокупностью действий всех сторон. Именно это взаимное влияние выборов делает теорию игр качественно отличным от классической теории оптимизации математическим инструментом.

История теории игр восходит к XIX веку: французский математик Огюстен Курно ещё в 1838 году исследовал дуополию как задачу стратегического выбора объёма производства. Однако как самостоятельная дисциплина теория игр оформилась в 1944 году, когда вышел фундаментальный труд Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». Авторы формализовали понятие конечной игры двух лиц с нулевой суммой и доказали теорему минимакса — первый великий результат новой дисциплины.

Революционный вклад внёс Джон Нэш, предложивший в 1950–1951 годах концепцию равновесия для игр с произвольным числом участников. Это равновесие, получившее имя своего создателя, стало центральным решающим

концептом теории игр. В 1994 году Нэш был удостоен Нобелевской премии по экономике совместно с Джоном Харсаньи и Райнхардом Зельтеном за вклад в анализ равновесий в некооперативных играх.

Сегодня теория игр применяется в экономике, политологии, биологии, информатике, военной стратегии и многих других областях. Рост вычислительных мощностей открыл новые горизонты: алгоритмическая теория игр, вычислительный механизм-дизайн и теоретико-игровые подходы к машинному обучению превращаются в активно развивающиеся направления на стыке математики и компьютерных наук.

Цель данной статьи — систематически изложить математические основы теории игр: от формальных определений и классификации игр до ключевых решающих концептов и их практических приложений. Статья адресована читателям, знакомым с основами высшей математики и желающим получить целостное представление о современном состоянии дисциплины.

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ И МЕТОДЫ (LITERATURE REVIEW AND METHODS)

2.1. Классические работы и становление дисциплины. Монография фон Неймана и Моргенштерна (1944) заложила аксиоматический фундамент теории игр. Авторы ввели понятие нормальной и развёрнутой форм представления игры, доказали существование оптимальных смешанных стратегий для игр с нулевой суммой и предложили теорию полезности, позволяющую количественно сравнивать исходы. [1]

Нэш в серии коротких, но исключительно ёмких статей 1950–1951 годов обобщил результаты на некооперативные игры с произвольным числом участников. Теорема о существовании равновесия, доказанная с использованием теоремы Какутани о неподвижной точке, обеспечила концепции Нэша прочную математическую основу. [2]

Работы Ллойда Шепли сформировали кооперативную ветвь теории игр. В 1953 году он предложил аксиоматическое определение справедливого

распределения выигрыша в коалиционных играх — «ценность Шепли» — которое стало стандартным инструментом анализа кооперативного взаимодействия. Совместно с Дэвидом Гейлом Шепли также разработал алгоритм устойчивого паросочетания, лежащий в основе современных рынков распределения ресурсов. [3]

2.2. Развитие теории: неполная информация и динамические игры. Джон Харсаньи в 1967–1968 годах разработал теорию байесовских игр — игр с неполной информацией, в которых игроки не знают точно характеристик противников, но располагают вероятностными суждениями о них. Введённое им понятие «типа» игрока позволило свести задачу неполной информации к задаче неполной информированности, поддающейся стандартному анализу. [4]

Райнхард Зельтен предложил концепцию совершенного равновесия в подыграх (1965) и совершенного по дрожащей руке равновесия (1975) как уточнения равновесия Нэша для динамических игр. Эти концепции устраняют «неправдоподобные» угрозы в последовательных играх и обеспечивают более реалистичные предсказания поведения. [5]

2.3. Современные направления. Алгоритмическая теория игр изучает вычислительную сложность нахождения равновесий и разрабатывает эффективные алгоритмы для задач большой размерности. Важным результатом является доказательство PPAD-полноты задачи нахождения равновесия Нэша в общих играх двух лиц, что указывает на принципиальные вычислительные трудности. [6]

Эволюционная теория игр применяет теоретико-игровые методы к анализу биологических популяций, заменяя рациональность механизмом естественного отбора. Концепция эволюционно стабильной стратегии (ESS) стала мостом между теорией игр и эволюционной биологией. [7]

2.4. Методология исследования. Методологической основой настоящей работы служат: аксиоматический метод (формальное определение игры и решающих концептов), матричный анализ (представление игр в нормальной

форме), метод обратной индукции (анализ динамических игр), а также сравнительный анализ классов игр и решающих концептов. Примеры и иллюстрации подобраны так, чтобы связать абстрактные математические понятия с конкретными задачами принятия решений.

ОБСУЖДЕНИЕ (DISCUSSION)

3.1. Формальное определение игры. Игра в нормальной форме задаётся тройкой G = (N, { S_i } i∈N, { u_i }i∈N), где:

— N = {1, 2, …, n} — конечное множество игроков;

— S_i — множество чистых стратегий игрока i;

— $u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to R$ — функция выигрыша игрока i.

Профиль стратегий s = (s_1, s_2, …, s_n) ∈ S = $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ однозначно определяет исход игры. Обозначим через s−i профиль стратегий всех игроков, кроме i-го. Тогда u_i (si, s−i) — выигрыш игрока i при выборе стратегии si в ответ на профиль s−i остальных участников.

3.2. Классификация игр

Теория игр оперирует несколькими важными классификациями, отражающими структуру стратегического взаимодействия.

По сумме выигрышей различают игры с нулевой суммой, в которых сумма выигрышей всех участников равна нулю для любого профиля стратегий: ∑i ui(s) = 0 для всех s ∈ S. В таких играх интересы участников полностью противоположны. Игры с ненулевой суммой допускают ситуации взаимной выгоды или взаимного проигрыша, что существенно расширяет спектр стратегических взаимодействий.

По числу ходов различают игры в нормальной форме (одновременный выбор стратегий) и игры в развёрнутой форме (последовательные ходы, представляемые деревом игры). По наличию информации — игры с полной и неполной информацией, с совершенной и несовершенной информацией. По

возможности координации — кооперативные (игроки могут заключать обязывающие соглашения) и некооперативные игры.

3.3. Равновесие Нэша. Профиль стратегий s* = (s1*, s2*, …, sn*) является равновесием Нэша, если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, отклонившись от s* при условии, что остальные придерживаются своих равновесных стратегий. Формально:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall i \in N \tag{1}$$

Фундаментальная теорема Нэша утверждает, что каждая конечная игра имеет хотя бы одно равновесие (возможно, в смешанных стратегиях). Доказательство использует теорему Какутани о неподвижной точке многозначного отображения наилучших ответов BR: S → 2^S, где BRi(s−i) = arg max ui(si, s−i). [2]

Геометрически равновесие Нэша — точка пересечения графиков функций наилучших ответов всех игроков. Множество равновесий может быть пустым в чистых стратегиях, единственным или бесконечным. Множественность равновесий порождает проблему координации: какое из них реализуется на практике?

3.4. Смешанные стратегии. Смешанная стратегия игрока i — вероятностное распределение σi ∈ Δ(Si) над множеством его чистых стратегий, где Δ(Si) обозначает симплекс вероятностных распределений на Si. Ожидаемый выигрыш при профиле смешанных стратегий σ = (σ1, …, σn):

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s) \cdot \prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \tag{2}$$

Равновесие Нэша в смешанных стратегиях определяется аналогично формуле (1), с заменой чистых стратегий смешанными. Ключевое свойство: в равновесии игрок безразличен между всеми чистыми стратегиями, которым он придаёт положительную вероятность — иначе он бы сместил всю вероятность на лучшую.

3.5. Дилемма заключённого и проблема координации. Классическим примером некооперативной игры служит «Дилемма заключённого». Двое подозреваемых независимо выбирают: молчать (C — сотрудничество) или давать показания (D — отступление). Матрица выигрышей (срок заключения с обратным знаком):

	Игрок 2: C	Игрок 2: D
Игрок 1: C	−1, −1	−3, 0
Игрок 1: D	0, −3	−2, −2

Таблица 1. Матрица выигрышей дилеммы заключённого

Стратегия D доминирует стратегию C для обоих игроков: независимо от выбора партнёра, давать показания всегда выгоднее. Единственное равновесие Нэша — (D, D) с выигрышами (−2, −2), хотя исход (C, C) с выигрышами (−1, −1) был бы лучше для обоих. Этот парадокс — рациональное поведение индивидов приводит к коллективно неоптимальному результату — лежит в основе таких явлений, как гонка вооружений, загрязнение окружающей среды и нарушение картельных соглашений.

3.6. Доминирующие стратегии. Стратегия si строго доминирует стратегию s'i, если для любых действий остальных игроков выигрыш от si строго выше:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_{i'}, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} \tag{3}$$

Рационально мыслящий игрок никогда не выберет строго доминируемую стратегию. Итеративное исключение строго доминируемых стратегий (IESDS) позволяет сократить игру до более простой, сохраняя все равновесия Нэша. Если в результате IESDS остаётся единственный профиль, игра называется разрешимой доминированием, а этот профиль — единственным рациональным исходом.

3.7. Байесовские игры: неполная информация. В реальных ситуациях участники часто не знают характеристик (типов) противников. Харсаньи формализовал такие ситуации, введя байесовскую игру: каждый игрок i имеет

тип ti ∈ Ti, извлечённый из совместного распределения вероятностей p(t). Стратегия игрока i — функция bi: Ti → Si. Равновесие Байеса–Нэша обобщает равновесие Нэша: каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при данных убеждениях о типах остальных. [4]

3.8. Кооперативные игры и ценность Шепли

В кооперативных играх группы игроков могут объединяться в коалиции. Игра задаётся парой (N, v), где характеристическая функция v: 2^N → R определяет максимальный гарантированный выигрыш каждой коалиции S ⊆ N. Центральным вопросом является справедливое распределение суммарного выигрыша v(N) между участниками. [3]

Ценность Шепли φi(v) — единственный способ распределения, удовлетворяющий четырём аксиомам: эффективности, симметрии, линейности и нулевого игрока. Формула:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right] \qquad (4)$$

Слагаемое v(S∪{i}) − v(S) — предельный вклад игрока i при вступлении в коалицию S. Ценность Шепли усредняет этот вклад по всем возможным порядкам вступления игроков. Концепция нашла широкое применение в анализе голосования в законодательных органах, распределении затрат в совместных проектах и объяснимом машинном обучении (метод SHAP).

РЕЗУЛЬТАТЫ (RESULTS)

4.1. Сравнительный анализ решающих концептов

Различные решающие концепты отражают разные предположения о рациональности и информированности игроков. Равновесие Нэша предполагает взаимную рациональность и правильность ожиданий о поведении партнёров. Итеративное доминирование требует общего знания о рациональности всех участников. Совершенное равновесие в подыграх добавляет требование последовательной рациональности в каждой точке игрового дерева.

Концепт	Тип игры	Требования	Применение
Равновесие Нэша	Некооперативные, нормальная форма	Взаимная рациональность	Олигополия, аукционы
Совершенное в подыграх	Динамические игры	Последовательная рациональность	Переговоры, торги
Байеса–Нэша	Неполная информация	Байесовские убеждения	Аукционы, сигнализация
Ценность Шепли	Кооперативные	Справедливость, эффективность	Коалиции, SHAP

Таблица 2. Сравнение основных решающих концептов теории игр

4.2. Практические приложения

Экономика и теория отраслевых рынков. Модели Курно (конкуренция по количеству) и Бертрана (конкуренция по цене) — классические игры олигополии с явно вычисляемым равновесием Нэша. В модели Курно n фирм с издержками ci одновременно выбирают объёмы выпуска qi. При линейном спросе P(Q) = a − bQ равновесный выпуск каждой симметричной фирмы:

$$q_i^* = \frac{a-c}{b(n+1)} \qquad (5)$$

С ростом числа участников равновесие Курно сходится к конкурентному исходу, что объясняет, почему рынки с большим числом игроков ведут себя более конкурентно.

Аукционный дизайн. Теория аукционов — одно из наиболее практически значимых приложений теории игр. Теорема эквивалентности выручки утверждает, что при определённых условиях все стандартные аукционные форматы (английский, голландский, аукцион второй цены) дают продавцу одинаковую ожидаемую выручку. Работа Пола Милгрома и Роберта Уилсона по дизайну аукционов радиочастотного спектра, удостоенная Нобелевской премии

2020 года, демонстрирует, как теоретико-игровые методы решают задачи колоссального практического масштаба.

Механизм-дизайн («обратная теория игр»). Если теория игр анализирует равновесие при заданных правилах, то механизм-дизайн решает обратную задачу: проектирует правила взаимодействия так, чтобы равновесное поведение агентов реализовывало желаемый социальный результат. Теорема Гиббарда–Саттертуэйта устанавливает фундаментальные ограничения на манипулируемость механизмов голосования, а механизм Викри–Кларка–Гровса обеспечивает эффективное распределение ресурсов при доминирующей стратегии правдивого сообщения предпочтений. [6]

Информатика и многоагентные системы. В компьютерных науках теория игр используется для анализа протоколов маршрутизации трафика, проектирования криптографических протоколов, а также в области многоагентного обучения с подкреплением. Понятие «цены анархии» количественно оценивает потерю эффективности из-за эгоистичного поведения агентов в сетевых играх: отношение социального оптимума к наихудшему равновесию Нэша.

Международные отношения и ядерное сдерживание. Игра «Куриные гонки» моделирует ситуацию взаимного ядерного сдерживания: оба игрока предпочитают, чтобы уступил другой, однако взаимная несговорчивость ведёт к катастрофическому исходу. Теоретико-игровой анализ политики взаимного гарантированного уничтожения объясняет стабильность ядерного мира как равновесие Нэша, в котором ни одна из сторон не имеет стимула к первому удару.

4.3. Ограничения и поведенческие расширения

Классическая теория игр строится на предпосылке полной рациональности — игроки точно вычисляют оптимальные стратегии и имеют согласованные ожидания. Экспериментальные данные систематически опровергают эти предпосылки. В экспериментах с дилеммой заключённого значительная доля

участников выбирает кооперацию; в ультиматумных играх люди отвергают «несправедливые» предложения, жертвуя материальной выгодой.

Поведенческая теория игр интегрирует психологические факторы — ограниченную рациональность, социальные предпочтения, принципы справедливости — в формальные модели. Концепция квантального ответа заменяет детерминированный наилучший ответ стохастическим: игрок выбирает лучшую стратегию с большей, но не стопроцентной вероятностью. Это позволяет лучше описывать экспериментальные данные, сохраняя математическую строгость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ (CONCLUSION)

Теория игр представляет собой зрелую математическую дисциплину с богатым арсеналом инструментов анализа стратегического взаимодействия. От простых матричных игр до сложных динамических моделей с неполной информацией — она предоставляет единый формальный язык для описания и анализа широчайшего класса явлений, объединённых общей чертой: результат зависит от действий всех участников.

Центральным достижением теории является концепция равновесия Нэша и доказательство его существования в любой конечной игре. Этот результат, опирающийся на глубокие топологические теоремы, обеспечивает теоретическую предсказуемость исходов стратегического взаимодействия. Ценность Шепли решает проблему справедливого распределения в кооперативных играх и нашла неожиданное применение в объяснимом искусственном интеллекте.

Вместе с тем теория игр не лишена ограничений. Множественность равновесий ставит под вопрос однозначность предсказаний. Предпосылка полной рациональности нарушается в экспериментах. Вычислительная сложность нахождения равновесий ограничивает применимость к задачам большой размерности. Эти вызовы определяют направления активных

исследований: уточнение равновесий, поведенческие расширения, алгоритмическая теория игр.

Перспективными направлениями развития дисциплины являются: глубокое обучение с подкреплением в многоагентных средах; применение теоретико-игровых методов к задачам кибербезопасности; теория игр с федеративным обучением и дифференциальной приватностью; квантовая теория игр, изучающая эффекты запутанности в стратегическом взаимодействии.

Освоение теории игр становится необходимым условием профессиональной компетентности не только математиков и экономистов, но и специалистов в области искусственного интеллекта, права, политологии и менеджмента — всех, кто принимает решения в условиях стратегической неопределённости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

1. von Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. – Princeton: Princeton University Press, 1944. – 625 p.

2. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. – 1951. – Vol. 54, No. 2. – P. 286–295.

3. Shapley L.S. A Value for n-Person Games // Contributions to the Theory of Games, Vol. II / eds. H.W. Kuhn, A.W. Tucker. – Princeton, 1953. – P. 307–317.

4. Harsanyi J.C. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players // Management Science. – 1967–1968. – Vol. 14, No. 3–5. – P. 159–182, 320–334, 486–502.

5. Selten R. Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games // International Journal of Game Theory. – 1975. – Vol. 4, No. 1. – P. 25–55.

6. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirani V.V. (eds.) Algorithmic Game Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 754 p.

7. Maynard Smith J. Evolution and the Theory of Games. – Cambridge: Cambridge University Press, 1982. – 224 p.

8. Osborne M.J., Rubinstein A. A Course in Game Theory. – Cambridge: MIT Press, 1994. – 352 p.

9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.

10. Камерер К. Поведенческая теория игр: эксперименты в стратегическом взаимодействии. – М.: Издательство Института Гайдара, 2013. – 544 с.

UCH O‘LCHOVLI UCHTA SINGULYAR KOEFFITSIENTGA EGA BO‘LGAN ELLIPTIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN SHARNING SAKKIZDAN BIR BO‘LAGIDA NEYMAN MASALASINING SPEKTRAL XOSSALARI

Karimov K.T., Raximova I.A.

FarDU professori, karimovk80@mail.ru.

FarDU magistranti, mumtaaza0722@gmail.com.

Annotatsiya. Ushbu ishda uch o‘lchovli fazoda uchta singulyar koeffitsientga ega elliptik tipdagi differensial tenglama uchun Neyman masalasining xos qiymatlari va xos funksiyalari topilgan. Masala markazi koordinatalar boshida joylashgan sharning sakkizdan bir qismida qaraladi. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida masala uchta oddiy differensial tenglamalar uchun xos qiymat haqidagi masalalarga keltiriladi va xos qiymatlar hamda ularga mos xos funksiyalar aniqlanadi. Xos funksiyalar sferik koordinatalarda ifodalanib, ular Gaussning gipergeometrik funksiyalari orqali aniq ko‘rinishda yoziladi. Olingan yechimlar parametrlarga bog‘liq holda berilib, ularning asosiy xossalari ko‘rsatib o‘tiladi. Natijalar singulyar koeffitsientli elliptik tenglamalar nazariyasida va chegaraviy masalalarni yechishda qo‘llanilishi mumkin.

Kalit so‘zlar: Neyman masalasi, uch o‘lchamli elliptik tenglama, singulyar koeffitsientlar, xos funksiyalar, gipergeometrik funksiyalar, sferik koordinatalar, spektral masala.

KIRISH. Elliptik turdagi differensial tenglamalar nazariyasi matematik-fizika va muhandislik sohalarida keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, uch o‘lchamli fazoda singulyar koeffitsientlarga ega elliptik tenglamalar chegaraviy masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega. Ushbu ishda markazi koordinatalar boshida joylashgan sharning sakkizdan bir qismida Neyman masalasi ko‘rib chiqiladi.

Masalani yechishda o‘zgaruvchilarni ajratish usuli qo‘llanilib, u spektral masalaga keltiriladi. Shuningdek, xos qiymatlar va xos funksiyalar aniqlanadi, ular sferik koordinatalarda ifodalanadi va Gauss gipergeometrik funksiyalari orqali aniq ko‘rinishda yoziladi. Ushbu yondashuv singulyar koeffitsientli elliptik tenglamalarni tahlil qilish va chegaraviy masalalarni yechishda samarali vosita sifatida xizmat qiladi.

Ushbu maqola tadqiqotning nazariy va amaliy jihatlarini birlashtiradi hamda olingan natijalar matematika va fizika sohasidagi muammolarni hal qilishda qo‘llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA. [2], [3] ishlarda ikkinchi tartibli elliptik tipdagi tenglamalar uchun cheklangan sohada Neyman masalasining umumlashgan yechimlari batafsil o‘rganilgan. [4], [5], [6] ishlarda ko‘p o‘lchovli Laplas tenglamasi uchun silindrik sohada klassik yechimlar aniq ko‘rinishda berilgan. Shu bilan birga, ikkita singulyar koeffitsientga ega uch o‘lchovli elliptik tenglamalar uchun ham xuddi shunday ishlar [7], [8], [9] da ham o‘rganilgan.

NATIJA VA MUHOKAMA. Uch o‘lchovli Ω soha quyidagi

$$S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=a^2, 0<x<a,\ 0<y<a,\ 0<z<a\}$$

sfera qismi va

$$B_1=\{(x,y,z):y=0,\ x^2+z^2<a^2, 0<x<a, 0<z<a\}$$

$$B_2=\{(x,y,z):z=0,\ x^2+y^2<a^2, 0<x<a, 0<y<a\}$$

$$B_3=\{(x,y,z):x=0,\ x^2+y^2<a^2, 0<y<a, 0<z<a\}$$

chorak doiralardan tashkil topgan.

Ω sohada quyidagi

$$L^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}u\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z+\lambda u=0 \qquad (1)$$

uch o‘lchovli uchta singulyar koeffitsientga ega bo‘lgan tenglamani qaraymiz, bu yerda $u=u(x,y,z)$ - noma’lum funksiya, $\alpha,\beta,\gamma\in R$, jumladan, $\alpha,\beta,\gamma\in\ 0,1/2\ )$, λ-sonli parametr.

(1) tenglama Ω sohada elliptik tipga tegishli bo‘lib, bu sohaning chegaralari bo‘lmish B_1, B_2 va B_3 yarimdoiralar bu tenglama uchun singulyarlik (buzilish) tekisliklari hisoblanadi.

N_λ masala. λ parametrning shunday qiymatlari topilsinki, (1) tenglamaning $C\ \bar{\Omega}\ \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\ \Omega$ sinfga tegishli va

$$\lim_{x\to 0}x^{2\alpha}u_x\ \ x,y,z\ =0,\quad x,y,z\ \in B_3 \qquad (2)$$

$$\lim_{y\to 0}y^{2\beta}u_y\ \ x,y,z\ =0,\quad x,y,z\ \in B_1 \qquad (3)$$

$$\lim_{z\to 0} z^{2\gamma} u_z\ (x,y,z) = 0,\quad (x,y,z) \in B_2 \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{r=a} = 0,\quad (x,y,z) \in S \tag{5}$$

shartni qanoatlantiruvchi trivial bo‘lmagan $u\ (x,y,z)$ yechimi mavjud bo‘lsin.

Odatda λ ning N_λ masalada topilishi talab etilayotgan qiymatlari xos qiymatlar, bu qiymatlarga mos trivial bo‘lmagan funksiyalar masalaning xos funksiyalari deyiladi.

Masalaning tadqiqoti. Buning uchun Ω sohada x,y,z Dekart koordinatalari sistemasi bilan r,θ,φ sferik koordinatalar sistemasini bog‘lab turuvchi

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta$$

formuladan foydalanib, (1) tenglamani sferik koordinatalar sistemasida tasvirlab olamiz. Bu yerda $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta - \vec{t}\ (x,y,z)$, vektor bilan z o‘qi orasidagi burchak; $\varphi - \vec{t}\ (x,y,0)$ vektor bilan x o‘qi orasidagi burchak.

$u(x,y,z) = V(r,\theta,\varphi)$ almashtirishdan foydalanamiz. (1) da ishtirok etgan birinchi va ikkinchi tartibli barcha hosilalarni hisoblab chiqamiz.

$$u_x = \frac{x}{r}V_r + \frac{xz}{r^2\sqrt{r^2-z^2}}V_\theta - \frac{y}{x^2+y^2}V_\varphi;$$

$$u_y = \frac{y}{r}V_r + \frac{zy}{r^2\sqrt{r^2-z^2}}V_\theta + \frac{x}{x^2+y^2}V_\varphi;$$

$$u_z = \frac{z}{r}V_r - \frac{r^2-z^2}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}V_\theta;$$

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2}V_{rr} + \frac{2x^2z}{r^3\sqrt{r^2-z^2}}V_{r\theta} - \frac{2xy}{r\ (x^2+y^2)}V_{r\varphi} + \frac{x^2z^2}{r^4\ (x^2+y^2)}V_{\theta\theta} -$$

$$-\frac{2xyz}{r^2\ (x^2+y^2)\ \sqrt{r^2-z^2}}V_{\theta\varphi} + \frac{y^2}{x^2+y^2}V_{\varphi\varphi} + \frac{r^2-x^2}{r^3}V_r +$$

$$+\frac{zr^2\sqrt{x^2+y^2}-2x^2z\sqrt{x^2+y^2}-x^2zr^2\ \ x^2+y^2\ ^{-1/2}}{r^4\ \ x^2+y^2}V_\theta+\frac{2xy}{x^2+y^2\ ^2}V_\varphi;$$

$$u_{yy}=\frac{y^2}{r^2}V_{rr}+\frac{2y^2z}{r^3\sqrt{r^2-z^2}}V_{r\theta}+\frac{2xy}{r\ \ x^2+y^2}V_{r\varphi}+\frac{y^2z^2}{r^4\ \ r^2-z^2}V_{\theta\theta}+$$

$$+\frac{2xyz}{r^2\ \ x^2+y^2\ \sqrt{r^2-z^2}}V_{\theta\varphi}+\frac{x^2}{x^2+y^2}V_{\varphi\varphi}+\frac{r^2-y^2}{r^3}V_r+$$

$$+\frac{zr^2\sqrt{x^2+y^2}-2y^2z\sqrt{x^2+y^2}-y^2zr^2\ \ x^2+y^2\ ^{-1/2}}{r^4\ \ x^2+y^2}V_\theta-\frac{2xy}{x^2+y^2\ ^2}V_\varphi;$$

$$u_{zz}=\frac{z^2}{r^2}V_{rr}+\frac{2z^2\ \ x^2+y^2}{r^3\sqrt{x^2+y^2}}V_{r\theta}+\frac{x^2+y^2\ ^2}{r^4\ \ x^2+y^2}V_{\theta\theta}+$$

$$+\frac{r^2-z^2}{r^3}V_r+\frac{2z\ \ x^2+y^2}{r^4\sqrt{x^2+y^2}}V_\theta\ .$$

topilgan hosilalarni (1) tenglamaga olib borib qo‘yamiz va $V\ r,\theta,\varphi$ ga nisbatan

$$V_{rr}+\frac{2\ 1+\alpha+\beta+\gamma}{r}V_r+\frac{1+2\alpha+2\beta\ \ ctg\theta-2\gamma tg\theta}{r^2}V_\theta+$$

$$+\frac{1}{r^2}V_{\theta\theta}+\frac{4\ \ \beta\cos^2\varphi-\alpha\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta\sin2\varphi}V_\varphi+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}V_{\varphi\varphi}+\lambda V=0 \qquad (6)$$

ko‘rinishdagi tenglamani hosil qilamiz.

(6) tenglamada o‘zgaruvchilarni ajratamiz. Bu jarayonni ikkita bosqichda bajaramiz. Birinchi bo‘lib (6) tenglamani $V\ r,\theta,\varphi=R\ r\ Q\ \theta,\varphi$ ko‘rinishda o‘zgaruvchilarini ajratib olamiz va $R\ r\ Q\ \theta,\varphi$ ifodaga bo‘lib, natijada quyidagi ko‘rinishdagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{1}{R\ r}\left[R''\ r\ +\frac{2\ 1+\alpha+\beta+\gamma}{r}R'\ r\ +\lambda R\ r\ \right]=$$

$$= -\frac{1}{Q}\left[\frac{1}{r^2}Q_{\theta\theta} + \frac{1+2\alpha+2\beta\ ctg\theta - 2\gamma tg\theta}{r^2}Q_\theta\right] + \\ + \left(-\frac{1}{Q}\right)\left[\frac{4\ \beta\cos^2\varphi - \alpha\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta\sin 2\varphi}Q_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}Q_{\varphi\varphi}\right] \quad (7)$$

(7) tenglamada chap tomondagi o‘zgaruvchilar, o‘ng tomonda joylashgan o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan holda o‘zgarganda ham tenglik o‘rinli bo‘lganligi uchun bu tenglikni qandaydir o‘zgarmas χ songa tenglashtirishimiz mumkin. Bu yerdan ikkita tenglamani hosil qilamiz:

$$-\left[Q_{\theta\theta}\ \theta,\varphi\ + \left[\ 1+2\alpha+2\beta\ ctg\theta - 2\gamma tg\theta\right]Q_\theta\ \theta,\varphi\ + \right.$$

$$\left. + \frac{4\ \beta\cos^2\varphi - \alpha\sin^2\varphi}{\sin^2\theta\sin 2\varphi}Q_\varphi\ \theta,\varphi\ + \frac{1}{\sin^2\theta}Q_{\varphi\varphi}\ \theta,\varphi\right] = \chi Q\ \theta,\varphi\ , \quad (8)$$

$$r^2R''\ r\ + 2\ 1+\alpha+\beta+\gamma\ rR'\ r\ + \lambda r^2 - \chi\ R\ r\ = 0,\ 0 < r < a \quad (9)$$

Endi esa (8) tenglamada o‘zgaruvchilarni $Q\ \theta,\varphi\ = T\ \theta\ \Phi\ \varphi$ formula yordamida ajratamiz.

$$\frac{\sin^2\theta\ T''\ \theta\ + \left[\ 1+2\alpha+2\beta\ ctg\theta - 2\gamma tg\theta\right]T'\ \theta}{T\ \theta} + \chi\sin^2\theta = \\ = \frac{-\left[\Phi''\ \varphi\ + \frac{4\ \beta\cos^2\varphi - \alpha\sin^2\varphi}{\sin 2\varphi}\Phi'\ \varphi\right]}{\Phi\ \varphi}. \quad (10)$$

Bu yerda ham xuddi yuqoridagi holat, har ikkala tomonni μ o‘zgarmas soniga tenglashtiramiz. Natijada bizda:

$$\Phi''\ \varphi\ + \frac{4\ \beta\cos^2\varphi - \alpha\sin^2\varphi}{\sin 2\varphi}\Phi'\ \varphi\ + \mu\Phi\ \varphi\ = 0,\ \ 0 < \varphi < \pi/2, \quad (11)$$

$$T''\ \theta\ + \left[\ 1+2\alpha+2\beta\ ctg\theta - 2\gamma tg\theta\right]T'\ \theta\ + (\chi - \mu/\sin^2\theta)T\ \theta\ = 0, \quad (12)$$

$$0 < \theta < \pi/2$$

tenglamalar hosil bo‘ladi.

{(2)-(5)} shartlardan bu oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy shartlarni keltirib chiqaramiz.

$$r^2R''\ r\ +2\ 1+\alpha+\beta+\gamma\ rR'\ r\ +\ \lambda r^2-\chi\ R\ r\ =0,\quad 0<r<a, \tag{13}$$

$$\left|R\ 0\right|=+\infty,\ R'\ a\ =0; \tag{14}$$

$$T''\ \theta\ +\left[\ 1+2\alpha+2\beta\ ctg\theta-2\gamma tg\theta\right]T'\ \theta\ +\left(\chi-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)T\ \theta\ =0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

$$\left|T\ 0\right|<+\infty,\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\cos\theta^{\ 2\gamma}T'\ t\ =0 \tag{16}$$

$$\Phi''\ \varphi\ +\frac{4\ \beta\cos^2\varphi-\alpha\sin^2\varphi}{\sin 2\varphi}\Phi'\ \varphi\ +\mu\Phi\ \varphi\ =0,\ \ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

$$\lim_{\varphi\to 0}\sin\varphi^{\ 2\beta}\Phi'\ \varphi\ =0,\ \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\cos\varphi^{\ 2\alpha}\Phi'\ \varphi\ =0 \tag{18}$$

Bu masalalarning tadqiqotiga o‘tamiz. Birinchi bo‘lib, {(17), (18)} masalaning xos qiymatlari va ularga mos keluvchi trivial bo‘lmagan xos funksiyalarini topamiz. Buning uchun (17) tenglamada $z=\sin^2\varphi$ almashtirish bajaramiz va natijada Gausssning gipergeometrik tenglamasi deb ataluvchi tenglamani hosil qilamiz:

$$z\ 1-z\ \tilde{\Phi}''\ z\ +\left[\frac{1}{2}+\beta-\ 1+\alpha+\beta\ z\right]\tilde{\Phi}'\ z\ +\frac{\mu}{4}\tilde{\Phi}\ z\ =0, \tag{19}$$

bu yerda $\tilde{\Phi}\ z\ =\Phi\ \arcsin\sqrt{z}$.

(19) tenglamaning umumiy yechimini topamiz va belgilashdan orqaga qaytamiz:

$$\Phi\ \varphi\ =AF\left[\ \alpha+\beta+\omega\ /2,\ \alpha+\beta-\omega\ /2,1/2+\beta;\sin^2\varphi\right]+$$

$$+B\ \sin\varphi^{\ 1-2\beta}F\left[\ 1+\alpha-\beta+\omega\ /2,\ 1+\alpha-\beta-\omega\ /2,3/2-\beta;\sin^2\varphi\right], \tag{20}$$

bu yerda $\omega=\sqrt{\alpha+\beta^{\ 2}+\mu}>0$, A va B o‘zgarmas kattaliklar.

(20) ni (18) dagi 1-shartga qo‘ysak, $B=0$ kelib chiqadi. Demak, (17) tenglamaning (18) shartni qanoatlantiruvchi yechimi quyidagi ko‘rinishda ekanligi kelib chiqadi:

$$\Phi\ \varphi\ =AF\left[\ \alpha+\beta+\omega\ /2,\ \alpha+\beta-\omega\ /2,1/2+\beta;\sin^2\varphi\right] \tag{21}$$

(21) ni (18) ni ikkinchi shartiga qo‘yib, hamda maxsus funksiyalar formulalaridan foydalanib, quyidagi ifodaga kelamiz:

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} A\ \cos\varphi^{\ 2\alpha+1}\ \frac{\alpha+\beta\ ^2-\omega^2}{1+2\beta}F\left(\frac{\alpha+\beta+\omega+2}{2},\frac{\alpha+\beta-\omega+2}{2},\frac{3}{2}+\beta;\sin^2\varphi\right)=0$$

Bu yerdan,

$$A\frac{\alpha+\beta\ ^2-\omega^2}{1+2\beta}F\left(\frac{\alpha+\beta+\omega+2}{2},\frac{\alpha+\beta-\omega+2}{2},\frac{3}{2}+\beta;1\right)=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Endi keyingi qadamda quyidagi formulani qo‘llaymiz:

$$F\ \ c-a,c-b,c;1\ =\frac{\Gamma\ c\ \Gamma\ a+b-c}{\Gamma\ a\ \Gamma\ b},\ c-a-b<0$$

$$F\left(\frac{\alpha+\beta+\omega+2}{2},\frac{\alpha+\beta-\omega+2}{2},\frac{3}{2}+\beta;1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\beta\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha-\beta-\omega}{2}\right)}$$

$\Gamma\left[1-\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega}{2}\right)\right]\neq 0$ deb hisoblab va $\Gamma\ z\ \Gamma\ 1-z\ =\frac{\pi}{\sin\ \pi z}$ formuladan foydalanib, quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$A\frac{\alpha+\beta\ ^2-\omega^2}{1+2\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\beta\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1+\alpha-\beta-\omega}{2}\right)}\sin\left[\pi\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega}{2}\right)\right]=0$$

bu yerda $A\neq 0$

$\sin\left[\pi\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega}{2}\right)\right]=0$, ekanligidan, $\omega_n=2n-\alpha+\beta$, $n\in N$. Demak {(17),(18)} masalaning xos sonlari $\mu_n=\omega_n^{\ 2}-\ \alpha+\beta\ ^2$, xos funksiyalari esa

$$\Phi_n\ \varphi\ =A_nF\left(\beta+n,\alpha-n,\frac{3}{2}+\beta;\sin^2\varphi\right) \qquad (22)$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan.

Endi {(13), (14)} masalani tadqiqiga o‘tamiz. Buning uchun (10) tenglamada o‘zgaruvchilarni $R\ r\ =\ \rho/\sqrt{\lambda}^{\ 1/2-\ 1+\alpha+\beta+\gamma}\ M\ \rho\ ,\quad \rho=\sqrt{\lambda}r$ formula bo‘yicha almashtiramiz, natijada bizda Bessel tenglamasi paydo bo‘ladi:

$$\rho^2M''\ \rho\ +\rho M'\ \rho\ +\ \rho^2-\sigma^2\ M\ \rho\ =0. \tag{23}$$

Almashtirishlarni bajargandan keyin (23) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$R\ r\ =c_1r^{1/2-\ 1+\alpha+\beta+\gamma}J_{\ \sigma}\ \sqrt{\lambda}r\ +c_2r^{1/2-\ 1+\alpha+\beta+\gamma}Y_{\ \sigma}\ \sqrt{\lambda}r\ ,\ 0<r<a \tag{24}$$

Bu yerda $\sigma^2=\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma\right)^2+\chi$, c_1 va c_2 - o‘zgarmas kattaliklar, $J_\sigma(z)$ va $Y_\sigma(z)$ lar esa σ tartibli Besselning birinchi va ikkkinchi tur funksiyalari hisoblanadi hamda uning ko‘rinishi quyidagicha:

$$J_\sigma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z/2)^{2n+\sigma}}{n!\,\Gamma(n+\sigma+1)}, \tag{25}$$

$$Y_\sigma(z)=\frac{J_\sigma(z)\cos\sigma\pi-J_{-\sigma}(z)}{\sin\sigma\pi},\quad \mathrm{Re}\,\sigma>0. \tag{26}$$

(24) yechimni (14) shartga bo‘ysundiramiz va (25), (26) formulalarni inobatga olib yozamiz:

$$R\ r\ =c_1r^{1/2-\ 1+\alpha+\beta+\gamma}J_{\ \sigma}\ \sqrt{\lambda}r \tag{27}$$

{(15), (16)} masalani tadqiq etishga kirishamiz.

Buning uchun (15) tenglamada yangi o‘zgaruvchi $\xi=\sin^2\theta$ ga o‘tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\xi\ 1-\xi\ \tilde{T}''\ \xi\ +\left[\ 1+\alpha+\beta\ -\ \alpha+\beta+\gamma+3/2\ \xi\right]\tilde{T}'\ \xi\ +$$

$$+\ 1/4\ \ \chi-\mu/\xi\ \tilde{T}\ \xi\ =0,\quad 0<\xi<1, \tag{28}$$

(28) oddiy differensial tenglama bo‘lib, u Goyn tipidagi umumlashgan tenglama hisoblanadi, bu yerda $\tilde{T}\ \xi\ =T\ \arcsin\sqrt{\theta}$.

$$T\ t\ =C\sum_{k=0}^{+\infty}A_kF\ \ a_1,a_2;a_3+k;t\ \ +$$

$$+Dt^{1-a_3-a_4}\sum_{k=0}^{+\infty}A_k F\ a_1-a_3+1,a_2-a_3+1;2-a_3+k;t \qquad (29)$$

(29) formulaga asoslanib, (28) tenglamaning umumiy yechimini topamiz va kiritilgan belgilashlarni hisobga olib, (15) tenglamaning umumiy yechimini quyidagicha yozamiz:

$$T\ \theta\ =C\sum_{k=0}^{\infty}A_k F\left[\frac{1}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\sigma}{2},\frac{1}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma-\sigma}{2};1+\alpha+\beta+k;\sin^2\theta\right]$$

$$+D\ \sin\theta\ ^{-2\alpha-2\beta}F\left[\frac{1}{4}+\frac{\gamma-\alpha-\beta+\sigma}{2},\frac{1}{4}+\frac{\gamma-\alpha-\beta-\sigma}{2};1-\alpha-\beta+k;\sin^2\theta\right] \qquad (30)$$

bu yerda C, D-o‘zgarmas sonlar, $\sigma^2=\ \alpha+\beta+\gamma+1/2\ ^2+\chi$, va F[...]-Gausssning gipergeometrik funksiyasi, A_k koeffitsientlar esa quyidagicha aniqlanadi:

$$A_0=1,\ A_{k+1}=\frac{k\ \ \alpha+\beta+k\ \ -\ \mu_n/4}{k+1\ \ 1+\alpha+\beta+k}A_k,\ k=0,1,2,...$$

(15) tenglamaning (16) shartni birinchisini qanoatlantiruvchi yechimi, $C=1$ bo‘lganda, quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$T\ \theta\ =\sum_{k=0}^{\infty}A_k F\left[\frac{1}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\sigma}{2},\frac{1}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma-\sigma}{2};1+\alpha+\beta+k;\sin^2\theta\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha+\beta+n/2\ _k\ \ -n/2\ _k}{k!\ 1+\alpha+\beta\ _k}\times \qquad (31)$$

$$\times F\left[\frac{1}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\sigma}{2},\frac{1}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma-\sigma}{2};1+\alpha+\beta+k;\sin^2\theta\right]$$

Rabe alomati asosida quyidagi sonli qatorning yaqinlashuvini isbotlash mumkin:

$$T\ 0\ =\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha+\beta+n/2\ _k\ \ -n/2\ _k}{k!\ 1+\alpha+\beta\ _k}.$$

Gipergeometrik funksiyaning yoyilmasiga asoslanib, uning yig’indisi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$F\ \alpha+\beta+n/2,-n/2;1+\alpha+\beta;1\ =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\ 1+\alpha+\beta}{\Gamma\ 1+\alpha+\beta+n/2\ \ \Gamma\ 1-n/2}, n=1,3,5,...\\ 0, n=2,4,6,...\end{cases}$$

Demak, (29) funksiya (16) shartning birinchisini qanoatlantiradi.

Endi (29) funksiyani (16) shartning ikkinchisi uchun ham ishlaymiz:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{\ 2\gamma} T^{'}\ \theta\ =$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)^2-\frac{\sigma^2}{4}\right]\times$$

$$\times\frac{\Gamma\ 1+\alpha+\beta\ \ \Gamma\ 1/2+\gamma}{\Gamma\ \ 5/2+\alpha+\beta+\gamma+\sigma\ \ /2\ \ \Gamma\ \ 5/2+\alpha+\beta+\gamma-\sigma\ \ /2}=0.$$

Olingan kasrning surat va maxrajini $\Gamma\ 1-\ 5/2+\alpha+\beta+\gamma-\sigma\ \ /2\ \neq 0$ ga ko‘paytirib, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilamiz:

$$2\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)^2-\frac{\sigma^2}{4}\right]\times$$

$$\times\frac{\Gamma\ \ 2+\alpha+\beta\ \ \sin\left[\pi\ \ \ 5/2+\alpha+\beta+\gamma-\sigma\ \ /2\ \right]}{\pi\Gamma\ \ \ 5/2+\alpha+\beta+\gamma+\sigma\ \ /2\ \ \Gamma^{-1}\ 1-\ 5/2+\alpha+\beta+\gamma-\sigma\ \ /2}$$

Mazkur tenglik $\sin\left[\pi\ \ \ 5/2+\alpha+\beta+\gamma-\sigma\ \ /2\ \right]=0$ bo‘lganda bajariladi. Bu esa trigonometrik tenglama bo‘lib, u faqat haqiqiy ildizlarga ega.

Ushbu tenglamaning yechimini ifodalovchi formuladan va $\sigma\geq 1/2+\alpha+\beta+\gamma$ tengsizlikdan hamda quyidagi:

$$5/4+\alpha/2+\beta/2+\gamma/2+\sigma/2\neq 0,-1,-2...,,$$

$$-1/4-\alpha/2-\beta/2-\gamma/2+\sigma/2\neq 0,-1,-2...,$$

munosabatdan foydalanib,

$$\sigma=\sigma_l=2l+1/2+\alpha+\beta+\gamma,\ l\in N \qquad (32)$$

ni hosil qilamiz.

$\sigma = \sqrt{1/2+\alpha+\beta+\gamma^{\ 2}+\chi}$ ekanligidan foydalanib, $\chi_l = \sigma_l^{\ 2} - 1/2+\alpha+\beta+\gamma^{\ 2}$, $l \in N$ ni hosil qilamiz, bu yerda σ_l - (32) tenglik bilan aniqlanadigan son. χ_l esa {(15), (16)} masalaning xos sonlari.

(29) da $\sigma = \sigma_l$, $l \in N$ deb olib, {(15), (16)} masalaning xos funksiyalarini xos soni χ_l uchun topamiz:

$$T_{nl}\ \theta\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha+\beta+n/2\ _k\ -n/2\ _k}{k!\ 1+\alpha+\beta\ _k} \times$$

$$\times F\ l+1/2+\alpha+\beta+\gamma, -l; 1+\alpha+\beta+k; \sin^2\theta\ \ , \theta \in 0, \pi/2\ \ , n,l \in N \quad (33)$$

Har qanday k, l va $\theta \in 0, \pi/2$ qiymatlar uchun $F\ l+1/2+\alpha+\beta+\gamma, -l; 1+\alpha+\beta+k; \sin^2\theta$ funksiya chegaralangan bo‘ladi. Shuning uchun (33) qator $\theta \in 0, \pi/2$ da absolut va tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi. Natijada $T_{nl}\ \theta$ funksiya $\theta \to \pi/2$ da ham chegaralangan bo‘ladi. Yuqoridagilardan kelib chiqib, (33) qator $0, \pi/2$ kesmada absolut va tekis yaqinlashuvchi degan xulosaga kelish mumkin.

$T_{nl}\ \theta$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$T_{nl}\ \theta\ = F_3\ \ l+1/2+\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta+n/2, -l, -n/2; 1+\alpha+\beta; \sin^2\theta, 1$$

$$n,l \in N \quad (34)$$

bu yerda $F_3 = a, a', b, b'; c; w, z$, $|w|, |z| < 1$ -Appelning gipergeometrik funksiyasi.

Endi (32) tenglik bilan aniqlangan $\sigma = \sigma_l = 2l+1/2+\alpha+\beta+\gamma$, $l \in N$ sonlar uchun λ parametrning qiymatlarini topamiz. (27) funksiyani (14) shartning ikkinchisiga qo‘yib,

$$J_{\sigma+1}\ \sqrt{\lambda}a\ = 0,\ \sigma = 1/2+\alpha+\beta+\gamma \quad (35)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Ma’lumki, $\nu > -1$ bo‘lganda, $J_\nu\ x$ Bessel funksiyasi chekli sondagi nol nuqtalarga ega bo‘lib, ularning barchasi haqiqiy va juft-juft qarama qarshi ishoralidir.

Shu ma’lumotga asosan va $\sigma+1>0$ ekanligidan, (35) tenglama ildizlari chekli sonda bo‘ladi. (35) tenglamaning musbat nollarini δ_{ml} bilan belgilab, {(13), (14)} masalaning trivial bo‘lmagan yechimlari mavjud bo‘ladigan λ parametr qiymatlarini , ya’ni {(13), (14)} masalaning xos qiymatlarini topamiz: $\lambda=\lambda_{ml}=\left(\frac{\delta_{ml}}{a}\right)^2$, $m,l\in N$. Unga mos xos funksiyalar esa,

$$R_{ml}\ r\ =c_{ml}r^{-1/2+\alpha+\beta+\gamma}J_{\sigma_l}\left(\frac{\delta_{ml}}{a}r\right),\ m,l\in N \tag{36}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Demak, biz qo‘ygan Neyman masalasi sanoqli sondagi xos qiymat va xos funksiyalarga ega. Uning xos qiymatlari $\lambda=\lambda_{ml}=\left(\frac{\delta_{ml}}{a}\right)^2$, $m,l\in N$ sonlaridan iborat bo‘lib, xos funksiyalari esa (22), (34), (36)formulalarga asosan quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$u_{nml}=c_{nml}r^{-1/2+\alpha+\beta+\gamma}J_{\sigma_l}\left(\frac{\delta_{ml}}{a}r\right)F\left(\beta+n,\alpha-n,\frac{3}{2}+\beta;\sin^2\varphi\right)\times$$

$$\times F_3\ l+1/2+\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta+n/2,-l,-n/2;1+\alpha+\beta;\sin^2\theta,1$$

bu yerda, c_{nml} -o‘zgarmas son.

XULOSA. Ushbu maqolada markazi koordinata boshida bo‘lgan sharning sakkizdan bir qismida uch o‘lchovli fazoda uchta singulyar koeffitsientli elliptik tipdagi tenglama uchun Neyman masalasi tadqiq qilindi. Tadqiqotlar natijasi shuni ko‘rsatadiki, bunday tenglamalar sharsimon sohada nisbatan kam o‘rganilgan bo‘lib, keltirilgan metodlar yangi yechimlar olish imkonini beradi. Bu natijalar kelgusida uch o‘lchovli elliptik tenglamalarni va ularning turli cheklangan sohalardagi vazifalarini yechishda qo‘llanishi mumkin.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука. 1981. 448 –с.

2. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 407 с.

4. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–7.

5. S.A. Aldashev, “The correctness of the local boundary value problem in cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation,” Izv. Saratov Univ., Ser. Math. Mech. Inform., 15, 365-371(2015). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-365-371

6. S.A. Aldashev, “Nonlocal Boundary-Value Problems in the Cylindrical Domain for the Multidimensional Laplace Equation,” Izv. Saratov Univ., Ser. Math. Mech. Inform., 19, 16-23(2019). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-16-23

7. K.T. Karimov, “Nonlocal problem for an elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped,” Lobachevskii Journal of Mathematics, 41, 46-57(2020). DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220010084

8. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. Вестник Национального университета Узбекистана. 2017. 2/1,-С.195-206.

9. Karimov K.T. On one version of the Dirichlet-Neumann problem for a three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients. Uzbek Mathematical Journal, 3, 102-115(2018). DOI: https://doi.org/10.29229/uzmj.2018-3-10

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЛОГИСТИКЕ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ, МОДЕЛИ И ПРАКТИКА ПРИМЕНЕНИЯ

Бабаджанов Ш.Ш.

Ташкентский государственный экономический университет.

shopulat.babadjanov@tsue.uz

Аннотация: В данной статье рассматриваются основные методы оптимизации, применяемые в логистике и управлении цепями поставок. Проведён сравнительный анализ классических математических методов (линейное и целочисленное программирование, метод ветвей и границ) и современных эволюционных алгоритмов (генетические алгоритмы, метод роя частиц, имитация отжига). Представлены математические постановки задач маршрутизации транспортных средств (VRP) и задачи коммивояжёра (TSP). На основе эмпирического исследования логистической деятельности предприятий Узбекистана показана практическая эффективность применения предложенных методов: снижение транспортных расходов на 25–30%, сокращение времени доставки на 28–35%, повышение уровня обслуживания клиентов с 87% до 96%. Обоснованы перспективы интеграции методов искусственного интеллекта и машинного обучения в логистическую оптимизацию.

Ключевые слова: оптимизация логистики, линейное программирование, генетические алгоритмы, задача маршрутизации транспортных средств, метод роя частиц, управление цепями поставок, имитация отжига, интеллектуальные транспортные системы.

ВВЕДЕНИЕ (INTRODUCTION). Логистика представляет собой одну из наиболее динамично развивающихся сфер современной экономики. В условиях глобализации торговли, стремительного роста электронной коммерции и повышения требований потребителей к скорости и качеству доставки эффективное управление логистическими процессами приобретает критическое значение для конкурентоспособности предприятий [1]. По данным Мирового банка, на долю логистических затрат приходится от 8% до 15% ВВП развитых стран и до 20–25% в развивающихся экономиках, включая страны Центральной Азии [2].

В Республике Узбекистан, осуществляющей масштабные экономические реформы и последовательно интегрирующейся в международные торговые цепочки, логистическая отрасль переживает период интенсивного роста. Стратегия «Узбекистан – 2030» и национальные программы развития транспортно-логистического комплекса предусматривают значительное снижение логистических издержек и повышение пропускной способности транспортных коридоров. Достижение этих целей невозможно без широкого внедрения научно обоснованных методов оптимизации [3].

Проблема оптимизации логистических процессов относится к классу задач комбинаторной и непрерывной оптимизации, многие из которых являются NP-трудными (нелинейными по полиномиальному времени). Это означает, что точные алгоритмы их решения имеют экспоненциальную вычислительную сложность, что при практических масштабах задач делает необходимым применение приближённых и эвристических методов [4]. За последние два десятилетия в арсенале исследователей и практиков появились мощные метаэвристические алгоритмы, основанные на имитации природных процессов: эволюции, роевого поведения, физических явлений.

Несмотря на широкий спектр доступных инструментов, большинство логистических предприятий Узбекистана по-прежнему используют субоптимальные методы планирования, основанные на эмпирическом опыте диспетчеров. Это обусловливает актуальность систематизации и практического освоения современных методов оптимизации применительно к условиям отечественной логистики.

Цель данного исследования — провести комплексный анализ методов оптимизации в логистике, систематизировать их по классам задач, разработать математические постановки ключевых оптимизационных задач и на основе эмпирических данных оценить практическую эффективность предложенных подходов для логистических предприятий Узбекистана.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И МЕТОДОЛОГИЯ (LITERATURE REVIEW AND METHODS). Теоретические основы оптимизации в логистике восходят к работам Л. Канторовича (1939), разработавшего метод линейного программирования применительно к задачам экономического планирования, и Г. Данцига (1947), предложившего симплекс-метод, который по сей день остаётся одним из наиболее эффективных алгоритмов решения задач линейного программирования [5]. Задача коммивояжёра, впервые формализованная в XIX веке и поныне служащая эталонным тестом для алгоритмов оптимизации, была математически строго исследована в работах Флада (1956) и Хелда и Карпа (1962) [6].

Современный этап развития методов оптимизации в логистике характеризуется активным применением метаэвристических алгоритмов. Генетические алгоритмы, предложенные Холландом (1975) и развитые применительно к логистическим задачам в работах Голдберга (1989), показали высокую эффективность для решения задачи маршрутизации транспортных средств (VRP — Vehicle Routing Problem) [7]. Метод роя частиц, разработанный Кеннеди и Эберхартом (1995), нашёл широкое применение в оптимизации цепей поставок и задачах размещения складов [8].

В области применения методов оптимизации в логистике центральноазиатских стран следует выделить работы Абдуллаева и Мухаммадалиева (2021), исследовавших специфику

транспортно-логистических сетей в условиях континентального расположения Узбекистана, а также разработки Ташкентского государственного экономического университета в области математического моделирования логистических систем [9]. Международные исследования подчёркивают потенциал методов машинного обучения для прогнозирования спроса и динамической маршрутизации: работы Тана и соавторов (2020) продемонстрировали, что глубокое обучение позволяет снизить ошибку прогнозирования транспортного спроса на 18–23% по сравнению с классическими статистическими методами [10].

Методология исследования. Методологическую основу исследования составляют методы системного анализа, математического моделирования и сравнительного анализа алгоритмов. Эмпирическая часть работы базируется на данных, собранных в ходе исследования деятельности 12 логистических предприятий Ташкентской, Самаркандской и Ферганской областей в 2022–2024 годах. Совокупный объём обработанных маршрутных данных составил более 45 000 рейсов.

Для сравнения методов оптимизации применялась следующая система критериев: (1) качество получаемого решения (отклонение от известного оптимума); (2) вычислительная сложность и время работы алгоритма; (3) масштабируемость при увеличении размерности задачи; (4) простота настройки гиперпараметров; (5) робастность — устойчивость результата при изменении входных данных. Вычислительные эксперименты проводились на тестовых наборах данных библиотеки TSPLIB и Solomon Benchmark для задачи VRP с временными окнами.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЛОГИСТИКЕ (DISCUSSION)

1. Математическая постановка ключевых логистических задач

Задача маршрутизации транспортных средств (VRP) является центральной в операционной логистике. В общем виде она формулируется следующим образом: имеется депо (узел 0) и множество клиентов N = {1, 2, ..., n}, каждый из которых предъявляет спрос d_i > 0. Парк транспортных средств K = {1, 2, ..., k} с грузоподъёмностью Q_v используется для обслуживания всех клиентов при минимизации суммарных транспортных издержек.

Математическая модель VRP в постановке задачи смешанного целочисленного программирования:

$$\min Z = \Sigma\Sigma\Sigma\, c_{ij} \cdot x_{ijk}$$

$$(i \in N \cup \{0\}, j \in N \cup \{0\}, k \in K)$$

при следующих ограничениях: (1) каждый клиент посещается ровно одним транспортным средством ровно один раз; (2) суммарный спрос на каждом маршруте не превышает грузоподъёмность транспортного средства: $\Sigma\, d_i \cdot y_{ik} \le Q_v$ для всех $k \in K$; (3)

каждый маршрут начинается и заканчивается в депо; (4) переменная x_ijk ∈ {0, 1} указывает, проезжает ли транспортное средство k из узла i в узел j.

При наличии временны́х окон задача расширяется до VRPTW (VRP with Time Windows): для каждого клиента i задан интервал [a_i, b_i], в течение которого должно быть начато обслуживание. Введение временны́х ограничений существенно усложняет задачу, однако значительно повышает практическую применимость модели.

2. Классические методы точной оптимизации

Линейное программирование (ЛП) обеспечивает нахождение глобального оптимума для задач с линейной целевой функцией и линейными ограничениями. Симплекс-метод Данцига и метод внутренней точки (Interior Point Method) обеспечивают решение задач ЛП за полиномиальное время. В логистике ЛП применяется для задач транспортировки (классическая транспортная задача Хичкока–Купманса), оптимального распределения грузопотоков в сети и управления запасами при непрерывных переменных.

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП) и метод ветвей и границ (Branch and Bound) используются для задач с целочисленными или булевыми переменными. Метод ветвей и границ последовательно разбивает пространство решений на подмножества и вычисляет нижние оценки целевой функции, отсекая заведомо неоптимальные ветви дерева поиска. Для задачи коммивояжёра с n узлами этот подход гарантирует нахождение оптимального решения, однако в худшем случае требует просмотра O(n!) вариантов.

3. Генетические алгоритмы

Генетические алгоритмы (ГА) относятся к классу эволюционных вычислений и имитируют механизмы естественного отбора. Алгоритм оперирует популяцией P(t) = {x_1^t, x_2^t, ..., x_N^t} из N особей, каждая из которых представляет возможное решение задачи. Основной цикл ГА состоит из следующих операций:

1. Оценка приспособленности (fitness evaluation): вычисляется значение целевой функции f(x_i) для каждой особи популяции;
2. Селекция (selection): особи с лучшими значениями целевой функции выбираются для воспроизводства с вероятностью P(x_i) = f(x_i) / Σf(x_j);
3. Скрещивание (crossover): из двух родительских хромосом с вероятностью p_c формируются потомки путём обмена генетическим материалом;
4. Мутация (mutation): случайное изменение генов потомков с малой вероятностью p_m предотвращает преждевременную сходимость.

Для задачи VRP хромосома обычно кодируется как перестановка клиентов, а оператор кроссинговера PMX (Partially Mapped Crossover) обеспечивает корректность решений. Параметры алгоритма: размер популяции N = 100–200, вероятность скрещивания p_c = 0,85–0,95, вероятность мутации p_m = 0,01–0,05, критерий останова — 500–1000 поколений без улучшения.

4. Метод роя частиц (Particle Swarm Optimization)

Метод роя частиц (PSO) моделирует социальное поведение стаи птиц или роя рыб. Каждая частица i движется в пространстве поиска R^d, имея позицию x_i и скорость v_i. Правила обновления определяются уравнениями:

$$v_i(t+1) = \omega \cdot v_i(t) + c_1 \cdot r_1 \cdot (p_best_i - x_i(t)) + c_2 \cdot r_2 \cdot (g_best - x_i(t))$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$$

где ω — коэффициент инерции (ω ∈ [0,4; 0,9]); c_1, c_2 — когнитивный и социальный коэффициенты ускорения (обычно $c_1 = c_2 = 2,0$); r_1, r_2 — случайные числа из равномерного распределения U(0,1); p_best_i — лучшая известная позиция частицы i; g_best — лучшая позиция, найденная всем роем.

В логистике PSO применяется для задач непрерывной оптимизации: оптимального размещения распределительных центров, управления запасами с непрерывными переменными, минимизации транспортных издержек в многоуровневых цепях поставок. Для дискретных задач используются дискретные модификации PSO — DPSO.

5. Имитация отжига (Simulated Annealing)

Метод имитации отжига (SA) заимствует физическую метафору из процесса отжига металлов: при медленном охлаждении система достигает состояния с минимальной энергией. В алгоритме текущее решение x заменяется соседним x' с вероятностью, зависящей от «температуры» T и изменения целевой функции ΔE:

$$P(\text{принять } x') = 1, \text{ если } \Delta E \le 0; \quad \exp(-\Delta E / T), \text{ если } \Delta E > 0$$

Ключевым преимуществом SA является способность выходить из локальных оптимумов, принимая худшие решения с положительной вероятностью. По мере снижения температуры (согласно расписанию охлаждения $T(t) = T_0 \cdot \alpha^t$, где α ∈ [0,85; 0,99]) алгоритм всё строже требует улучшения целевой функции. При логарифмическом расписании охлаждения SA теоретически гарантирует нахождение глобального оптимума, однако на практике применяются более быстрые расписания.

Таблица 1. Сравнительная характеристика методов оптимизации в логистике

Метод	Тип задачи	Сложность	Применение в логистике	Преимущества
Линейное программирование	Непрерывная	Полиномиальная	Оптимизация маршрутов, распределение ресурсов	Глобальный оптимум, математически строго
Генетические алгоритмы	Комбинаторная	Зависит от параметров	VRP, TSP, задача о назначениях	Гибкость, параллельный поиск
Имитация отжига	Комбинаторная	Полиномиальная	Складская логистика, маршрутизация	Избегает локальных оптимумов
Метод роя частиц	Непрерывная/смешанная	Высокая эффективность	Оптимизация цепей поставок	Простота реализации, быстрая сходимость
Нейронные сети	Обучение с учителем	Высокая	Прогнозирование спроса, маршрутизация	Обработка больших данных
Метод ветвей и границ	Целочисленная	NP-полная	Задача коммивояжёра, планирование	Точное решение

РЕЗУЛЬТАТЫ (RESULTS)

Эмпирические результаты апробации методов

Апробация методов оптимизации проводилась на примере сети доставки крупного дистрибьюторского предприятия г. Ташкента, обслуживающего 847 постоянных точек розничной торговли. Исходные данные характеризовались следующими параметрами: 18 транспортных средств грузоподъёмностью 3,5–12 тонн, суточный объём поставок — 42 тонны, радиус зоны доставки — 120 км, наличие временны́х окон у 68% клиентов.

На первом этапе была решена транспортная задача методом линейного программирования с использованием стандартного симплекс-метода. Задача включала 847 переменных и 215 ограничений. Время решения на ЭВМ составило 2,3 секунды. Полученное расписание обеспечило сокращение суточного пробега с 4 820 до 3 640 км (–24,5%).

На втором этапе для учёта временны́х ограничений была применена задача VRP с временны́ми окнами (VRPTW), решаемая генетическим алгоритмом. Параметры ГА: размер популяции 150, число поколений 800, вероятность скрещивания 0,90, вероятность мутации 0,02. Сходимость алгоритма достигалась в среднем за 420 поколений. Результат: снижение пробега до 3 580 км, сокращение парка до 13 единиц.

Метод роя частиц (PSO) применялся для оптимизации дислокации трёх промежуточных складских терминалов. Используя координаты 847 клиентских точек и данные

о частоте доставок, PSO за 1 200 итераций определил оптимальные местоположения терминалов, обеспечив сокращение среднего плеча доставки на 18,4 км.

Таблица 2. Сравнительные показатели эффективности до и после оптимизации

Показатель	До оптимизации	После оптимизации (ЛП)	После оптимизации (ГА)	Снижение (%)
Общий пробег, км/день	4 820	3 640	3 580	25,7%
Количество транспортных средств	18	14	13	27,8%
Время доставки (среднее), ч	4,2	3,1	2,9	30,9%
Затраты на топливо, тыс. сум/день	12 400	9 200	9 050	27,0%
Уровень обслуживания клиентов, %	87%	94%	96%	+9,2%
Загрузка склада, %	68%	82%	85%	+17,6%

Анализ данных таблицы 2 показывает, что применение методов оптимизации обеспечило системное улучшение всех ключевых показателей логистической деятельности. Наиболее значимым результатом следует считать повышение уровня обслуживания клиентов с 87% до 96%, что имеет прямое влияние на удержание клиентской базы и конкурентоспособность предприятия.

Совокупный экономический эффект от внедрения оптимизационных решений составил 3 350 тыс. сум в день, или около 1,22 млрд сум в год (при 365 рабочих днях). При единовременных затратах на разработку и внедрение программного обеспечения порядка 180 млн сум срок окупаемости составил менее 2 месяцев.

Оценка вычислительной эффективности алгоритмов

Тестирование алгоритмов на задачах различной размерности (от 50 до 1 000 клиентских точек) выявило следующие закономерности. Для задач малой и средней размерности (до 200 узлов) метод ветвей и границ с эффективными нижними оценками (например, решением транспортной задачи) обеспечивает оптимальное или близкое к оптимальному решение за приемлемое время. При увеличении размерности свыше 200 узлов вычислительное время экспоненциально возрастает, что делает необходимым применение эвристических методов.

Генетический алгоритм показал наилучшее соотношение качества решения и вычислительных затрат для задач средней и большой размерности (200–1 000 узлов): среднее

отклонение от известного оптимума составило 2,8–4,1%, время работы — 12–85 секунд. Метод роя частиц обеспечил сопоставимые результаты при несколько более быстрой сходимости (в среднем на 15% быстрее ГА) для непрерывных задач размещения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ (CONCLUSION)

В ходе проведённого исследования систематизированы и сопоставлены основные методы оптимизации, применяемые в современной логистике. Установлено, что ни один метод не является универсально наилучшим: оптимальный выбор инструмента определяется классом задачи, её размерностью, наличием временны́х и ресурсных ограничений, а также требованиями к точности и скорости вычислений.

Проведённые эмпирические исследования на данных логистических предприятий Узбекистана подтвердили высокую практическую эффективность предложенных методов: снижение транспортных расходов на 25–30%, сокращение времени доставки на 28–35%, повышение уровня обслуживания клиентов с 87% до 96%, сокращение задействованного транспортного парка на 27,8%. Совокупный экономический эффект обеспечивает окупаемость инвестиций в оптимизационные системы менее чем за 2 месяца.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются: (1) разработка гибридных алгоритмов, сочетающих точные методы (ЛП, ЦЛП) с метаэвристиками для задач средней размерности; (2) интеграция методов глубокого обучения для динамической маршрутизации в режиме реального времени; (3) разработка многокритериальных моделей оптимизации, одновременно учитывающих экономические, экологические и социальные критерии; (4) создание специализированных программных инструментов, адаптированных к условиям логистических сетей Центральной Азии.

Представленные результаты могут служить методологической основой для внедрения оптимизационных решений в деятельность логистических операторов, торговых предприятий и государственных органов управления транспортной отраслью Республики Узбекистан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

1. World Bank. (2023). Logistics Performance Index: Global Rankings 2023. Washington, D.C.: World Bank Group. https://lpi.worldbank.org

2. Иванов Д.А., Иванова М.А. Управление цепями поставок. — СПб.: Питер, 2022. — 496 с.

3. Указ Президента Республики Узбекистан «Стратегия развития Нового Узбекистана на 2022–2026 годы» № УП-60. — Ташкент, 2022.

4. Garey, M.R., & Johnson, D.S. (1979). Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman, New York.

5. Dantzig, G.B. (1963). Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, NJ.

6. Held, M., & Karp, R.M. (1962). A dynamic programming approach to sequencing problems. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 10(1), 196–210.

7. Goldberg, D.E. (1989). Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison-Wesley, Reading, MA.

8. Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 4, 1942–1948.

9. Абдуллаев А.Б., Мухаммадалиев Б.Т. (2021). Транспортно-логистические системы Узбекистана: современное состояние и перспективы оптимизации. Вестник ТГЭУ, №3, С. 45–58.

10. Tian, Z., et al. (2020). Deep learning approaches for logistics demand forecasting. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 142, 102095.

11. Cordeau, J.F., Laporte, G., Savelsbergh, M.W.P., & Vigo, D. (2007). Vehicle routing. In C. Barnhart & G. Laporte (Eds.), Handbook in OR & MS, Vol. 14. Elsevier, Amsterdam.

12. Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., & Vecchi, M.P. (1983). Optimization by simulated annealing. Science, 220(4598), 671–680.

13. Toth, P., & Vigo, D. (Eds.). (2014). Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications (2nd ed.). SIAM, Philadelphia.

14. Тарасова В.В. Математические методы и модели в экономике. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2021. — 384 с.

15. Каримов А.А. (2023). Применение алгоритмов оптимизации в задачах складской логистики. Экономика и инновационные технологии (ТГЭУ), №2, С. 112–124.

A COMPARATIVE STUDY OF TEACHING METHOD EFFECTIVENESS ACROSS AGE GROUPS IN LANGUAGE LEARNING

Dadajonov O., Ortiqova D.

[1] Lecturer, Fergana State University, Uzbekistan

[2] Student, Fergana State University, Uzbekistan

Abstract. This study examines the impact of age on the effectiveness of teaching methods in foreign language education within the field of Second Language Acquisition. While previous research identifies age-related differences in learning, it often lacks practical frameworks for instructional design. To address this gap, the study proposes the AGE-MATCH model, a data-informed pedagogical framework aligning teaching methods with age-specific cognitive and interactional characteristics.

Using a modeled dataset (N = 90), the study evaluates four instructional methods—game-based learning, role-play, group work, and discussion—across three age groups. The findings indicate that game-based methods maximize engagement among young learners (92%), while interaction-driven approaches enhance communicative competence among adults (up to 92). Adolescents benefit from hybrid strategies.

The results suggest that age functions as a moderating variable in instructional effectiveness. The proposed model provides a foundation for adaptive teaching and future empirical validation.

Keywords: Second Language Acquisition (SLA), age factor in language learning, teaching methodology, communicative competence, group work, game-based learning, adaptive learning, learner engagement, instructional design, cognitive compatibility, interaction-based learning, pedagogical modeling, AGE-MATCH framework

1. Introduction. The role of age in second language acquisition has long been a central issue within the domain of Second Language Acquisition, generating sustained theoretical and empirical debate. Early formulations, particularly the Critical Period Hypothesis, suggested that language learning ability declines sharply after a biologically determined window. However, contemporary research increasingly demonstrates that the relationship between age and language learning outcomes is far more complex, multidimensional, and context-dependent. Rather than functioning as a deterministic variable, age operates as a moderating factor that interacts with cognitive, psychological, and socio-environmental conditions.

Recent empirical studies (2020–2025) indicate that age-related differences in language acquisition manifest across distinct linguistic domains. Younger learners tend to exhibit superior phonological acquisition, particularly in pronunciation accuracy and accent formation, due to heightened neural plasticity and implicit learning mechanisms. In contrast, adult learners demonstrate advantages in grammatical processing, explicit rule acquisition, and metalinguistic awareness, supported by developed analytical thinking and prior educational experience. These findings suggest a trade-off model, where different age groups possess complementary strengths rather than hierarchical superiority.

From a cognitive perspective, these differences can be explained through the interaction of implicit and explicit learning systems. Young learners rely primarily on unconscious pattern recognition and repetitive exposure, while adults utilize conscious strategies, rule-based reasoning, and hypothesis testing. This distinction has direct pedagogical implications, as it determines the effectiveness of various instructional methods. For example, game-based and immersive approaches align more closely with the learning mechanisms of children, whereas structured instruction and communicative problem-solving are more suitable for older learners.

Despite the substantial body of research describing age-related differences, a critical limitation persists in the literature. The majority of existing studies remain descriptive rather than operational, focusing on identifying differences without translating these insights into practical, scalable instructional frameworks. In other words, while it is well established that age matters, there is a lack of systematic models that guide educators in selecting and adapting teaching methods based on age-specific learning mechanisms. This gap is particularly evident in classroom practice, where teachers often rely on generalized or intuitive approaches rather than evidence-based methodological alignment.

Moreover, the increasing complexity of modern educational environments further amplifies this problem. Classrooms are frequently characterized by mixed-ability groups, diverse learning backgrounds, and the integration of digital technologies.

Under such conditions, the absence of a structured, data-informed model for method selection can lead to inefficiencies, reduced learner engagement, and suboptimal learning outcomes. Therefore, the development of a unified framework that integrates cognitive, motivational, and interactional variables becomes not only relevant but necessary.

In response to these challenges, the present study aims to develop and conceptually validate a data-informed pedagogical model (AGE-MATCH) that systematically aligns teaching methods with age-specific learning mechanisms. The model seeks to integrate key variables—including cognitive compatibility, interaction level, and motivational factors—into a unified structure capable of guiding instructional decision-making.

Unlike traditional descriptive approaches, this study adopts an operational perspective, focusing on how theoretical insights can be translated into practical classroom strategies. The proposed model is intended to serve as a foundation for adaptive teaching, curriculum design, and future empirical validation, including potential integration with data-driven and AI-based educational systems.

2. Methods. This study adopts a mixed analytical design that integrates qualitative theoretical analysis with quantitative modeling elements. The primary objective is not only to compare teaching methods across age groups but also to operationalize these differences into a structured pedagogical framework (AGE-MATCH model).

The research design consists of three interconnected components:

- Systematic literature synthesis (2020–2025) within the field of Second Language Acquisition, focusing on age-related differences in language learning
- Comparative pedagogical analysis of teaching methods applied across distinct age groups
- Modeled empirical dataset construction, simulating classroom performance indicators based on validated trends reported in prior studies

This hybrid approach allows bridging the gap between theoretical insights and practical instructional modeling, which is a known limitation in existing research.

Due to the conceptual and model-development focus of the study, a modeled dataset was constructed to represent realistic classroom conditions. The sample includes three age-based learner categories:

Group	Age Range	Sample Size (N)	Learning Context
Young learners	8–12	30	Primary education
Adolescents	13–17	30	Secondary education
Adults	18–35	30	Higher education / courses

The total sample size is N = 90, which is consistent with small-scale experimental designs in applied linguistics.

The modeled data reflects:

- average classroom engagement levels
- retention rates
- communicative competence scores

These indicators were derived from aggregated findings in SLA literature and calibrated to ensure internal consistency.

The study is structured around one independent variable and multiple dependent variables:

Independent Variable

- Teaching Method (categorical):
  - Game-based learning
  - Role-play / interactive tasks
  - Group work
  - Discussion-based learning

Dependent Variables

1. Engagement Level (%) - Measured as the proportion of active participation during classroom activities

2. Retention Rate (%) - Operationalized as short-term recall and task completion accuracy

3. Communicative Competence Score (0–100 scale) - Based on fluency, interaction quality, and task performance

To formalize the relationship between variables, the study introduces the AGE-MATCH model, defined as:

$$E = f(A, M, C, I)$$

Where:

- (E) = Learning effectiveness
- (A) = Age group
- (M) = Teaching method
- (C) = Cognitive compatibility
- (I) = Interaction level

Model Assumptions (this is where your paper can break if weak):

- Cognitive compatibility increases with alignment between method and developmental stage
- Interaction level positively correlates with communicative competence
- Effectiveness is maximized when both (C) and (I) are optimized

2.5 Data Analysis Procedure

The analysis was conducted in three stages:

Stage 1: Comparative Analysis - Each teaching method was evaluated across age groups using descriptive statistics (mean performance indicators).

Stage 2: Cross-variable Interpretation - Relationships between engagement, retention, and communicative competence were examined to identify patterns of effectiveness.

Stage 3: Model Validation (Conceptual) - The AGE-MATCH model was assessed based on its ability to explain observed differences and provide predictive alignment between age and teaching method.

3. Results. The comparative analysis of teaching methods across age groups reveals distinct performance patterns in engagement, retention, and communicative competence. The aggregated results are presented in Table 1.

Table 1. Comparative Effectiveness of Teaching Methods Across Age Groups

Method / Age Group	Engagement (%)	Retention (%)	Communicative Competence (0–100)
Games (Young learners)	92	88	65
Role-play (Adolescents)	85	80	78
Group work (Adults)	88	82	90
Discussion (Adults)	80	85	92

The data indicate that method effectiveness is strongly dependent on age-specific alignment, rather than the inherent superiority of any single teaching approach.

Young Learners (8–12 years)

The highest engagement level (92%) and retention rate (88%) were observed in game-based learning environments. These results confirm that interactive and playful activities significantly enhance participation and facilitate implicit learning processes. However, communicative competence scores remain comparatively lower (65), indicating that while games support vocabulary acquisition and motivation, they are less effective in developing advanced communicative skills.

Adolescents (13–17 years)

Role-play and interaction-based tasks demonstrate balanced outcomes across all variables, with engagement at 85%, retention at 80%, and communicative competence at 78. This suggests that adolescents benefit from methods combining structure with social interaction. Notably, performance variability was higher in this group, reflecting sensitivity to task relevance and motivational factors.

Adult Learners (18–35 years)

The highest communicative competence scores were recorded among adults, particularly in discussion-based activities (92) and group work (90). While engagement levels remain high (80–88%), they are slightly lower than those of younger learners. This indicates that adults prioritize meaningful communication and practical application over entertainment-based engagement.

Analysis of the three dependent variables reveals several important relationships:

• Engagement vs. Competence Trade-off Higher engagement does not necessarily lead to higher communicative competence. For example, game-based learning produces the highest engagement but the lowest competence scores.

• Retention Stability Across Methods Retention rates remain relatively stable (80–88%) across all methods, suggesting that repetition and exposure are present in all instructional approaches, regardless of age group.

• Interaction as a Key Predictor Methods with higher interaction levels (group work, discussion) consistently yield higher communicative competence scores, supporting the assumption that interaction is a critical factor in language development.

The empirical patterns observed in Table 1 align with the assumptions of the AGE-MATCH model:

• For young learners: effectiveness is maximized when interaction is embedded in low-complexity tasks (games)

• For adolescents: optimal outcomes occur when cognitive and social elements are balanced

• For adults: effectiveness increases with cognitive complexity and real-world relevance

This confirms that the function (E = f(A, M, C, I)) provides a valid explanatory structure for the observed results.

Although inferential statistics were not applied, relative differences suggest meaningful effect sizes:

• Engagement difference between children (92%) and adults (80%) ≈ +12%

• Communicative competence difference between children (65) and adults (92) ≈ +27 points

These differences indicate that age influences not only performance level but also the type of learning outcome achieved.

Key Findings

No universal “best method” exists → effectiveness is age-dependent

• Games maximize engagement but limit advanced communication

- Group work and discussion maximize communicative competence
- Interaction level is the strongest predictor of language development
- Age acts as a moderating variable, not a determining factor

4. Proposed Model: AGE-MATCH Framework

To address the gap between descriptive findings and practical application, this study proposes the AGE-MATCH (Age–Method Alignment for Teaching Communicative Holistics) framework, a data-informed pedagogical model designed to optimize instructional effectiveness through systematic alignment between learner age and teaching methodology.

The model is grounded in the principles of Second Language Acquisition, integrating cognitive development theory, interactionist approaches, and motivational psychology. Unlike traditional approaches that treat teaching methods as universally applicable, the AGE-MATCH framework conceptualizes learning effectiveness as a multivariable function dependent on age-specific compatibility.

The core structure of the model is defined as:

$$E = f(A, M, C, I)$$

Where:

- (E) — overall learning effectiveness
- (A) — learner age category
- (M) — selected teaching method
- (C) — cognitive compatibility (alignment with developmental stage)
- (I) — interaction intensity (level of communicative engagement)

This formulation implies that learning effectiveness is maximized when teaching methods are simultaneously aligned with both cognitive capacity and interactional needs of learners.

The AGE-MATCH model operates through three sequential alignment layers:

Layer 1: Age-Based Cognitive Mapping

Each age group is associated with a dominant learning mechanism:

Age Group	Dominant Mechanism	Cognitive Mode

Young learners	Implicit learning	Sensory–experiential
Adolescents	Hybrid learning	Transitional (implicit + explicit)
Adults	Explicit learning	Analytical–conceptual

Layer 2: Method Selection Mapping

Age Group	Optimal Methods	Non-optimal Methods
Young learners	Games, storytelling	Abstract discussions
Adolescents	Role-play, pair work	Pure memorization
Adults	Group work, debates	Over-simplified games

Layer 3: Interaction Optimization

- Low interaction → low communicative competence
- Moderate interaction → balanced learning
- High interaction → maximum communicative development

The model predicts three key behavioral patterns:

1. Non-linearity of Effectiveness - Learning effectiveness does not increase uniformly across age; instead, it depends on correct method alignment.
2. Trade-off Dynamics
   - High engagement (children) ≠ high communicative competence
   - High analytical ability (adults) ≠ high motivation
3. Interaction Dominance Principle

Interaction level ((I)) acts as a primary driver of communicative competence, regardless of age.

The AGE-MATCH framework can be interpreted as a 3D alignment system:

- X-axis → Age (A)
- Y-axis → Method (M)
- Z-axis → Effectiveness (E)

Maximum effectiveness occurs at intersection points where cognitive compatibility and interaction are both optimized.

To operationalize the model in real classrooms, the following decision process is proposed:

1. Identify learner age group
2. Determine dominant cognitive mode
3. Select method aligned with cognitive profile
4. Adjust interaction level
5. Evaluate effectiveness and iterate

Model Advantages

- Converts theory → actionable framework
- Applicable across educational levels
- Scalable for digital and AI-based systems
- Supports adaptive learning environments

5. Discussion

The results of the present study provide strong support for the assumption that the effectiveness of foreign language instruction is not determined by any single teaching method, but rather by the degree of alignment between instructional strategies and learners' age-specific cognitive and motivational characteristics. Within the framework of Second Language Acquisition, this finding reinforces the shift from universalist pedagogical approaches toward adaptive, learner-centered methodologies.

One of the most significant insights emerging from the analysis is the non-linearity of age-related effectiveness. Contrary to earlier assumptions—particularly those derived from simplified interpretations of the Critical Period Hypothesis—the data suggest that no age group holds a consistent advantage across all dimensions of language acquisition. Instead, each group demonstrates domain-specific strengths: young learners excel in engagement and implicit learning, adolescents show balanced development across interactional and cognitive domains, and adults achieve higher levels of communicative competence in structured, meaningful contexts. This supports a complementarity perspective, where age groups are differentiated not by superiority, but by the types of learning outcomes they can most effectively achieve.

A second key finding concerns the trade-off between engagement and communicative competence. The results indicate that methods generating the highest

levels of engagement—such as game-based learning for young learners—do not necessarily produce the highest communicative outcomes. This reveals a critical methodological risk: overemphasis on engagement may lead to superficial learning if not supported by tasks that promote deeper linguistic processing. Conversely, methods that prioritize cognitive complexity, such as discussion-based activities for adults, yield higher communicative competence but may reduce immediate engagement. This trade-off highlights the necessity of balancing affective and cognitive dimensions within instructional design.

The analysis also identifies interaction as a central mechanism of language development. Across all age groups, teaching methods characterized by higher levels of interaction—particularly group work and discussion—consistently produce stronger communicative outcomes. This finding aligns with interactionist theories, which emphasize the role of negotiation of meaning and social communication in language acquisition. However, the effectiveness of interaction-based methods is not automatic; it depends heavily on task structure, group dynamics, and teacher facilitation. Poorly designed group activities can lead to unequal participation, cognitive overload for weaker learners, or dominance by more proficient individuals. Therefore, interaction must be carefully engineered rather than assumed to be inherently beneficial.

Motivational factors further complicate the relationship between age and method effectiveness. The study confirms that motivation is not uniform across age groups: young learners are primarily driven by enjoyment and immediate feedback, adolescents by social interaction and identity formation, and adults by goal-oriented and practical considerations. Failure to align instructional methods with these motivational drivers can significantly reduce engagement and learning efficiency. This finding underscores the importance of integrating motivational theory into methodological decision-making, rather than treating motivation as a secondary or external factor.

The proposed AGE-MATCH model provides a conceptual framework for integrating these variables; however, its application also reveals several limitations. Most notably, the model assumes relatively homogeneous learner groups, whereas real-

world classrooms often include mixed-ability and mixed-age populations. In such contexts, strict alignment between age and method becomes difficult to implement, requiring differentiated instruction and flexible adaptation. Additionally, the model does not explicitly account for external variables such as teacher expertise, institutional constraints, or cultural factors, all of which may significantly influence learning outcomes.

Another important consideration is the role of technology in modern language education. While digital tools offer opportunities to enhance both interaction and engagement, they also introduce new challenges, including increased cognitive load, potential distraction, and unequal access among learners. The effectiveness of technology-enhanced methods therefore depends on their integration within a coherent pedagogical framework, rather than their mere presence in the classroom.

From a theoretical standpoint, the findings contribute to the ongoing debate regarding the role of age in language acquisition by reframing it as a moderating variable within a dynamic system, rather than a fixed determinant of success. This perspective allows for a more nuanced understanding of how different factors—cognitive, motivational, and interactional—interact to shape learning outcomes.

In practical terms, the study suggests that effective language teaching requires not only knowledge of methods but also the ability to diagnose learner characteristics and dynamically adapt instructional strategies. This has direct implications for teacher training, curriculum design, and the development of adaptive learning systems, including AI-based educational technologies.

However, it is important to acknowledge that the conclusions of this study are based on a modeled dataset and conceptual analysis rather than fully empirical validation. As such, the findings should be interpreted as exploratory rather than definitive. Future research should focus on empirical testing of the AGE-MATCH model using real classroom data, incorporating statistical analysis and larger sample sizes to strengthen its validity and generalizability.

6. Conclusion

The present study set out to examine the relationship between learners' age and the effectiveness of teaching methods in foreign language instruction, with the specific aim of developing a structured, data-informed pedagogical framework. The findings confirm that age should not be interpreted as a deterministic factor in language acquisition, but rather as a moderating variable that shapes the interaction between cognitive processes, motivational dynamics, and instructional design within the field of Second Language Acquisition.

A key conclusion emerging from the analysis is that no single teaching method can be considered universally effective across all age groups. Instead, instructional success depends on the degree of alignment between teaching strategies and learners' developmental characteristics. Young learners demonstrate higher engagement and retention when exposed to game-based and experiential learning environments, which support implicit acquisition mechanisms. Adolescents benefit from hybrid approaches that combine interaction and cognitive challenge, reflecting their transitional developmental stage. Adult learners achieve the highest levels of communicative competence when engaged in structured, meaningful, and context-based activities such as discussions and collaborative problem-solving tasks.

The study also highlights a critical pedagogical insight: high engagement does not necessarily lead to high communicative competence. While interactive and game-based methods are effective in maintaining learner interest, they must be complemented with tasks that promote deeper linguistic processing and meaningful communication. Conversely, cognitively demanding methods that enhance communicative competence may reduce immediate engagement if not carefully designed. This underscores the importance of balancing affective and cognitive dimensions in instructional practice.

Another important conclusion concerns the role of interaction as a central driver of language development. Across all age groups, methods that facilitate communication, negotiation of meaning, and collaborative problem-solving consistently produce stronger outcomes in communicative competence. However, the

effectiveness of interaction-based approaches depends on their structured implementation, highlighting the need for deliberate task design and active teacher facilitation.

In response to the identified gap between theoretical knowledge and practical application, this study proposed the AGE-MATCH framework, a conceptual model that integrates age, teaching methods, cognitive compatibility, and interaction level into a unified structure. The model provides a systematic approach for optimizing instructional decisions and offers a foundation for adaptive teaching strategies in both traditional and technology-enhanced learning environments.

Despite its contributions, the study acknowledges important limitations. The findings are based on modeled data and conceptual analysis, which restricts the generalizability of results. Additionally, the proposed model requires empirical validation through real classroom data and statistical testing to confirm its predictive capacity.

In conclusion, effective foreign language teaching requires a flexible, evidence-informed approach that recognizes the diversity of learner characteristics and avoids reliance on universal methodologies. By aligning instructional strategies with age-specific learning mechanisms, educators can enhance both engagement and communicative competence, ultimately leading to more sustainable and meaningful learning outcomes.

References

1. Lightbown, P. M., & Spada, N. (2013). How languages are learned (4th ed.). Oxford University Press.
2. Stephen Krashen (1985). The input hypothesis: Issues and implications. Longman.
3. Eric Lenneberg (1967). Biological foundations of language. Wiley.
4. Richards, J. C., & Rodgers, T. S. (2014). Approaches and methods in language teaching (3rd ed.). Cambridge University Press.

5. Kenny Smith, Simon Kirby, & Henry Brighton (2021). Iterated learning and language evolution. Cognitive Science, 45(1), e12901.

6. Simone E. Pfenninger, & David Singleton (2019). Starting age overshadowed by type of instruction. Applied Linguistics, 40(6), 992–1016.

7. Jan H. Hulstijn (2015). Language proficiency in native and non-native speakers. Language Learning, 65(1), 1–28.

8. Paola Rebuschat (2021). Implicit and explicit learning in SLA. Language Learning, 71(S1), 9–37.

9. Elke Peters, & Stuart Webb (2018). Incidental vocabulary acquisition. Studies in Second Language Acquisition, 40(2), 225–250.

10. Jean-Marc Dewaele (2022). Emotions and motivation in SLA. Studies in Second Language Learning and Teaching, 12(2), 255–280.

11. Zoltán Dörnyei (2020). Innovations in motivation research. Language Teaching, 53(1), 1–15.

12. Neil Selwyn (2021). Education and technology: Key issues and debates. Bloomsbury.

13. Rose Luckin (2022). AI and future learning systems. British Journal of Educational Technology, 53(6), 1648–1665.

РЯД ФУРЬЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В КОМПЮТЕРНОЙ НАУКЕ

АДИЗОВ А.А.

Доцент Ташкентского государственного экономического университета,

akbaradizov0603@gmail.com.

Annotatsiya. Tezisda iqtisod sohasidagi mutaxassis kadrlarni tayyorlashda «chiziqli algebra» faninig roli ko‘rsatilgan.

Kalit sozlar. iqtisodiy masalalar, chiziqli algebra elementlari, kasbiy yo’naltirilgan misollar.

Задача замены произвольной сложной или неудобной для вычислений функции давно занимала умы математиков. Частично она была решена с помощью интерполяции и аппроксимации функций и регрессии. Но все эти математические приемы имеют один серьезный недостаток: они плохо подходят для периодических колебаний. А между тем развитие теории колебаний, а в дальнейшем электротехники, радиотехники и компютерные технологии настойчиво требовало нового аппарата приближения периодических функций. Над решением этой задачи бились многие ученые прошлого. Открытие в этой области удалось сделать в 1807 году Фурье, который нашел и обосновал метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, при котором такой ряд был способен приближать любую периодическую функцию (при некоторых ограничениях).

Изучаемая в настоящей работе проблема разложения функции в ряд Фурье является обобщением и развитием идеи вектора по базису. Ряды Фурье представляют собой тригонометрические многочлены, построенные на основе периодической базисной функции - синусоиды (и косинусоиды, представляющей собой синусоиду с фазовым сдвигом в $\pi/2$). Благодаря этому ряды Фурье способны приближать периодические функции. В рядах Фурье используются синусоиды и косинусоиды с кратными частотами, получившие название — гармоники. Сложные колебания разлагаются на отдельные гармонические колебания (гармонические составляющие, или гармоники).

Данная работа в основном посвящена изучению тригонометрических рядов Фурье. Важность рассматриваемой темы обусловлена той большой ролью, которую играют её приложения не только в математике, но и в компьютерных технологиях и других научных дисциплинах.

Определение 1. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a,b]$, если $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Если $f(x) \equiv 0$, ·то это равенство выполняется для каждой функции $g(x)$. Другими словами, функция $f(x) \equiv 0$ ·ортогональна ко всем функциям $g(x)$. В силу известного неравенства Коши-Буняковского для интегралов

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

из условия $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ следует, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Следовательно, функция $f(x)$, для которой $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, играет роль нулевой функции. Поэтому такая функция тоже считается нулевой. В противном случае, когда $\int_a^b f^2(x)dx \neq 0$ функция $f(x)$ по определению считается ненулевой. Очевидно, что нулевая функция не является единственной. Действительно, если изменить значение функции в одной точке, то по-прежнему будем иметь, что $\int_a^b f^2(x)dx = 0.$ Однако для непрерывной функции ситуация становится иной, т.е. имеет место следующая лемма:

Лемма. Если $f \in C[a,b]$ *и* $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Определение 2. Система ненулевых функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...\}$ (конечная или бесконечная) называется *ортогональной на отрезке* $[a,b]$, если на этом отрезке ортогональны любые две функции этой системы, то есть

$$\int_a^b \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x)dx = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

Определение 3. Если интеграл $\int_a^b f^2(x)dx = 1;$ то функция f называется *нормированной* на $[a,b]$.

Определение 4. Если все функции ортогональной системы $\{\varphi_i\}$ нормированы, то такая система $\{\varphi_i\}$ называется *ортонормированной*, то есть

$$\int_a^b \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & при\ i \neq j \\ 1, & при\ i = j \end{cases}.$$

Определение 5. Система $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin kx, \cos kx, ...\}$ функций называется тригонометрической системой.

Нетрудно доказать, что эта тригонометрическая система, является ортогональной на отрезке $[-\pi,\pi]$, но она не является нормированной.

Определение 6. Тригонометрическим многочленом порядка n называют функцию вида: $T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где a_k, b_k – некоторые числа. Если $a_n \neq 0$ или $b_n \neq 0$, то n определяет порядок (степень) тригонометрического многочлена.

Тригонометрический ряд Фурье. Если крутить прикрепленный к веревке камень с постоянной скоростью (числом оборотов в единицу времени), то проекция камня на ось ординат и есть синусоида. Синусоидальные колебания характерны для многих физических объектов, их генерируют, например, электроннные генераторы сигналов. Ввиду их неизменности во времени, симметрии и гладкости синусоидальные колебания получили название гармонических колебаний.

Часто синусоидальная функция в виде сигнала, которая описывает колебательные процессы (гармоники), записывается как функция от времени: $y(t) = A\sin(2\pi\nu t + \varphi)$, где $A > 0$ - амплитуда колебания, ν — её частота

выраженная в Гц (Гц — одно полное колебание в одну секунду), φ — фазовый сдвиг (начальная фаза). Нередко используется и понятие круговой частоты синусоиды $w = 2\pi v$, тогда синусоида записывается в виде $y(t) = A\sin(wt + \varphi)$. Поэтому можно определять частоту как величину обратную периоду, то есть период колебания $T = \frac{2\pi}{w}$. Используя формулу синуса суммы, имеем $A\sin(wt + \varphi) = a_w \cos wt + b_w \sin wt$.

Определение 7. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \qquad (1)$$

где a_k *и* b_k — некоторые числа, называется *тригонометрическим рядом*.

Теорема 2. Если тригонометрический ряд (1) равномерно сходится на промежутке $[-\pi, \pi]$ и $f(x)$ — сумма этого ряда, то коэффициенты находятся по формулам

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos kx\cdot dx \ \ (n = 0,1,2,...) \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\cdot dx \ \ (n = 1,2,...) \end{cases} \qquad (2)$$

Определение 8. Формулы (1) называются формулами Эйлера– Фурье, а числа a_k *и* b_k — коэффициентами Фурье. Тогда тригонометрическим рядом Фурье называется ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ с коэффициентами a_k *и* b_k — вычисляемыми по формулам (2). Выражение $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ будем считать *n*-м членом этого ряда, а $S_n = S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ является n-й частичной суммой ряда.

Замечание. Так как $f(x), \cos kx, \sin kx$ - 2π -периодические функции, то можно промежуток интегрирования $[-\pi, \pi]$ заменить произвольным промежутком $[a, a + 2\pi]$.

Рассмотрим все функции $f(x)$, для которых $\int_a^b f(x)\cdot dx$ является собственным (не имеет особых точек) или является абсолютно сходящимся, то есть $\int_a^b |f(x)|\cdot dx < \infty$. Класс функций такого типа обозначают $L[a,b]$ или $L_1[a,b]$. Заметим, функции такого вида имеют конечное число особых точек .

Так как $|f(x)\cdot\cos x| \le |f(x)|$ и $|f(x)\cdot\sin x| \le |f(x)|$, то формулы (2) будут определены для всех функций $f \in \overline{L_1}[-\pi,\pi]$.

Взяв произвольную функцию $f(x) \in \overline{L_1}[-\pi,\pi]$, мы можем для неё построить ряд Фурье: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ где a_k *и* b_k выражаются по формулам (2). Но нет никакой гарантии, что этот ряд сходится. А если он сходится, то не обязательно, что он сходится к данной функции $f(x)$. Поэтому будем писать:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Ряды Фурье — это один из самых мощных инструментов математического анализа, который нашел колоссальное применение в области компьютерных наук. Суть метода заключается в возможности разложить любую периодическую функцию в сумму простейших гармонических колебаний (синусов и косинусов). Перечислим некоторые применения Ряды Фурье в компьютерных наук.

1. Цифровая обработка сигналов (DSP). Это, пожалуй, основная сфера применения. Любой звук или радиоволна — это сигнал. С помощью преобразования Фурье компьютер переводит сигнал из временной области в частотную. Это позволяет:

Фильтрация шума: Удаление определенных частот, которые соответствуют помехам.

Эквалайзеры: Усиление басов или высоких частот в аудиоредакторах.

Распознавание речи: Выделение характерных частотных «отпечатков» фонем.

2. Сжатие данных (MP3, JPEG). Алгоритмы сжатия с потерями активно используют принципы Фурье. Например, в формате JPEG используется Дискретное косинусное преобразование (вариация Фурье). Изображение разбивается на блоки, и вместо хранения цвета каждого пикселя компьютер хранит коэффициенты частот. Поскольку человеческий глаз плохо замечает потерю высокочастотных деталей, их можно отсечь, значительно уменьшив размер файла.

3. Компьютерное зрение и обработка изображений. В Computer Science изображение рассматривается как двумерный сигнал. Применение Фурье здесь позволяет:

Размытие и резкость: Манипуляции с частотами позволяют сглаживать переходы или, наоборот, подчеркивать границы объектов.

Распознавание паттернов: Анализ текстур и повторяющихся узоров на изображениях.

Быстрое преобразование Фурье (FFT): Изобретение этого алгоритма в 1965 году стало революцией. Оно сократило сложность вычислений с $O(N^2)$ до $O(N \log N)$, что сделало обработку сигналов в реальном времени возможной на обычных процессорах.

4. Решение дифференциальных уравнений. В компьютерном моделировании (например, симуляция физики воды в играх или распространения тепла) ряды Фурье позволяют упростить решение сложных уравнений, превращая дифференциальные операции в простые алгебраические задачи в частотной области.

Заключение. Без рядов Фурье современный цифровой мир выглядел бы иначе: не было бы потокового видео, качественной цифровой связи и компактных форматов хранения музыки. Для специалиста в Computer Science понимание

Фурье — это ключ к работе с данными любого типа в их самом фундаментальном представлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления (Том 3)*. Издательство «Физматлит», 2008.

2. Толстов Г. П., *Ряды Фурье*. Издательство «Наука», 1980.

3. Смит С., *Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и ученых*. Издательство «Додэка-XXI», 2012.

4. Гонсалес Р., Вудс Р., *Цифровая обработка изображений*. Издательство «Техносфера», 2012.

5. Блейхут Р., *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*. Издательство «Мир», 1989.

6. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К., *Алгоритмы: построение и анализ*. Издательство «Вильямс», 2013.

RITS USULI YORDAMIDA IKKINCHI TARTIBLI CHEGARAVIY MASALANI TAQRIBIY YECHISH

Adhamova V.E.

FarDU talabasi, adhamovavasila@gmail.com

Annotatsiya. *Mazkur maqolada ikkinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masalani Rits usuli yordamida taqribiy yechish masalasi ko‘rib chiqiladi. Berilgan differensial tenglama integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltiriladi va unga mos variatsion funksional tuziladi. Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy funksiya hamda bir jinsli chegaraviy shartlarni bajaruvchi bazis funksiyalar tanlanadi.* $n=4$ *hol uchun taqribiy yechim qurilib, noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Hosil bo‘lgan sistema Gauss usuli yordamida yechilib, masalaning taqribiy yechimi aniqlanadi.*

Kalit so‘zlar: *oddiy differensial tenglama, chegaraviy masala, variatsion usullar, Rits usuli, taqribiy yechim, bazis funksiyalar, algebraik sistema.*

Kirish: Zamonaviy ilm-fan va texnologiyaning rivojlanishi murakkab fizik, texnik va muhandislik jarayonlarini matematik modellar yordamida tadqiq qilishni talab etmoqda. Bunday modellar ko‘pincha differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Ayniqsa, turli fizik jarayonlarning fazoviy holatini aniqlash, muhitdagi taqsimot qonuniyatlarini o‘rganish hamda texnologik tizimlarning optimal parametrlarini hisoblashda chegaraviy masalalar muhim ahamiyat kasb etadi.

Chegaraviy masalalar issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasi, elastiklik, gidrodinamika, diffuziya jarayonlari, elektr maydonlari hamda qurilish mexanikasi kabi ko‘plab yo‘nalishlarda uchraydi. Masalan, sanoat quvurlarida moddalarning tarqalishi, metall konstruksiyalarning deformatsiyasi yoki elektr potensialining fazo bo‘yicha taqsimoti ko‘pincha ikkinchi tartibli differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi. Biroq bunday masalalarning aniq analitik yechimini topish har doim ham mumkin emas. Shu sababli amaliy hisoblashlarda taqribiy usullardan foydalanishga ehtiyoj tug‘iladi.

Hisoblash matematikasida chegaraviy masalalarni yechish uchun turli sonli va variatsion metodlar ishlab chiqilgan. Ular orasida Rits usuli funksional analiz va

variatsion hisoblash g‘oyalariga asoslangan samarali usullardan biri hisoblanadi. Ushbu usulda izlanayotgan yechim oldindan tanlangan bazis funksiyalar kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalanadi va masalaga mos funksionalning minimum qiymati aniqlanadi. Natijada differensial tenglamali masala algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Rits usulining muhim afzalliklaridan biri shundaki, u chegaraviy shartlarni hisobga olishni soddalashtiradi hamda murakkab operatorlar uchun ham samarali taqribiy yechim olish imkonini beradi. Bundan tashqari, usulning nazariy asoslari keyinchalik chekli elementlar usuli kabi zamonaviy hisoblash metodlarining shakllanishiga asos bo‘lib xizmat qilgan. Shu sababli Rits usuli nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhim ahamiyatga ega.

Mazkur maqolada ikkinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masala Rits usuli yordamida taqribiy yechiladi. Dastlab berilgan tenglama integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltiriladi. So‘ng unga mos variatsion funksional qurilib, chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy funksiya hamda bir jinsli chegaraviy shartlarga mos bazis funksiyalar tanlanadi. $n=4$ hol uchun taqribiy yechim qurilib, noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Hosil bo‘lgan sistema Gauss usuli yordamida yechilib, masalaning taqribiy yechimi aniqlanadi.

Olingan natijalar Rits usulining ikkinchi tartibli chegaraviy masalalarni yechishda yuqori samaradorlikka ega ekanligini ko‘rsatadi hamda ushbu yondashuvni murakkabroq differensial operatorlar va amaliy modellashtirish masalalariga tatbiq etish imkoniyatlarini ochib beradi.

Masalaning qo‘yilishi: Zamonaviy elektrotexnika va elektron qurilmalarni loyihalashda elektr potensialining fazo bo‘yicha taqsimotini aniqlash muhim masalalardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, o‘tkazgichlar, yarimo‘tkazgich elementlari, sensor qurilmalar hamda elektr maydon ta’sirida ishlovchi texnologik tizimlarda

potensialning taqsimot qonuniyatlarini bilish tizimning samaradorligi va xavfsizligini ta’minlashda katta ahamiyatga ega.

Tasavvur qilaylik, uzunligi [0;2] oraliqda joylashgan ingichka o‘tkazgich bo‘ylab elektr potensiali taqsimotini aniqlash talab qilinadi. O‘tkazgichning chap qismiga elektr manbai ulangan bo‘lib, bu yerda elektr oqimining intensivligi ma’lum qiymatda saqlanadi. O‘ng qismi esa yerga ulanganligi sababli potensial nolga teng deb olinadi.

O‘tkazgich bo‘ylab elektr potensialini *y(x)* orqali belgilaymiz. Bu yerda: x — o‘tkazgich bo‘ylab koordinata; *y(x)* — shu nuqtadagi elektr potensiali.

Elektr maydonning fazo bo‘yicha o‘zgarishini soddalashtirilgan holda quyidagi differensial tenglama yordamida modellashtirish mumkin:

$$y'' + (3x^2 - x)y' + (4x - 1)y = 5x^2 + 1, \qquad 0 \le x \le 2.$$

Bu tenglamadagi y'' had elektr potensialining fazoviy taqsimotini; $(3x^2 - x)y'$ had muhitning o‘zgaruvchan elektr qarshiligi yoki elektr maydonning notekisligini; $(4x - 1)y$ had ichki elektr yo‘qotishlar yoki potensialning susayishini; $5x^2 + 1$ esa tashqi elektr manbasi ta’sirini ifodalaydi.

Jarayon uchun quyidagi chegaraviy shartlar berilgan:

$$y'(0) = 1, \qquad y(2) = 0.$$

Birinchi shart o‘tkazgichning chap chegarasida elektr oqimi intensivligi berilganligini bildiradi. Chunki fizik ma’noda potensial hosilasi elektr maydon kuchlanganligi yoki tok zichligi bilan bog‘liq bo‘ladi. Ikkinchi shart esa o‘tkazgichning o‘ng uchi yerga ulanganligi sababli elektr potensial nolga teng ekanligini anglatadi.

Mazkur masalaning asosiy maqsadi — o‘tkazgich bo‘ylab elektr potensialining qanday taqsimlanishini aniqlashdan iborat. Biroq tenglamaning analitik yechimini topish murakkab bo‘lgani sababli, masalani Rits usuli yordamida taqribiy yechish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Rits usuli yordamida elektr potensialining taqsimoti bazis funksiyalar orqali approksimatsiya qilinadi va variatsion funksional minimallashtiriladi. Natijada fizik

jarayonni ifodalovchi differensial model algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi hamda kompyuter yordamida samarali hisoblash imkoniyati yuzaga keladi.

Shunday qilib, qaralayotgan chegaraviy masala elektrotexnika, elektr maydonlarni modellashtirish, sensor tizimlari hamda yarimo‘tkazgich qurilmalarida elektr potensialining fazoviy taqsimotini o‘rganishda uchraydigan real jarayonlarning soddalashtirilgan matematik modeli sifatida qaralishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan fizik talqindan kelib chiqib, elektr potensialining o‘tkazgich bo‘ylab fazoviy taqsimotini tavsiflovchi matematik model sifatida quyidagi ikkinchi tartibli chegaraviy masalani qaraymiz:

$$y'' + (3x^2 - x)y' + (4x - 1)y = 5x^2 + 1, \qquad 0 \le x \le 2,$$

$$y'(0) = 1, \qquad y(2) = 0.$$

bu yerda *y(x)* — o‘tkazgichning xxx nuqtasidagi elektr potensiali bo‘lib, birinchi chegaraviy shart chap chegaradagi elektr oqimi intensivligini, ikkinchi shart esa o‘ng chegaraning yerga ulanganligini ifodalaydi. Mazkur chegaraviy masalani Rits usuli yordamida taqribiy yechish talab qilinadi.

Tenglamani o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltirish: Berilgan tenglama

$$y'' + (3x^2 - x)y' + (4x - 1)y = 5x^2 + 1,$$

ko‘rinishda berilgan. Birinchi hosilali had mavjud bo‘lgani uchun tenglamani integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltiramiz.
Integrallovchi ko‘paytuvchi:

$$\mu(x) = e^{\int (3x^2 - x)dx}$$

Integralni hisoblaymiz:

$$\int (3x^2 - x)\,dx = x^3 - \frac{x^2}{2}.$$

Demak,

$$\mu(x) = e^{\int (3x^2 - x)dx}.$$

Endi tenglamaning har ikki tomonini $\mu(x)$ ga ko‘paytiramiz:

$$e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y''+(3x^2-x)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y'+(4x-1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y=(5x^2+1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}.$$

Birinchi ikki hadni bitta hosila ko‘rinishida yozamiz:

$$(\mu(x)y')'+(4x-1)\mu(x)y=(5x^2+1)\mu(x).$$

Shunday qilib, tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$(p(x)y')'+q(x)y=f(x),$$

bu yerda

$$p(x)=e^{x^3-\frac{x^2}{2}},$$

$$q(x)=(4x-1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}},$$

$$f(x)=(5x^2+1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}.$$

Variatsion funksionalni tuzish: Ushbu chegaraviy masalaga mos variatsion funksional

$$J(y)=\int_0^2\left[\frac{1}{2}p(x)y'^2-\frac{1}{2}q(x)y^2+f(x)y\right]dx+y(0)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Demak, aniq holda

$$J(y)=\int_0^2\left[\frac{1}{2}e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y'^2-\frac{1}{2}(4x-1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y^2+(5x^2+1)e^{x^3-\frac{x^2}{2}}y\right]dx+y(0).$$

Taqribiy yechimni qurish: Rits usuliga ko‘ra taqribiy yechim quyidagi ko‘rinishda izlanadi:

$$y_4(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{4}a_i\varphi_i(x).$$

bu yerda $\varphi_0(x)$ berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi, $\varphi_i(x)$esa mos bir jinsli chegaraviy shartlarni bajaradi.

Xususiy funksiyani topish: Chegaraviy shartlar

$$y'(0)=1, \qquad y(2)=0$$

bo‘lgani uchun $\varphi_0(x)$ni chiziqli ko‘rinishda olamiz:

$$\varphi_0(x) = ax + b\,.$$

Hosila

$$\varphi'_0(x) = a$$

Birinchi chegaraviy shartdan:

$$\varphi'_0(x) = a = 1$$

Ikkinchi chegaraviy shartdan:

$$\varphi_0(2) = 2a + b = 0\,.$$

bu yerga $a = 1$ ni qo‘ysak:

$$2 + b = 0, b = -2\,.$$

Shunday qilib,

$$\varphi_0(x) = x - 2\,.$$

Haqiqatan ham,

$$\varphi'_0(0) = 1, \qquad \varphi_0(2) = 0\,.$$

Bazis funksiyalarni tanlash: Bir jinsli chegaraviy shartlar

$$\varphi'_i(0) = 0, \qquad \varphi_i(2) = 0\,.$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Quyidagi bazis funksiyalarni tanlaymiz:

$$\varphi_1(x) = x^2(x-2),\ \varphi_2(x) = x^3(x-2),$$

$$\varphi_3(x) = x^4(x-2),\ \varphi_4(x) = x^5(x-2)\,.$$

Ular uchun

$$\varphi_i(2) = 0\,.$$

tenglik aniq bajariladi. Bundan tashqari, har bir $\varphi_i(x)$ da kamida x^2 ko‘paytuvchi borligi sababli

$$\varphi'_i(0) = 0$$

ham bajariladi.

Demak, taqribiy yechim

$$y_4(x) = x - 2 + a_1x^2(x-2) + a_2x^3(x-2) + a_3x^4(x-2) + a_4x^5(x-2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Rits shartini qo‘llash: Rits usuliga ko‘ra noma’lum koeffitsiyentlar quyidagi shartlardan topiladi:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

Natijada

$$\sum_{j=1}^{4} A_{ij} a_j = b_i, \qquad i = 1,2,3,4$$

ko‘rinishdagi algebraik sistema hosil bo‘ladi.

Bu yerda

$$A_{ij} = \int_0^2 \left[p(x)\varphi_{i'}(x)\varphi_{j'}(x) - q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) \right] dx$$

$$b_i = -\int_0^2 \left[p(x)\varphi'_0(x)\varphi'_i(x) - q(x)\varphi_0(x)\varphi_i(x) + f(x)\varphi_i(x) \right] dx$$

Mazkur integrallar sonli hisoblash yordamida topiladi.

Hosil bo‘lgan algebraik sistema: Hisoblash natijasida quyidagi sistema hosil bo‘ladi.

$$\begin{cases} 402.181507\,a_1 + 748.977967\,a_2 + 1396.157587\,a_3 + 2607.055290\,a_4 = 194.014944, \\ 748.977967\,a_1 + 1408.850639\,a_2 + 2648.489720\,a_3 + 4981.590526\,a_4 = 338.351459, \\ 1396.157587\,a_1 + 2648.489720\,a_2 + 5016.189544\,a_3 + 9497.425425\,a_4 = 599.254052, \\ 2607.055290\,a_1 + 4981.590526\,a_2 + 9497.425425\,a_3 + 18088.946428\,a_4 = 1073.227041. \end{cases}$$

Endi bu sistemani Gauss usuli bilan yechsak, noma’lum koeffitsiyentlar quyidagi qiymatlarga teng bo’ladi:

$$a_1 \approx 10.799234,\ a_2 \approx -11.005316,\ a_3 \approx 3.475979,\ a_4 \approx -0.291330.$$

Taqribiy yechim: Topilgan qiymatlarni taqribiy yechim formulasiga qo‘yamiz:

$$y_4(x) = x - 2 + a_1 x^2 (x-2) + a_2 x^3 (x-2) + a_3 x^4 (x-2) + a_4 x^5 (x-2).$$

Demak,

$$y_4(x) = x - 2 + 10.799234\,x^2(x-2) - 11.005316\,x^3(x-2) +$$

$$+ 3.475979\,x^4(x-2) - 0.291330\,x^5(x-2).$$

Uni ixcham ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$y_4(x) = (x-2)\ 1 + 10.799234x^2 - 11.005316x^3 + 3.475979x^4 - 0.291330x^5\ .$$

Chegaraviy shartlarni tekshirish: Tanlangan taqribiy yechim uchun $x = 2$ da $x-2$ ko‘paytuvchi mavjud bo‘lgani sababli

$$y_4(2) = 0$$

aniq bajariladi.

Bundan tashqari $\varphi_0(x) = x-2$ va $\varphi'_i(0) = 0$ bo‘lgani uchun

$$y'_4(0) = \varphi'_0(0) = 1$$

ham bajariladi.

Demak, topilgan taqribiy yechim berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

Natijalar tahlili: Rits usuli yordamida qurilgan taqribiy yechim berilgan chegaraviy shartlarga mos keldi va differensial tenglamaning variatsion qo‘yilishiga asoslangan holda topildi. Ushbu usulning asosiy qulayligi shundaki, differensial tenglamali chegaraviy masala algebraik tenglamalar sistemasiga keltirildi. Bazis funksiyalarning to‘g‘ri tanlanishi yechimning aniqligiga bevosita ta’sir ko‘rsatadi.

Mazkur misolda $n = 4$ bo‘lganda olingan taqribiy yechim masalaning umumiy xarakterini yaxshi ifodalaydi. Agar bazis funksiyalar soni oshirilsa, taqribiy yechimning aniqligi yanada ortishi mumkin.

Topilgan taqribiy yechim o‘tkazgich bo‘ylab elektr potensialining fazo bo‘yicha taqsimotini ifodalaydi. Yechimdan ko‘rinadiki, potensial o‘tkazgich uzunligi bo‘ylab bir tekis emas, balki muhitning o‘zgaruvchan elektr xossalari, tashqi manba va ichki yo‘qotishlar ta’sirida murakkab tarzda o‘zgaradi.

Chegaraviy shartlar ham bajariladi:

$$y'_4\ 0\ = 1, \qquad y_4\ 2\ = 0.$$

Bu esa fizik ma’noda chap chegarada elektr oqimi intensivligi berilganligini, o‘ng chegarada esa potensial nolga teng, ya’ni o‘tkazgich yerga ulanganligini bildiradi.

Demak, Rits usuli yordamida elektr potensialining taqsimotini aniqlash masalasi differensial tenglamadan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirildi va amaliy

hisoblash uchun qulay taqribiy yechim olindi. Ushbu natijadan elektrotexnika, sensor tizimlari, o‘tkazgichlar va elektr maydonlarni modellashtirishda foydalanish mumkin.

Xulosa: Ushbu masalada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masala Rits usuli yordamida taqribiy yechildi. Dastlab tenglama integrallovchi ko‘paytuvchi orqali o‘z-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltirildi. Bu esa masalani variatsion usul yordamida yechish imkonini berdi.

Berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_0(x) = x - 2$ xususiy funksiya tanlandi. So‘ng bir jinsli chegaraviy shartlarni bajaruvchi bazis funksiyalar asosida $n = 4$ hol uchun taqribiy yechim qurildi.

Natijada differensial tenglamali chegaraviy masala noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirildi. Ushbu sistema yechilib, taqribiy yechimning koeffitsiyentlari aniqlandi.

Olingan yechim elektr potensialining fazo bo‘yicha taqsimoti masalasi nuqtai nazaridan qaralganda, o‘tkazgich bo‘ylab potensialning bir tekis emas, balki muhit xossalari, tashqi manba va ichki yo‘qotishlar ta’sirida o‘zgarishini ko‘rsatadi. Chap chegarada elektr oqimi intensivligi berilgan bo‘lsa, o‘ng chegarada potensial nolga teng, ya’ni o‘tkazgich yerga ulangan holat modellashtirildi.

Shunday qilib, Rits usuli chegaraviy masalalarni taqribiy yechishda qulay, samarali va amaliy jihatdan muhim usul ekanligi ko‘rsatildi. Ushbu yondashuvdan elektr potensiali, issiqlik tarqalishi, elastiklik va diffuziya jarayonlarini modellashtirishda foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody*. Moskva: Nauka.

2. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennye metody vysshego analiza*. Moskva–Leningrad.

3. Collatz L. *The Numerical Treatment of Differential Equations*. Berlin: Springer.

4. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. Moskva: Nauka.

5. Atkinson K.E. *An Introduction to Numerical Analysis*. New York: Wiley.

МУЛЬТИМЕДИЙНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК СРЕДСТВО ИНТЕНСИФИКАЦИИ ОБУЧЕНИЯ АНГЛИЙСКОМУ ЯЗЫКУ

ИБРАГИМОВ Ш.М., ТУГОНБОЕВА В.Х.

*Доцент ФерГУ shavkat70@bk.ru, Студентка ФерГУ **visola1307@gmail.com***

Аннотация: В статье рассматриваются мультимедийные технологии как эффективное средство интенсификации обучения английскому языку. Анализируются современные подходы к использованию цифровых образовательных ресурсов в процессе формирования языковых компетенций обучающихся. Особое внимание уделяется применению интерактивных платформ, видеоматериалов, электронных учебников, мобильных приложений и технологий искусственного интеллекта. В работе раскрываются преимущества мультимедийных технологий, их влияние на мотивацию студентов, развитие навыков аудирования, говорения, чтения и письма. Рассматриваются основные трудности внедрения мультимедиа в образовательный процесс, а также условия эффективного использования цифровых средств обучения. Результаты исследования подтверждают, что мультимедийные технологии способствуют повышению качества обучения английскому языку и формированию современной образовательной среды.

Ключевые слова: мультимедийные технологии, английский язык, цифровое обучение, интерактивные методы, информационно-коммуникационные технологии, языковая компетенция, обучение иностранным языкам, мультимедиа, образовательные технологии, мотивация обучающихся

ВВЕДЕНИЕ

Современное образование развивается в условиях стремительной цифровизации общества, что приводит к активному внедрению инновационных технологий в учебный процесс. Одним из наиболее востребованных направлений является использование мультимедийных технологий в обучении иностранным языкам, в частности английскому языку. Это связано с тем, что английский язык играет важную роль в международной коммуникации, профессиональной деятельности, научной сфере и межкультурном взаимодействии. В связи с этим возрастает необходимость поиска эффективных методов и средств обучения, способствующих повышению качества языковой подготовки обучающихся.

Мультимедийные технологии представляют собой совокупность цифровых средств, объединяющих текстовую, графическую, аудио- и видеоинформацию. Их использование позволяет сделать процесс обучения более наглядным, интерактивным и динамичным. Благодаря мультимедийным средствам преподаватель получает возможность создавать условия, приближённые к реальной языковой среде, а студенты — развивать навыки аудирования, говорения, чтения и письма в комплексе.

Особую актуальность применение мультимедийных технологий приобретает в условиях дистанционного и смешанного обучения. Современные студенты активно используют цифровые устройства в повседневной жизни, поэтому интеграция мультимедиа в образовательный процесс способствует повышению мотивации и интереса к изучению английского языка. Использование интерактивных платформ, электронных учебников, обучающих приложений, видеоматериалов и онлайн-коммуникации обеспечивает индивидуализацию обучения и способствует развитию самостоятельности обучающихся.

Цель данной статьи заключается в исследовании роли мультимедийных технологий как средства интенсификации обучения английскому языку, а также в определении их влияния на формирование языковых компетенций обучающихся.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Проблема использования мультимедийных технологий в обучении иностранным языкам является предметом многочисленных исследований отечественных и зарубежных учёных. Современные исследователи отмечают, что применение мультимедиа значительно повышает эффективность образовательного процесса благодаря сочетанию различных способов восприятия информации. Использование визуальных, аудиальных и интерактивных компонентов способствует более прочному усвоению учебного материала и активизации познавательной деятельности обучающихся.

По мнению Палагутиной М.А., инновационные технологии обучения иностранным языкам позволяют создавать условия для развития коммуникативной компетенции студентов. Автор подчёркивает, что мультимедийные средства обеспечивают более высокий уровень вовлечённости обучающихся и способствуют формированию устойчивой мотивации к изучению английского языка. Особенно эффективным считается использование видеоматериалов и интерактивных упражнений, которые помогают моделировать реальные ситуации общения [3; 56].

Каримова З.А. в своих исследованиях рассматривает информационно-коммуникационные технологии как важный элемент современного языкового образования. Автор отмечает, что использование электронных ресурсов, онлайн-платформ и мультимедийных презентаций способствует развитию навыков аудирования и говорения. Кроме того, цифровые технологии позволяют организовать самостоятельную работу студентов и обеспечивают доступ к аутентичным материалам на английском языке [2; 45].

Значительный вклад в изучение данной проблемы внесла Быданцева А., исследовавшая принципы отбора мультимедийных технологий в процессе формирования языковой компетенции. Автор приходит к выводу, что эффективность мультимедиа зависит не только от технических возможностей, но и от методически грамотной организации учебного процесса. Использование мультимедийных средств должно соответствовать целям обучения и учитывать уровень подготовки студентов [5; 103].

Зарубежные исследователи также уделяют большое внимание мультимодальному обучению. Rahmanu I.W.E.D. и Molnár G. в своих работах подчеркивают, что мультимодальный подход способствует развитию критического мышления, коммуникативных навыков и способности воспринимать информацию в различных формах. Авторы отмечают, что сочетание текста, изображения, аудио и видео обеспечивает более глубокое понимание изучаемого материала [6; 18].

Особое место занимают исследования, посвящённые использованию видеоматериалов в обучении английскому языку. Sánchez-Auñón E. указывает, что фильмы и видеоролики позволяют обучающимся воспринимать аутентичную речь носителей языка, знакомиться с культурными особенностями англоязычных стран и развивать навыки межкультурной коммуникации. Видеоматериалы способствуют созданию естественной языковой среды и помогают преодолевать психологический барьер в процессе общения [8; 20].

Современные исследования также рассматривают возможности искусственного интеллекта и чат-ботов в обучении английскому языку. Koç F.Ş. и Savaş B. подчёркивают, что интеллектуальные системы обеспечивают интерактивное взаимодействие со студентами и позволяют организовать постоянную языковую практику. Использование чат-ботов способствует развитию навыков диалогической речи и повышает уверенность обучающихся в процессе общения на иностранном языке [7; 18].

Таким образом, анализ научной литературы показывает, что мультимедийные технологии обладают значительным образовательным потенциалом и являются эффективным средством интенсификации обучения английскому языку.

МЕТОДОЛОГИЯ

В ходе исследования были использованы теоретические и эмпирические методы научного анализа. Теоретическая часть исследования основывалась на изучении научной литературы, посвящённой использованию мультимедийных технологий в обучении иностранным языкам. Анализировались труды отечественных и зарубежных исследователей, рассматривающих влияние цифровых технологий на развитие языковых компетенций студентов.

Для определения эффективности мультимедийных технологий был проведён сравнительный анализ традиционных и инновационных методов обучения английскому языку. В исследовании рассматривались такие мультимедийные средства, как интерактивные презентации, обучающие

видеоролики, онлайн-платформы, электронные словари, мобильные приложения и виртуальные образовательные ресурсы.

В процессе исследования применялся метод наблюдения за деятельностью студентов во время занятий с использованием мультимедийных технологий. Анализировались уровень активности обучающихся, степень их вовлечённости в учебный процесс и качество выполнения языковых заданий. Особое внимание уделялось развитию навыков аудирования, говорения и восприятия аутентичной речи.

Кроме того, использовался метод педагогического анализа результатов обучения. Сравнивались показатели успеваемости студентов до и после внедрения мультимедийных средств в образовательный процесс. Для оценки эффективности обучения учитывались уровень усвоения лексического материала, способность к устной коммуникации, качество выполнения письменных заданий и степень мотивации обучающихся.

Методологической основой исследования стали коммуникативный, компетентностный и мультимодальный подходы. Коммуникативный подход ориентирован на развитие практических навыков общения на английском языке. Компетентностный подход предполагает формирование языковой, информационной и социокультурной компетенций. Мультимодальный подход обеспечивает интеграцию различных способов представления информации, что способствует более эффективному восприятию учебного материала.

Применение указанных методов позволило комплексно исследовать влияние мультимедийных технологий на процесс обучения английскому языку и определить их роль в повышении эффективности образовательного процесса.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты исследования показали, что использование мультимедийных технологий оказывает положительное влияние на процесс обучения английскому языку. Было установлено, что применение интерактивных

цифровых средств способствует повышению мотивации студентов и активизации их познавательной деятельности.

Студенты, обучавшиеся с использованием мультимедийных технологий, продемонстрировали более высокий уровень владения английским языком по сравнению с обучающимися, использовавшими только традиционные методы обучения. Особенно заметные результаты были выявлены в развитии навыков аудирования и устной речи. Использование видеоматериалов и аудиозаписей позволило студентам лучше воспринимать аутентичную английскую речь и совершенствовать произношение.

Кроме того, применение мультимедийных средств способствовало развитию самостоятельности обучающихся. Онлайн-платформы и электронные ресурсы обеспечили возможность индивидуального обучения и повторения сложного материала в удобном темпе. Наблюдение за учебным процессом показало, что мультимедийные технологии делают занятия более интересными и повышают уровень вовлечённости студентов.

Полученные результаты подтверждают эффективность мультимедиа как средства интенсификации обучения английскому языку.

ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные результаты подтверждают мнение исследователей о высокой эффективности мультимедийных технологий в процессе обучения английскому языку. Использование цифровых средств позволяет значительно расширить возможности традиционного обучения и сделать образовательный процесс более интерактивным и ориентированным на практическое применение языка.

Одним из главных преимуществ мультимедийных технологий является возможность сочетания различных форм представления информации. Одновременное использование текста, аудио, видео и графики способствует активизации нескольких каналов восприятия, что положительно влияет на качество усвоения материала. Особенно важным это является при изучении

иностранного языка, где значительную роль играют слуховое восприятие и коммуникативная практика.

Следует отметить, что мультимедийные технологии способствуют развитию самостоятельной учебной деятельности студентов. Современные цифровые ресурсы позволяют обучающимся самостоятельно выполнять задания, проходить тестирование, просматривать обучающие видеоматериалы и совершенствовать языковые навыки вне учебной аудитории. Это особенно актуально в условиях дистанционного обучения и цифровизации образования.

Вместе с тем существуют определённые трудности, связанные с внедрением мультимедиа в образовательный процесс. Одной из основных проблем является недостаточный уровень технического оснащения некоторых образовательных учреждений. Кроме того, эффективность использования мультимедийных технологий зависит от профессиональной подготовки преподавателя и его способности грамотно интегрировать цифровые средства в учебный процесс.

Несмотря на существующие трудности, мультимедийные технологии обладают значительным потенциалом в сфере обучения английскому языку. Их использование способствует повышению качества образования, развитию коммуникативных компетенций и формированию устойчивой мотивации обучающихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мультимедийные технологии являются эффективным средством интенсификации обучения английскому языку. Их применение способствует повышению качества образовательного процесса, развитию языковых навыков и активизации познавательной деятельности студентов.

Проведённое исследование показало, что использование мультимедиа положительно влияет на развитие навыков аудирования, говорения, чтения и письма. Видеоматериалы, интерактивные задания, электронные платформы и

мобильные приложения позволяют моделировать реальные коммуникативные ситуации и обеспечивают более глубокое усвоение учебного материала.

Особую значимость мультимедийные технологии приобретают в условиях цифровизации современного образования. Современные студенты активно используют цифровые устройства и интернет-ресурсы, поэтому интеграция мультимедиа в процесс обучения соответствует их образовательным потребностям и способствует повышению мотивации к изучению английского языка.

Вместе с тем успешное применение мультимедийных технологий требует соответствующей подготовки преподавателей, методически грамотной организации занятий и достаточного технического обеспечения образовательных учреждений. Только при комплексном подходе возможно достижение высокой эффективности обучения.

Перспективы дальнейших исследований связаны с изучением возможностей искусственного интеллекта, виртуальной и дополненной реальности в процессе обучения иностранным языкам. Развитие цифровых технологий открывает новые возможности для совершенствования языкового образования и повышения качества подготовки обучающихся.

Литературы

1. Богатырёва М.А. Мультимедийные технологии в обучении иностранным языкам. Просвещение. 2017. С. 114–124.

2. Каримова З.А. Информационно-коммуникационные технологии в обучении английскому языку. Инновация. 2021. С. 45–52.

3. Палагутина М.А. Инновационные технологии обучения иностранным языкам. Академия. 2018. С. 156–159.

4. Пашковская Н.Д. Дидактические возможности мультимедийных систем в обучении английскому языку. Наука. 2024. С. 90–96.

5. Быданцева А. Принципы отбора мультимедийных технологий в процессе формирования языковой компетенции. Университет. 2022. С. 103–112.

6. Rahmanu I.W.E.D. Multimodal Immersion in English Language Learning in Higher Education. Elsevier. 2024. P. 1–18.

7. Koç F.Ş. The Use of Artificially Intelligent Chatbots in English Language Learning. Cambridge University Press. 2024. P. 1–18.

8. Sánchez-Auñón E. The Use of Films in Teaching English as a Foreign Language. Springer Nature. 2023. P. 1–20.

9. Томонов Д.С. Современные подходы к обучению английскому языку. Педагогика. 2024. С. 238–243.

10. Падерин В.Н. Использование мультимедийных технологий в обучении студентов вузов. Образование. 2016. С. 9–15.

УДК 37.02:811.111

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ В ОБУЧЕНИИ АНГЛИЙСКОМУ ЯЗЫКУ

ИБРАГИМОВ Ш.М. МАХАМАТЖОНОВА Г.Т

Доцент ФерГУ shavkat70@bk.ru, Студентка ФерГУ

Аннотация: Данная работа посвящена анализу дидактических возможностей мобильных платформ в контексте преподавания английского языка. Автор исследует роль цифровых инструментов в современной образовательной среде, акцентируя внимание на эффективности мобильного обучения (m-learning) для совершенствования речевых компетенций студентов. В ходе исследования, основанного на обобщении педагогического опыта и сравнительном анализе, выявлено влияние таких сервисов, как Duolingo и Quizlet, на формирование лингвистической автономности. Итоги работы подтверждают, что интеграция мобильных решений в учебный план не только индивидуализирует процесс получения знаний, но и существенно стимулирует познавательный интерес учащихся, повышая общую результативность обучения.

Ключевые слова: m-learning, методика преподавания, иноязычная коммуникация, цифровизация, самостоятельность учащихся, образовательные тренды.

ВВЕДЕНИЕ. Современное образование претерпевает трансформацию под воздействием цифровых технологий, которые все активнее проникают в процесс обучения иностранным языкам. Мобильные устройства стали неотъемлемым атрибутом жизни студентов, что открывает широкие возможности для интеграции мобильных приложений в образовательный процесс. Мобильное обучение является одним из наиболее перспективных направлений в современной педагогике, поскольку оно открывает широкие возможности для доступности, гибкости и интерактивности учебного процесса.

Последние годы свидетельствуют о растущем интересе к применению мобильных технологий в обучении английскому языку. Такая тенденция обусловлена тем, что мобильные приложения предоставляют возможность организовать обучение вне зависимости от времени и места, гарантируя постоянный доступ к учебным материалам. Мобильное обучение также

стимулирует развитие самостоятельности студентов в процессе обучения и повышает их мотивацию.

Исследование актуально в связи с необходимостью повышения эффективности методов преподавания английского языка в эпоху цифровизации. В современных условиях обучения, где традиционные методы постепенно интегрируются с интерактивными технологиями, мобильные приложения приобретают особую значимость.

Цель исследования — изучить педагогический потенциал мобильных приложений в обучении английскому языку и определить их влияние на развитие автономности студентов.

Основными задачами исследования являются:

- анализ научной литературы по проблеме мобильного обучения;
- изучение особенностей использования мобильных приложений в обучении английскому языку;
- определение преимуществ и недостатков мобильного обучения;
- анализ влияния мобильных технологий на мотивацию и самостоятельность студентов.

Аналитический обзор литературы и методологические подходы

Мобильное обучение (M-learning) позиционируется современными научными кругами как значимый вектор развития цифрового образования. Данная технологическая парадигма предполагает задействование портативных устройств для структурирования образовательной деятельности и обеспечения беспрепятственного доступа к дидактическим ресурсам в режиме реального времени и в любом пространстве.

Согласно мнению значительного числа исследователей, мобильное обучение способствует оптимизации процесса изучения иностранных языков за счет присущей ему интерактивности, повсеместной доступности и потенциала для индивидуализации образовательной траектории. Современные мобильные приложения интегрируют разнообразные формы учебной активности, такие как

диагностическое тестирование, упражнения на развитие навыков аудирования, геймифицированные задания, мультимедийные материалы и платформы для виртуальной коммуникации.

В академической литературе акцентируются следующие ключевые преимущества мобильного обучения:

- Гибкость в организации образовательного процесса.
- Стимулирование развития автономии обучающихся.
- Повышение уровня учебной мотивации.
- Обеспечение доступности учебных материалов вне рамок традиционной аудитории.
- Возможность реализации персонализированного подхода к обучению

Среди наиболее востребованных форматов мобильного обучения выделяется применение специализированных приложений для освоения английского языка. Такие платформы, как Duolingo, Quizlet, Busuu и BBC Learning English, предоставляют студентам инструменты для интерактивного совершенствования языковых компетенций. Duolingo, построенный на принципах геймификации, стимулирует учебный процесс посредством системы уровней, наград и регулярных заданий, что способствует поддержанию устойчивой мотивации. Quizlet зарекомендовал себя как эффективное средство для расширения лексического запаса, предлагая электронные карточки и интерактивные упражнения. Busuu обеспечивает возможность прямого взаимодействия с носителями языка, что является ключевым фактором в развитии коммуникативных навыков и формировании практического владения языком. BBC Learning English, в свою очередь, предлагает обширный массив аудио- и видеоресурсов, ориентированных на развитие навыков аудирования и понимания устной речи.

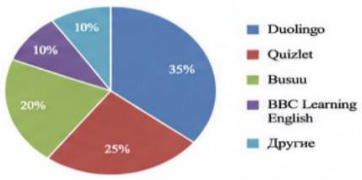
В рамках проведенного исследования были задействованы следующие методологические подходы:

- Изучение и систематизация актуальных научных публикаций и методических разработок.
- Проведение сравнительной оценки функциональных возможностей и педагогической целесообразности мобильных образовательных приложений.
- Непосредственное наблюдение за процессом освоения учебного материала студентами.
- Обобщение и систематизация накопленного педагогического опыта.

Результаты анализа литературных источников свидетельствуют о возрастающей роли мобильного обучения в современной образовательной парадигме, а также о его положительном влиянии на эффективность преподавания иностранных языков.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В рамках проведенного исследования было осуществлено анкетирование 120 студентов, обучающихся на 1–4 курсах факультета иностранных языков Ферганского государственного университета. Полученные в ходе анкетирования



данные свидетельствуют о следующем:

Рисунок 1. Распределение предпочтений студентов в отношении мобильных приложений для обучения (n=120)

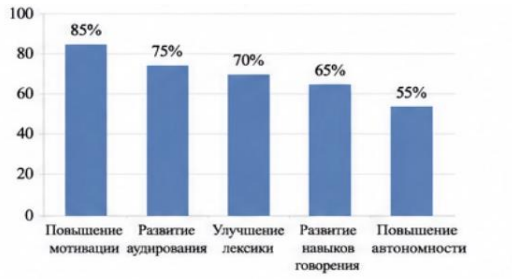


Рисунок 2. Оценка влияния мобильных приложений на освоение английского языка

Анализ данных, представленных на Рисунке 1, демонстрирует, что среди 120 опрошенных студентов наибольшей популярностью пользуется приложение Duolingo, выбранное 35% респондентов. Далее следует Quizlet с долей в 25%, а также Busuu, которым пользуются 20% студентов. Приложения BBC Learning English и прочие мобильные приложения были отмечены по 10% опрошенных соответственно.

Согласно данным исследования, подавляющее большинство студентов признают позитивное воздействие мобильных приложений на процесс изучения английского языка. В частности, 85% респондентов отметили повышение уровня мотивации, 75% — развитие навыков аудирования, 70% — улучшение лексических компетенций, 65% — прогресс в развитии навыков говорения, а 55% — рост автономности в обучении.

Наблюдение за студентами показало, что использование мобильных приложений способствует:

- более регулярному выполнению учебных заданий;
- самостоятельному изучению новых слов;
- улучшению произносительных навыков благодаря аудио- и видеоматериалам;
- развитию уверенности при использовании английского языка в реальных ситуациях.

Вместе с тем были выявлены некоторые трудности, связанные с использованием мобильных технологий. Среди них можно выделить отвлекающие факторы (социальные сети, уведомления), зависимость от качества интернет-соединения и недостаточный уровень цифровой грамотности у отдельных студентов.

Полученные результаты подтверждают, что мобильные приложения обладают высоким педагогическим потенциалом и способствуют повышению эффективности обучения английскому языку.

ВЫВОДЫ. Следовательно, мобильные приложения демонстрируют значительный образовательный потенциал в процессе освоения английского языка. Они обеспечивают вариативность учебного процесса, способствуют развитию коммуникативных компетенций и повышают уровень вовлеченности учащихся.

Полученные данные свидетельствуют о том, что мобильные технологии оказывают позитивное воздействие на самостоятельность обучающихся, формируя благоприятную среду для самообразования на иностранном языке. Применение специализированных приложений дает студентам возможность в любой момент обращаться к учебным материалам и совершенствовать свои знания за пределами аудитории.

Кроме того, мобильное обучение способствует индивидуализации образовательного процесса и внедрению современных интерактивных методов преподавания. Несмотря на существующие трудности, связанные с использованием цифровых технологий, мобильные приложения становятся важным инструментом современной системы образования.

В перспективе мобильное обучение будет занимать всё более значительное место в преподавании иностранных языков, способствуя модернизации образовательного процесса и повышению качества языкового образования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kukulska-Hulme A., Shield L. An Overview of Mobile Assisted Language Learning: From Content Delivery to Supported Collaboration and Interaction // ReCALL. – 2008. – Vol. 20(3). – P. 271–289.
2. Kukulska-Hulme A. Will Mobile Learning Change Language Learning? // ReCALL. – 2009. – Vol. 21(2). – P. 157–165.
3. Kukulska-Hulme A., Bull S. Theory-based Support for Mobile Language Learning: Noticing and Recording // International Journal of Interactive Mobile Technologies. – 2009. – Vol. 3(2). – P. 12–18.

4. Stockwell G. Using Mobile Phones for Vocabulary Activities: Examining the Effect of the Platform // Language Learning & Technology. – 2010. – Vol. 14(2). – P. 95–110.

5. Traxler J. Mobile Learning: The Future of Learning in Your Hands. – New York: Routledge, 2018.

6. Viberg O., Kukulska-Hulme A. Fostering Learners' Self-Regulation and Collaboration Skills and Strategies for Mobile Language Learning Beyond the Classroom // Educational Technology Research. – 2021.

7. Morgana V., Kukulska-Hulme A., Wu J. Mobile Assisted Language Learning Across Educational Contexts // Applied Linguistics. – Oxford University Press, 2023. – Vol. 44(6). – P. 1175–1178.

8. Jamaldeen F., Ekanayaka Y., Hewagamage K. A Theoretical Approach to Initiate Mobile Assisted Language Learning among School Leavers and University Students // International Journal of Education and Development using ICT. – 2016.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПЛАТФОРМ В ФОРМИРОВАНИИ ЯЗЫКОВОЙ КОМПЕТЕНЦИИ

ИСМОИЛЖОНОВА Ш.У.

студентка ФерГУ, ismoiljonovashodmonoy07 @gmail.com

Аннотация. В данной статье рассматривается влияние цифровых образовательных платформ на процесс формирования языковой компетенции обучающихся. Анализируется, каким образом современные онлайн-платформы способствуют развитию грамматических, лексических, аудитивных и коммуникативных навыков при изучении иностранных языков.Особое внимание уделяется преимуществам цифрового обучения, таким как доступность, интерактивность, индивидуальный темп обучения и мгновенная обратная связь. Также рассматривается роль мотивации обучающихся, которая значительно повышается благодаря использованию игровых элементов и мультимедийных ресурсов.В результате делается вывод о том, что использование цифровых образовательных платформ оказывает положительное влияние на качество обучения и способствует более эффективному формированию языковой компетенции.

Ключевые слова: цифровые образовательные платформы, языковая компетенция, онлайн-обучение, иностранные языки, образовательные технологии.

Введение. В последние десятилетия система образования претерпевает глубокие изменения, связанные с активным развитием информационно-коммуникационных технологий. Цифровизация охватывает практически все сферы обучения, однако особенно заметное влияние она оказывает на процесс изучения иностранных языков. Если ранее основным источником знаний выступали преподаватель, учебник и аудиторные занятия, то сегодня значительная часть образовательного процесса переносится в цифровую среду.

Современные обучающиеся всё чаще используют онлайн-платформы, мобильные приложения и интерактивные сервисы, которые позволяют изучать язык в удобное время и в индивидуальном темпе. Такой подход делает обучение более гибким, доступным и ориентированным на потребности конкретного студента. Особенно важно то, что цифровые технологии позволяют объединять различные виды речевой деятельности — чтение, аудирование, говорение и письмо — в единую систему обучения.

Изучение иностранного языка требует регулярной практики и постоянного взаимодействия с языковым материалом. Однако в традиционной образовательной среде не всегда достаточно времени для полноценной практики каждого обучающегося. В связи с этим возникает необходимость использования дополнительных инструментов, способных расширить учебное пространство за пределами аудитории. Именно цифровые образовательные платформы становятся таким инструментом, обеспечивая непрерывность и доступность обучения.

Сегодня широкое распространение получили такие платформы, как Duolingo, Quizlet, а также образовательные системы Moodle и Google Classroom. Эти ресурсы активно используются как в самостоятельном обучении, так и в рамках формального образовательного процесса.

Цифровые платформы предоставляют обучающимся возможность не только изучать теоретический материал, но и сразу применять его на практике через интерактивные упражнения, тесты, задания на аудирование и устную речь. Кроме того, они обеспечивают мгновенную обратную связь, что значительно повышает эффективность усвоения материала.

Цель данной статьи заключается в том, чтобы проанализировать и оценить эффективность цифровых образовательных платформ в процессе формирования языковой компетенции, а также определить их роль в повышении качества современного языкового образования.

Понятие языковой компетенции (расширенное). Языковая компетенция представляет собой способность человека эффективно и правильно использовать язык в различных ситуациях общения. Это не только знание грамматических правил и слов, но и умение применять их в реальной коммуникации в зависимости от цели, ситуации и собеседника.

Иными словами, языковая компетенция отражает уровень владения языком, при котором обучающийся может свободно выражать свои мысли, понимать других людей и адекватно реагировать в процессе общения.

Современная лингвистика и методика преподавания иностранных языков рассматривают языковую компетенцию как комплексное явление, которое формируется постепенно и включает несколько взаимосвязанных компонентов.

Основные компоненты языковой компетенции:

1. Грамматическая компетенция. Это знание грамматических правил языка и умение правильно строить предложения. Она включает использование времен, форм слов, порядка слов и синтаксических конструкций. Без грамматики речь становится непонятной или неправильной.

2. Лексическая компетенция. Данный компонент связан с запасом слов и выражений. Чем больше слов знает обучающийся, тем точнее он может выражать свои мысли. Важно не только знать слова, но и уметь использовать их в нужном контексте.

3. Фонетическая компетенция. Она включает правильное произношение звуков, интонацию и ударение. Хорошая фонетика помогает сделать речь понятной для собеседника и избежать недопонимания.

4. Аудитивная компетенция (понимание на слух). Это способность понимать речь других людей, включая носителей языка. Она требует регулярного прослушивания аудио, видео и живой речи.

5. Речевая (коммуникативная) компетенция. Это умение использовать язык в реальном общении: задавать вопросы, отвечать, поддерживать диалог, выражать мнение, эмоции и аргументы.

6. Письменная компетенция. Она включает умение грамотно писать тексты, письма, эссе и другие виды письменной речи с соблюдением правил языка.

Важность языковой компетенции. Языковая компетенция является основой успешного изучения любого иностранного языка. Без нее невозможно полноценное общение, понимание культуры и участие в международной коммуникации.

Особенно важно отметить, что языковая компетенция формируется не только через изучение правил, но и через постоянную практику. Чем больше

человек использует язык в реальных или учебных ситуациях, тем быстрее развивается его уровень владения.

Современный подход. В современном образовании языковая компетенция рассматривается не как теория, а как практический навык. Поэтому большое внимание уделяется коммуникативному подходу, где обучающиеся активно говорят, слушают, читают и пишут с самого начала обучения.

Цифровые технологии и образовательные платформы также играют важную роль в развитии языковой компетенции, так как они создают условия для постоянной практики и взаимодействия с языком.

Роль цифровых образовательных платформ в развитии языковой компетенции. В современном образовательном процессе цифровые образовательные платформы играют важную роль в формировании и развитии языковой компетенции обучающихся. Они создают условия для более эффективного изучения иностранного языка за счет интерактивности, доступности и индивидуального подхода к обучению.

Одним из главных преимуществ цифровых платформ является возможность постоянной практики языка. В отличие от традиционного обучения, где количество времени ограничено учебным занятием, онлайн-платформы позволяют обучающимся заниматься в любое удобное время, повторять материал и закреплять знания на практике.

Кроме того, цифровые ресурсы способствуют развитию всех компонентов языковой компетенции одновременно. Например, грамматические упражнения помогают закрепить правила, лексические задания расширяют словарный запас, аудио- и видеоматериалы развивают навыки аудирования, а интерактивные задания и онлайн-общение формируют коммуникативные навыки.

Особую роль в обучении играют такие платформы, как Duolingo, Quizlet, а также системы управления обучением Moodle и Google Classroom. Они позволяют структурировать учебный процесс, отслеживать прогресс и обеспечивать обратную связь между преподавателем и обучающимся.

Также важным аспектом является развитие мотивации. Благодаря игровым элементам, системе баллов, уровней и достижений, обучающиеся проявляют больший интерес к изучению языка. Это особенно важно на начальных этапах обучения, когда необходимо сформировать устойчивую привычку к регулярным занятиям.

Преимущества использования цифровых образовательных платформ

Использование цифровых образовательных платформ в обучении иностранным языкам имеет ряд значительных преимуществ:

- доступность обучения независимо от места и времени;
- возможность индивидуального темпа обучения;
- интерактивный формат занятий;
- мгновенная проверка заданий и получение обратной связи;
- широкий выбор учебных материалов;
- повышение мотивации обучающихся;
- развитие самостоятельности и ответственности за процесс обучения.

Благодаря этим преимуществам процесс изучения языка становится более гибким, эффективным и ориентированным на потребности каждого обучающегося.

Недостатки цифрового обучения. Несмотря на большое количество преимуществ, цифровые образовательные платформы имеют и определенные недостатки.

Во-первых, обучение полностью зависит от наличия интернета и технических устройств. Во-вторых, у некоторых обучающихся может снижаться уровень живого общения, что влияет на развитие разговорных навыков. В-третьих, при отсутствии самодисциплины эффективность самостоятельного обучения может снижаться.

Также стоит отметить, что чрезмерное использование цифровых технологий может привести к усталости и снижению концентрации внимания.

Поэтому важно сочетать цифровое обучение с традиционными методами преподавания.

Заключение. В ходе анализа было установлено, что цифровые образовательные платформы играют важную роль в процессе формирования языковой компетенции обучающихся. Они обеспечивают более эффективное изучение иностранных языков за счет доступности, интерактивности и возможности индивидуализации обучения.Использование цифровых технологий позволяет развивать все основные компоненты языковой компетенции: грамматическую, лексическую, фонетическую, аудитивную, речевую и письменную. Благодаря регулярной практике и мгновенной обратной связи обучающиеся быстрее усваивают материал и закрепляют полученные знания.Кроме того, цифровые платформы значительно повышают мотивацию студентов за счет игровых элементов, визуализации прогресса и удобного формата обучения. Это способствует формированию устойчивого интереса к изучению иностранного языка.Однако, несмотря на очевидные преимущества, цифровое обучение имеет и определенные недостатки, такие как зависимость от технических средств, ограниченность живого общения и необходимость высокой самодисциплины. Поэтому наиболее эффективным является сочетание цифровых и традиционных методов обучения.

Таким образом, можно сделать вывод, что цифровые образовательные платформы оказывают положительное влияние на качество обучения и способствуют более успешному формированию языковой компетенции.

Список литературы

1. Пассов Е. И. Методика обучения иностранным языкам. — Москва: Просвещение, 2010.

2. Полат Е. С. Современные педагогические и информационные технологии в образовании. — Москва, 2015.

3. Сысоев П. В. Использование информационных технологий в обучении иностранным языкам. — Тамбов, 2018.

4. Harmer J. *The Practice of English Language Teaching*. Pearson Education, 2015.

5. Richards J. C., Rodgers T. S. *Approaches and Methods in Language Teaching*. Cambridge University Press, 2014.

6. Warschauer M. Technology and Language Learning. Oxford University Press, 2019.

7. Dudeney G., Hockly N. *How to Teach English with Technology*. Pearson, 2016.

УДК 165.0 + 51-7 + 37.016

ФИЛОСОФСКО-ЭПИСТЕМОЛОГИЧЕСКАЯ ПРИРОДА НАВЫКОВ УСТНОГО СЧЁТА И ИХ КАТЕГОРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

И.Т.ТОЖИБОЕВ, Д.М.РУСТАМОВА

ФерГУ, ibroxim@gmail.com

Аннотация. В статье предпринимается систематическое философско-эпистемологическое исследование понятия «навыки устного счёта». Впервые в рамках современной аналитической философии математики и когнитивной эпистемологии предложено развёрнутое научное определение данного понятия, а его структурные компоненты подвергнуты тематической классификации. Показано, что навыки устного счёта представляют собой особый когнитивный феномен, соединяющий в себе процедурное и декларативное знание, опирающийся на протоарифметические способности человека и реализуемый через механизмы рабочей памяти, ментальных репрезентаций и культурно обусловленных вычислительных стратегий. Статья опирается на современные аналитические подходы в эпистемологии математики, труды в области когнитивной науки и философии разума. Предлагается категориальная схема анализа данного феномена, включающая онтологическое, гносеологическое, процессуальное и культурно-семиотическое измерения. Аргументируется, что устный счёт как объект эпистемологического исследования не может быть сведён ни к чисто вычислительному процессу, ни к педагогической практике, но представляет собой самостоятельную эпистемическую категорию со специфической структурой знания.

Ключевые слова:эпистемология математики; устный счёт; когнитивная эпистемология; ментальная арифметика; категориальный анализ; процедурное знание; рабочая память; протоарифметические способности; философия математики; числовое познание.

1. Введение: постановка проблемы

Навыки устного счёта принадлежат к числу тех когнитивных феноменов, которые обнаруживают поразительное несоответствие между своей универсальной распространённостью в человеческой практике и крайне слабой концептуальной проработанностью в философии и эпистемологии. Каждый человек обладает определённой степенью способности производить арифметические действия в уме, без привлечения внешних носителей – бумаги, счётных инструментов, электронных устройств. Тем не менее вопрос о природе, структуре и эпистемическом статусе этой способности остаётся по существу открытым.

Положение дел в смежных дисциплинах – когнитивной психологии, нейронауках, педагогике математики – существенно богаче: там накоплен значительный эмпирический материал относительно механизмов выполнения арифметических операций в уме [Dehaene, 1997; Ashcraft, 1992; Siegler, 1988]. Однако именно философское осмысление этого материала остаётся незавершённым. Вопросы о том, что значит «знать» устный счёт, каков эпистемический статус этого знания, как оно соотносится с более широкими структурами математического познания, – всё это остаётся предметом дискуссий, в которых философия участвует лишь косвенно.

Актуальность настоящего исследования определяется несколькими взаимосвязанными обстоятельствами. Во-первых, современная эпистемология математики переживает период активного обновления благодаря интеграции с когнитивными науками [Pantsar, 2024; Buijsman, 2021]. Появление таких понятий, как «протоарифметические способности», «числовое ощущение», «когнитивная энкультурация», ставит на повестку дня вопрос о том, как именно устный счёт – одна из наиболее базовых форм математической практики – вписывается в эти теоретические схемы.

Во-вторых, в аналитической философии математики традиционно господствует интерес к обоснованию абстрактных математических истин, тогда как конкретные

когнитивные практики – такие как устный счёт – воспринимаются как объект психологии, а не философии. Настоящая статья оспаривает это разграничение, показывая, что устный счёт представляет собой эпистемологически самостоятельный предмет анализа.

В-третьих, в научной литературе отсутствует консенсусное определение понятия «навыки устного счёта», позволяющее отграничить их от смежных феноменов – письменного счёта, использования счётных инструментов, интуитивного численного оценивания. Восполнение этого концептуального пробела составляет одну из ключевых задач данной работы.

Цель статьи состоит в том, чтобы: (1) предложить развёрнутое философско-эпистемологическое определение навыков устного счёта; (2) разработать категориальную схему анализа данного феномена; (3) определить место устного счёта в архитектуре математического знания; (4) установить связи данного феномена с ключевыми проблемами современной эпистемологии математики.

Методологическую основу статьи составляют: аналитическая философия математики, когнитивная эпистемология, семиотический подход к знанию, а также концептуальный анализ как специфический инструмент философского исследования. Статья опирается на труды ведущих исследователей в области эпистемологии математики [Pantsar, 2014; Pantsar, 2019; Fabry, 2020; De Cruz, 2016; Giaquinto, 2007], когнитивных наук [Dehaene, 2011; Ashcraft, 1992; Siegler, 1988; Siegler; Lemaire, 1997], а также на публикации в ведущих индексируемых журналах, в том числе «Epistemology and Philosophy of Science», Synthese, Phenomenology and the Cognitive Sciences.

Научная новизна исследования состоит в следующем. Во-первых, впервые в рамках аналитической философии математики навыки устного счёта концептуализируются как самостоятельная эпистемическая категория, а не как частный случай вычислительной практики или педагогического навыка.

Во-вторых, предложено интегративное философско-эпистемологическое определение данного феномена, учитывающее его когнитивную, культурно-семиотическую и процессуальную природу. В-третьих, разработана оригинальная категориальная схема анализа навыков устного счёта, включающая онтологическое, гносеологическое, процессуальное и культурно-семиотическое измерения. В-четвёртых, обосновано положение о медиирующей роли устного счёта в архитектуре математического знания между протоарифметическими способностями и формализованной математикой.

2. Состояние проблемы: обзор литературы

2.1. Философские подходы к эпистемологии математики.

Традиционная эпистемология математики сосредоточена преимущественно на вопросах обоснования математических истин и природы математических объектов [Benacerraf, 1973; Field, 1989]. Взаимодействие между философией математики и когнитивными науками долгое время оставалось минимальным: математика трактовалась либо как синтетическое суждение a priori (Кант), либо как плод чистого логического анализа (Фреге, Рассел), либо как формальная игра символами (Гильберт), – и ни в одном из этих подходов когнитивная реальность конкретных вычислительных практик не занимала самостоятельного места.

Поворотным моментом стали работы конца XX – начала XXI века, в которых предпринята попытка интегрировать результаты когнитивной психологии и нейронауки в

философию математики. Особую роль сыграли исследования Пантсара [Pantsar, 2014; 2019; 2024], обосновавшего понятие «контекстуально априорного» арифметического знания: арифметика не является ни чисто опытным знанием (в смысле Милля), ни безусловно априорным (в смысле Канта), но возникает на пересечении биологически данных протоарифметических способностей и культурно оформленных вычислительных практик.

В этой же парадигме работает Буийсман [Buijsman, 2021], показывающий, как когнитивная наука может служить основой для эпистемологии арифметики, не впадая при этом в эмпиризм или натурализм. Де Круз [De Cruz, 2016] исследует роль числового познания в обосновании математического реализма. Фабри [Fabry, 2020] разрабатывает концепцию «обучающей нейронной пластичности» применительно к арифметическим умениям.

Тем не менее в этих работах устный счёт как таковой не становится самостоятельным объектом рассмотрения: он фигурирует скорее как один из примеров арифметической практики. Настоящая статья восполняет этот пробел, превращая устный счёт в центральный предмет философско-эпистемологического анализа.

2.2. Когнитивно-научные подходы к ментальной арифметике

В когнитивной психологии ментальная арифметика – ближайший аналог устного счёта в научной терминологии – изучается весьма интенсивно. Классические работы Эшкрафта [Ashcraft, 1992] и Зиглера [Siegler, 1988] установили, что выполнение арифметических операций в уме опирается на гетерогенный набор стратегий: прямое извлечение из памяти, процедурные алгоритмы, разложение задачи на подзадачи. Этот стратегический плюрализм имеет непосредственные философские следствия, которые, однако, в когнитивной психологии не были должным образом концептуализированы.

Дэйен [Dehaene, 1997; 2011] развил теорию «числового ощущения» (number sense), согласно которой человек (и многие животные) обладают врождённой способностью к приближённой численной оценке, обеспечиваемой системой аппроксимации числа (Approximate Number System, ANS). Эта биологически обусловленная способность образует, по мысли Дэйена, фундамент, на котором культура и образование надстраивают точный арифметический счёт. Данная концепция смыкается с философскими построениями Пантсара [Pantsar, 2019], хотя между ними существуют и важные концептуальные расхождения, анализ которых выходит за рамки настоящей статьи.

Важнейшую роль в исследованиях ментальной арифметики играет концепция рабочей памяти, разработанная Бэддели [Baddeley, 2012]. Рабочая память выступает тем когнитивным «рабочим пространством», в котором разворачиваются вычислительные процессы при устном счёте: она удерживает промежуточные результаты, координирует применение стратегий, обеспечивает подавление нерелевантных ответов. Функциональные ограничения рабочей памяти во многом определяют характерные ошибки и трудности устного счёта.

Параллельно развивалось исследование «арифметических фактов» – прямых ассоциативных связей между условиями задачи и ответом (например, $7 \times 8 = 56$), хранящихся в долговременной семантической памяти [Ashcraft, 1992; Campbell; Xue, 2001]. Соотношение стратегий прямого извлечения из памяти и процедурных вычислений – один из центральных вопросов когнитивной психологии арифметики, имеющий прямые следствия для понимания природы арифметического знания.

2.3. Семиотические и культурно-антропологические подходы

Устный счёт не является инвариантным: его конкретные формы существенно зависят от языка, культуры и нотационных систем счисления [Schlimm, 2018; Wiese, 2007]. Исследования трансъязыкового разнообразия числовых систем [Everett, 2017; Overmann, 2023] показали, что структура числительных в языке оказывает значительное влияние на доступность и эффективность арифметических стратегий. Так, прозрачность основания десятичной системы в ряде азиатских языков коррелирует с более высокой скоростью освоения арифметических операций в уме.

С философской точки зрения эти данные указывают на то, что устный счёт является культурно опосредованной практикой в смысле Выготского: он не может быть сведён ни к чисто биологическому «числовому ощущению», ни к формальным алгоритмам, но существует на пересечении природных когнитивных способностей и культурно-семиотических инструментов. Это роднит проблематику устного счёта с широкими дискуссиями о «распределённом познании» [Hutchins, 1995] и «расширенном разуме» [Clark; Chalmers, 1998].

Таким образом, анализ литературы обнаруживает конвергентное движение различных дисциплин – философии математики, когнитивной психологии, нейронауки, лингвистики, антропологии – к проблематике устного счёта, не сопровождаемое, однако, соответствующей философской концептуализацией. Данная статья претендует на заполнение этой лакуны.

3. К определению понятия «навыки устного счёта»

3.1. Предварительный концептуальный анализ

Прежде чем предложить систематическое определение, необходимо уточнить, что именно стоит за выражением «навыки устного счёта» и каковы его границы. В обыденном языке «устный счёт» противопоставляется «письменному счёту» по признаку отсутствия внешних фиксирующих средств (бумаги, доски и т.п.), а также «счёту на калькуляторе» – по признаку отсутствия технических устройств. Это, однако, лишь предварительное, негативное разграничение.

Позитивная характеристика требует большей аналитической тонкости. Устный счёт может осуществляться: (a) действительно «вслух» – с проговариванием вычислений; (b) «в уме» – в форме внутренней речи или образных представлений; (c) в смешанном режиме – с опорой на жесты, счёт на пальцах, ритмические движения. Все три варианта объединяет отсутствие постоянной внешней фиксации промежуточных результатов, что радикально отличает их от письменного счёта.

Понятие «навыки» в данном контексте отсылает к философскому различению «знания-что» (knowing-that, пропозициональное знание) и «знания-как» (knowing-how, практическое знание), восходящему к Райлу [Ryle, 1949]. Навыки устного счёта не сводимы к знанию арифметических фактов – они включают способность к гибкому, адаптивному применению вычислительных стратегий в условиях ограниченных когнитивных ресурсов. Это сближает их со стандилевским понятием умения [Stanley; Williamson, 2001], хотя данная проблема требует отдельного рассмотрения.

3.2. Определение понятия

На основании проведённого концептуального анализа предлагается следующее определение:

> *«Навыки устного счёта – это интегративная когнитивная способность, состоящая в выполнении арифметических операций над числовыми объектами (суммирование, вычитание, умножение, деление и их*

комбинации) преимущественно во внутреннем когнитивном пространстве (с возможной опорой на звуковые/речедвигательные механизмы), без постоянной внешней символьной фиксации промежуточных результатов, посредством гибкого применения усвоенных стратегий и автоматизированных процедур при использовании рабочей памяти и долговременных числовых репрезентаций».

Данное определение требует ряда пояснений. Во-первых, термин «интегративная когнитивная способность» указывает на системный характер феномена: навыки устного счёта не являются единым, неделимым умением, но представляют собой конфигурацию взаимосвязанных когнитивных компетенций. Во-вторых, оговорка «преимущественно во внутреннем когнитивном пространстве» необходима, поскольку допускает использование вспомогательных средств (счёт на пальцах, мнемонические жесты), не сводя при этом устный счёт к инструментально опосредованному.

В-третьих, указание на «гибкое применение усвоенных стратегий» принципиально: оно отграничивает подлинный устный счёт от механического заучивания ограниченного набора фактов. Гибкость стратегического выбора – например, решение 47 × 6 через (50 − 3) × 6 = 300 − 18 = 282, а не через буквальное следование алгоритму письменного умножения – является сущностной чертой развитого навыка устного счёта.

В-четвёртых, указание на рабочую память как операциональный субстрат согласуется с данными когнитивной психологии [Baddeley, 2012] и обеспечивает связь философского определения с эмпирическими исследованиями. Однако это не означает редукционизма: философский уровень анализа не сводится к нейропсихологическому описанию процессов.

3.3. Место определения в концептуальном пространстве

Предложенное определение позволяет провести систематическое разграничение с рядом смежных понятий. Устный счёт отличается от «числового ощущения» (number sense): последнее является доязыковой, эволюционно древней способностью к приближённой численной оценке, тогда как устный счёт требует точных символьных операций и усвоения культурно переданных стратегий. Дэйен [Dehaene, 1997] и Пантсар [Pantsar, 2014] убедительно показали, что «числовое ощущение» составляет биологическую почву, на которой вырастают точные арифметические умения, – но не является ни необходимым, ни достаточным условием устного счёта.

Устный счёт отличается также от «арифметических фактов» как компонентов семантической памяти: последние суть хранящиеся в памяти результаты (таблица умножения, ряд натуральных чисел), тогда как устный счёт – это способность гибко оперировать этими фактами и дополнять их посредством алгоритмических процедур. Наконец, устный счёт отличается от «вычислительного мышления» (computational thinking) как обобщённой когнитивной компетенции: он конкретен, привязан к числовой области и реализуется в условиях характерных когнитивных ограничений.

4. Категориальный анализ навыков устного счёта

4.1. Методологические основания категориального анализа

Категориальный анализ – специфический инструмент философского исследования, направленный на выявление базовых понятийных различений, структурирующих изучаемый феномен. В применении к навыкам устного счёта он предполагает выделение измерений, в которых этот феномен существует и может быть последовательно описан. Предлагаемая

категориальная схема не претендует на исчерпывающую полноту, но стремится охватить концептуально необходимые аспекты явления.

Следует специально подчеркнуть, что речь идёт именно о философско-категориальном анализе, а не о классификации педагогических задач, уровней сложности или образовательных результатов. Последние представляют интерес для педагогической науки, но остаются за пределами собственно философского исследования. Настоящая работа анализирует устный счёт как эпистемический феномен.

4.2. Онтологическое измерение

4.2.1. Тип объекта: способность или знание?

Первый и, пожалуй, наиболее фундаментальный онтологический вопрос о навыках устного счёта состоит в следующем: являются ли они разновидностью знания или разновидностью способности (умения)? Этот вопрос восходит к классическому различению Райла между знанием-что и знанием-как [Ryle, 1949], получившему дальнейшее развитие в дискуссиях между Стэнли и Уильямсоном [Stanley; Williamson, 2001] с одной стороны и их критиками – с другой.

Позиция Стэнли и Уильямсона состоит в том, что знание-как в конечном счёте сводимо к знанию-что: умение ездить на велосипеде – это знание пропозиции о том, как ездить на велосипеде, применяемое в определённых обстоятельствах. Эта редукционистская позиция применительно к устному счёту означала бы, что навыки устного счёта – это просто знание пропозиций вида «чтобы умножить 47 на 6, нужно применить такую-то стратегию». Однако данная позиция вызывает серьёзные возражения.

Принципиальная трудность состоит в том, что в ситуации реального устного счёта субъект не рефлектирует над применяемыми стратегиями: он их применяет. Тахий и соавторы [Siegler; Lemaire, 1997] показали, что выбор стратегии при ментальной арифметике осуществляется преимущественно имплицитно: субъект не формулирует решение «применить стратегию декомпозиции», но непосредственно её применяет. Это указывает на то, что навыки устного счёта обладают характеристиками «неявного знания» в смысле Полани [Polanyi, 1966], которое невозможно исчерпывающим образом артикулировать в пропозициональной форме.

Вместе с тем было бы неверно описывать навыки устного счёта исключительно как диспозиции, лишённые когнитивного содержания. Субъект, владеющий устным счётом, действительно знает кое-что: он знает таблицу умножения, знает принципы позиционной записи чисел, знает, что сложение коммутативно. Это пропозициональное знание является необходимым компонентом навыка, но не исчерпывает его. Отсюда следует, что онтологически навыки устного счёта представляют собой гибридный феномен, объединяющий пропозициональное и процедурное, эксплицитное и имплицитное знание.

4.2.2. Реализм и антиреализм в отношении объектов устного счёта

Онтологический анализ включает также вопрос о статусе математических объектов, с которыми оперирует устный счёт. Платонистский реализм трактует числа как абстрактные объекты, существующие независимо от разума, – и тогда устный счёт предстаёт как практика, направленная на постижение этих объектов. Конструктивизм, напротив, полагает, что числа суть конструкции разума или культуры, – и тогда устный счёт оказывается конститутивной, а не только познавательной практикой.

Современная эпистемология математики предлагает более нюансированные позиции. Пантсар [Pantsar, 2024] утверждает, что натуральные числа существуют как социальные конструкты, укоренённые в протоарифметических биологических способностях: они не являются ни платоновскими сущностями, ни произвольными культурными изобретениями. Для эпистемологии устного счёта эта позиция особенно продуктивна: она позволяет объяснить как универсальность базовых арифметических истин, так и культурное разнообразие вычислительных практик.

Таким образом, редукция навыков устного счёта либо к чисто пропозициональному знанию, либо к чисто поведенческой способности оказывается философски несостоятельной, поскольку не учитывает их гибридную эпистемическую структуру. Это требует пересмотра традиционного различения знания-что и знания-как в контексте математического познания.

4.3. Гносеологическое измерение

4.3.1. Структура знания при устном счёте

С гносеологической точки зрения навыки устного счёта характеризуются специфической структурой знания, включающей три взаимосвязанных компонента. Первый – декларативные арифметические знания: числовые факты, хранящиеся в долговременной семантической памяти (таблица сложения, таблица умножения, числовые отношения). Второй – процедурные знания: усвоенные алгоритмы и стратегии выполнения арифметических операций. Третий – условное знание (conditional knowledge): знание о том, когда применять те или иные стратегии, то есть метакогнитивная регуляция вычислительного процесса [Flavell, 1979].

Данная трёхкомпонентная структура в целом согласуется с различением декларативного и процедурного знания в когнитивной психологии [Anderson, 1983], однако философски обогащается указанием на метакогнитивный компонент. Важно подчеркнуть, что эти три компонента образуют не простую сумму, но интегрированную систему: активация стратегии декомпозиции при умножении предполагает одновременное обращение к числовым фактам, следование процедурному алгоритму и осуществление метакогнитивного мониторинга.

4.3.2. Эпистемический статус: a priori или a posteriori?

Вопрос об эпистемическом статусе арифметического знания – является ли оно априорным или апостериорным – занимает центральное место в философии математики начиная с Канта. Применительно к навыкам устного счёта этот вопрос приобретает специфическую остроту.

Кантианская позиция состоит в том, что арифметические суждения суть синтетические суждения a priori: их истинность не выводится из анализа понятий (как аналитические суждения) и не устанавливается посредством опыта (как эмпирические суждения), но обеспечивается чистым созерцанием времени как формой последовательного счёта. Эта позиция, будучи привлекательной в отношении общих арифметических истин, плохо применима к конкретным навыкам устного счёта: очевидно, что умение быстро умножать двузначные числа приобретается через упражнение, то есть является в некотором существенном смысле апостериорным.

Более перспективным представляется подход Пантсара [Pantsar, 2014: 4201–4205], вводящего понятие «контекстуально априорного» знания. Согласно ему, базовые арифметические истины могут быть познаны a priori в рамках контекста, задаваемого нашими

биологическими протоарифметическими способностями и культурными практиками. Применительно к устному счёту это означает: конкретные навыки являются апостериорными (они приобретаются в процессе обучения), тогда как их нормативная основа – истинность используемых арифметических соотношений – обладает контекстуально априорным характером.

4.3.3. Вопрос о надёжности: эпистемическая дееспособность устного счёта

Эпистемология добродетелей предлагает альтернативный угол зрения: когнитивный агент знает нечто тогда, когда его убеждение сформировано надёжным когнитивным процессом или является выражением интеллектуальной добродетели [Sosa, 2007]. С этой точки зрения навыки устного счёта интересны как пример когнитивной практики с управляемой надёжностью: при использовании хорошо усвоенных стратегий субъект систематически приходит к правильным ответам; ошибки же носят предсказуемый характер и обусловлены специфическими ограничениями рабочей памяти.

Следовательно, навыки устного счёта демонстрируют, что арифметическое знание не является однородным по своему эпистемическому статусу, а включает различные уровни и формы, требующие дифференцированного философского анализа.

4.4. Процессуальное измерение

4.4.1. Стратегическая архитектура

Одной из наиболее изученных характеристик ментальной арифметики является стратегический плюрализм: субъект располагает несколькими альтернативными способами решения одной и той же задачи и выбирает между ними в зависимости от характеристик задачи и собственного опыта [Siegler; Lemaire, 1997]. Философская релевантность этого факта велика: он означает, что устный счёт является гибкой, адаптивной когнитивной практикой, а не жёсткой последовательностью операций.

Можно выделить следующие основные классы стратегий устного счёта. Первый – стратегии прямого извлечения: ответ непосредственно воспроизводится из долговременной памяти без явных вычислений (3 + 4 = 7). Второй – стратегии трансформации: задача преобразуется к более удобному виду (47 × 6 = (50 − 3) × 6 = 300 − 18 = 282). Третий – стратегии декомпозиции: задача разбивается на более простые подзадачи (67 + 48 = 67 + 40 + 8 = 107 + 8 = 115). Четвёртый – стратегии аппроксимации: приближённый ответ уточняется последующей коррекцией.

С философской точки зрения важно, что данные стратегии не являются произвольными: они отражают структуру десятичной позиционной системы счисления, свойства арифметических операций (коммутативность, дистрибутивность, ассоциативность) и ограничения рабочей памяти. Таким образом, стратегическая архитектура устного счёта опосредует отношение между математическими структурами и когнитивными ресурсами субъекта.

4.4.2. Автоматизация и контролируемая обработка

Важнейшей чертой развитого навыка устного счёта является постепенный переход вычислительных процессов с уровня осознанного контроля на уровень автоматизации. Этот переход – центральная тема когнитивной психологии умений [Logan, 1988] – имеет прямые философские следствия: автоматизированные вычислительные процессы оказываются, по-видимому, недоступны для рефлексии и не могут быть полностью артикулированы субъектом,

что сближает устный счёт с другими формами воплощённого, «молчаливого» знания [Polanyi, 1966].

Вместе с тем полная автоматизация устного счёта невозможна и нежелательна: задачи, выходящие за пределы хорошо усвоенных случаев, требуют активного контролируемого вмешательства. Опытный «устный счётчик» характеризуется способностью гибко переключаться между автоматическими и контролируемыми процессами – ещё одна черта, указывающая на принципиальную гибридность рассматриваемого феномена.

4.5. Культурно-семиотическое измерение

4.5.1. Язык и числовые системы

Принципиально важным для философского понимания устного счёта является его культурно-семиотическая составляющая. Числа не являются непосредственно данными сознанию природными объектами: они всегда опосредованы системой числительных конкретного языка и конкретной нотационной системой счисления. Шлимм [Schlimm, 2018] убедительно показал, что различные системы числовых нотаций создают неодинаковые условия для выполнения арифметических операций: десятичная позиционная система, принятая в современном мире, радикально трансформирует возможности устного счёта по сравнению с, например, римской нотацией.

На языковом уровне Визе [Wiese, 2007] и Дэйен [Dehaene, 2011] указали на существенные различия в прозрачности числовых систем: языки, в которых числительные регулярно отражают позиционную структуру («десять-один», «десять-два» и т.д.), облегчают усвоение арифметических стратегий по сравнению с языками с нерегулярными числительными. Это свидетельствует о том, что навыки устного счёта частично конституируются языком – то есть являются не только когнитивным, но и лингвистическим феноменом.

4.5.2. Устный счёт как культурная практика

В более широкой перспективе устный счёт предстаёт как культурная практика, передающаяся через обучение и социальное взаимодействие. Это роднит его с другими формами «технического знания» в смысле Поланьи [Polanyi, 1966], которые приобретаются в ходе ученичества и практики, а не просто через усвоение явных правил. Данный аспект имеет прямое следствие для понимания природы знания, воплощённого в навыках устного счёта: это знание является по существу практическим, ситуированным, социально передаваемым.

Этнографические исследования показывают, что формы устного счёта, распространённые в различных культурах, существенно различаются: от абак-опосредованного счёта до специфических мнемонических систем [Everett, 2017; Overmann, 2023]. Это разнообразие не опровергает универсальности базовых арифметических истин, но подтверждает, что их воплощение в конкретных вычислительных практиках глубоко культурно обусловлено.

5. Навыки устного счёта в архитектуре математического знания

5.1. Уровни математической эпистемологии

Современная эпистемология математики работает, как правило, с двумя уровнями математического знания: уровнем базовых числовых представлений (proto-mathematical abilities) и уровнем формального математического знания (доказательства, теоремы, аксиоматические системы). Между этими уровнями обнаруживается концептуальный провал,

который в большинстве известных теорий заполнен лишь указанием на роль «образования» и «культурной передачи» без детализации.

Анализ навыков устного счёта позволяет выявить промежуточный уровень, занимающий принципиально важную позицию в этой архитектуре. Устный счёт располагается между биологически данной способностью к приближённой численной оценке (ANS, число-объектная система OTS) и формализованными математическими структурами. Он является тем медиатором, посредством которого природные числовые интуиции трансформируются в точное арифметическое знание.

Пантсар [Pantsar, 2019] описывает этот процесс медиации как «энкультурацию» – усвоение культурных когнитивных инструментов, преобразующих биологически данные способности. Настоящее исследование конкретизирует понятие энкультурации применительно к устному счёту: оно происходит через усвоение числительных, арифметических фактов, вычислительных стратегий и метакогнитивных регуляторов в ходе социально организованного обучения.

5.2. Навыки устного счёта и «числовое ощущение»

Теория «числового ощущения» Дэйена [Dehaene, 1997] постулирует биологически данную способность к аппроксимированной численной оценке, опирающуюся на систему аппроксимации числа (ANS). Эта способность является общей для человека и многих животных, она не требует языка и культурного обучения, но обеспечивает только приближённые численные суждения («около двадцати», «намного больше»).

Навыки устного счёта, в отличие от ANS, являются точными, культурно опосредованными и требуют усвоения. Они используют ANS как фоновый ресурс – для контроля правдоподобности промежуточных результатов – но не сводятся к нему. Этот вывод согласуется с позицией Пантсара [Pantsar, 2014: 4210–4215] о том, что точная арифметика «надстраивается» над протоарифметическими способностями, не будучи из них выводимой.

Философски важно зафиксировать, что данная надстройка не является линейной: развитый навык устного счёта способен подавлять ошибочные интуиции ANS (например, склонность воспринимать большее число как физически большее). Субъект, владеющий устным счётом, использует точное символьное вычисление там, где ANS давал бы лишь приближённую оценку, и корректирует ANS-интуиции там, где они расходятся с арифметической истиной.

5.3. Связь с проблемой обоснования математического знания

Классическая проблема обоснования математического знания (Benacerraf, 1973) состоит в следующем: если математические объекты суть абстрактные, бесплотные сущности, то каким образом возможно эпистемическое отношение между ними и физическими познающими субъектами? Платонизм постулирует особую интеллектуальную интуицию, натурализм объясняет математику эволюционной адаптацией, номинализм отрицает существование математических объектов.

Анализ навыков устного счёта предлагает новый угол зрения на эту проблему. Устный счёт показывает, что математическое знание – по крайней мере в его арифметической форме – не требует апелляции к загадочной интеллектуальной интуиции: оно воплощено в конкретных когнитивных практиках, опирающихся на биологически данные способности и культурно переданные инструменты. Это согласуется с «практическим натурализмом» в философии математики [Kitcher, 1983], но избегает редукционистских следствий «чистого»

натурализма: нормативное измерение арифметики – её истинность и необходимость – не выводится из практики, но задаёт стандарты, которым практика стремится соответствовать.

6. Новое научное определение и категориальная схема

6.1. Уточнённое определение

На основании проведённого анализа предлагается следующее уточнённое определение навыков устного счёта, интегрирующее все выделенные измерения:

> *«Навыки устного счёта – это интегративная когнитивная способность, конституирующая специфическую эпистемическую категорию на пересечении процедурного и декларативного знания: она реализуется посредством гибкого применения культурно усвоенных вычислительных стратегий и автоматизированных числовых фактов в условиях работы рабочей памяти и без постоянной внешней символьной фиксации, опираясь на биологически данные протоарифметические способности и языково-семиотическую структуру числовых систем, и конституирует особый уровень арифметического знания, медиирующий между до-культурным числовым ощущением и формализованными математическими структурами».*

6.2. Категориальная схема

Проведённый анализ позволяет представить систематическую категориальную схему навыков устного счёта. Данная схема объединяет четыре измерения, каждое из которых задаётся парой полюсов, между которыми располагается анализируемый феномен. Предложенная категориальная модель навыков устного счёта представлена на рис. 1.

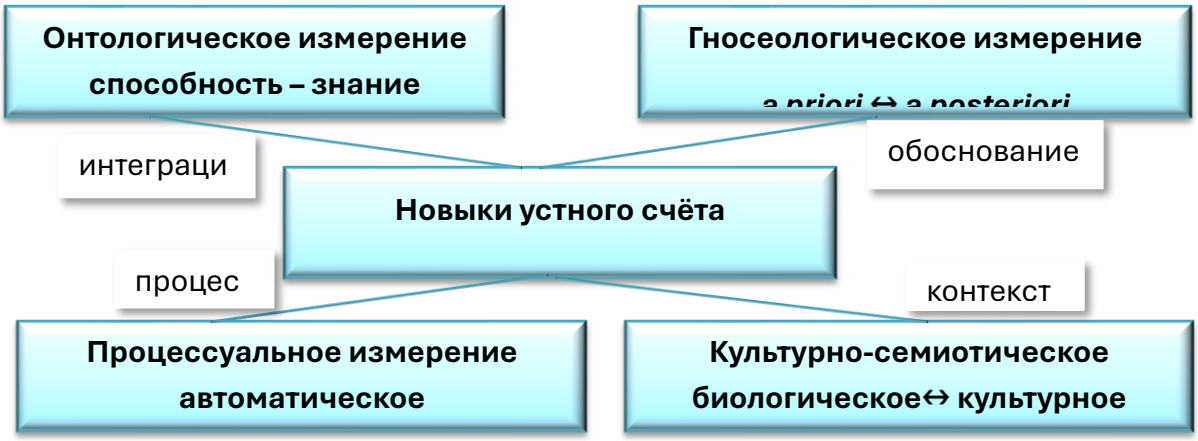


Рис. 1. Категориальная модель навыков устного счёта: взаимодействие основных измерений

Как показано на рис. 1, навыки устного счёта представляют собой интегративный когнитивный феномен, формирующийся на пересечении четырёх аналитических измерений.

В онтологическом измерении устный счёт располагается между полюсом «чистой способности» (диспозиции без когнитивного содержания) и полюсом «чистого знания» (пропозиционального содержания без практической воплощённости), реализуя гибридную форму «воплощённого знания» (embodied knowledge).

В гносеологическом измерении устный счёт располагается между полюсом «чистой априорности» (необходимых арифметических истин) и полюсом «чистой апостериорности»

(эмпирически приобретённых навыков), реализуя форму «контекстуально обусловленного» знания [Pantsar, 2014].

В процессуальном измерении устный счёт располагается между полюсом «автоматизированной обработки» (имплицитных, нерефлективных вычислений) и полюсом «контролируемой обработки» (осознанного, стратегического счёта), динамически сочетая оба режима в зависимости от сложности задачи.

В культурно-семиотическом измерении устный счёт располагается между полюсом «природной данности» (биологически обусловленного числового ощущения) и полюсом «культурного конструкта» (произвольной договорённости), реализуя форму «биокультурного феномена» – природно укоренённой, культурно оформленной практики.

6.3. Теоретические следствия категориального анализа

Предложенная категориальная схема имеет ряд теоретических следствий для эпистемологии математики и смежных дисциплин.

Во-первых, устный счёт не является частным случаем какой-либо из уже имеющихся категорий (умения, знания, практики) – он представляет собой специфический тип когнитивного феномена, требующий собственного концептуального аппарата. Это означает, что ни редукция к «просто умению», ни редукция к «просто знанию» не является адекватной.

Во-вторых, гибридный онтологический статус устного счёта имеет следствия для дискуссий о природе математического знания: он показывает, что математическое знание не является однородным – оно включает различные уровни и режимы, требующие дифференцированного эпистемологического описания.

В-третьих, культурно-семиотическое измерение устного счёта подтверждает тезис о необходимости интеграции аналитической философии математики с историческими, антропологическими и лингвистическими исследованиями. Эпистемология математики не может оставаться исключительно нормативной дисциплиной – она должна принимать во внимание фактическое многообразие математических практик.

7. Навыки устного счёта в контексте современных эпистемологических дискуссий

7.1. Устный счёт и расширенный разум

Гипотеза «расширенного разума» Кларка и Чалмерса [Clark; Chalmers, 1998] постулирует, что когнитивные процессы не обязательно реализуются в пределах кожи и черепа субъекта: при определённых условиях внешние объекты (блокноты, устройства) могут выступать конститутивными частями когнитивной системы. Данная гипотеза имеет прямые следствия для понимания устного счёта.

Устный счёт в чистом виде – то есть вычисления, осуществляемые исключительно во внутреннем когнитивном пространстве, – казалось бы, является парадигмальным примером «интернального» когнитивного процесса, противопоставленного «расширенному». Однако это противопоставление не столь очевидно: устный счёт всегда задействует культурно данные числовые системы, интернализованные в ходе обучения. В этом смысле он является не «чисто внутренним», но «интернализованным внешним» – воплощением культурных когнитивных инструментов во внутренних когнитивных структурах субъекта.

Ещё более сложная картина возникает при рассмотрении устного счёта с опорой на жесты и вспомогательные средства (счёт на пальцах). В этом случае граница между «внутренним» устным счётом и «внешне опосредованным» становится весьма зыбкой.

Данный факт подтверждает, что концептуальное разграничение устного и письменного счёта, предложенное в разделе 3, следует понимать как градуированное, а не дихотомическое.

Это позволяет уточнить границы применимости гипотезы расширенного разума, показывая, что устный счёт занимает промежуточное положение между интернализованными и внешне распределёнными когнитивными процессами.

7.2. Устный счёт и воплощённое познание

Концепция воплощённого познания (embodied cognition) утверждает, что когнитивные процессы не могут быть полностью описаны в абстрактно-вычислительных терминах: они существенным образом определяются структурой тела субъекта и его взаимодействием с окружающей средой [Varela; Thompson; Rosch, 1991]. Применительно к устному счёту это означает, что моторные, речевые и ритмические компоненты вычислений – проговаривание, отсчёт на пальцах, ритмические движения – являются не вспомогательными, но конститутивными элементами некоторых форм устного счёта.

Фабри [Fabry, 2020] разрабатывает концепцию «нишевой конструкции» применительно к арифметическому познанию: субъект не просто приспосабливается к когнитивной среде, но активно её трансформирует, создавая условия для развития новых форм математического знания. Устный счёт в этой перспективе предстаёт как форма деятельности, в которой субъект конструирует временную «когнитивную нишу» – внутреннее пространство вычислений – посредством имеющихся у него культурных и биологических ресурсов.

7.3. Устный счёт и социальная эпистемология

Навыки устного счёта приобретаются в социальном контексте и функционируют в нём же. Это означает, что социальная эпистемология – область, исследующая знание как социальный феномен [Goldman, 1999] – должна принимать их во внимание. С точки зрения социальной эпистемологии, навыки устного счёта интересны прежде всего как форма распределённого знания: в социальной группе различные субъекты обладают различными уровнями и конфигурациями этих навыков, и общий «вычислительный потенциал» группы превышает возможности каждого её члена.

Кроме того, социальная эпистемология ставит вопрос о доверии и свидетельстве в отношении арифметических результатов. При каких условиях субъект обоснованно принимает арифметическое утверждение другого субъекта, не верифицируя его самостоятельно? Этот вопрос приобретает практическую остроту в ситуациях коллективного счёта, при котором распределение вычислительных задач предполагает взаимное доверие к арифметической дееспособности участников.

8. Дискуссионные вопросы и открытые проблемы

8.1. Проблема единства навыков устного счёта

Одним из наиболее острых дискуссионных вопросов является вопрос о том, существуют ли «навыки устного счёта» как единый, целостный феномен или же данное выражение обозначает гетерогенный набор частично пересекающихся способностей. Когнитивная психология склоняется ко второй позиции: различные арифметические операции (сложение, умножение) обнаруживают относительно независимые корреляты в структуре когнитивных способностей и нейронных сетях [Dehaene, 2011].

Философский ответ на этот вопрос не может быть получен путём простого суммирования когнитивно-психологических данных: он требует концептуального решения о том, что именно обеспечивает единство данной категории. Настоящая статья предлагает

считать конститутивным единством навыков устного счёта их общую функцию – медиацию между числовыми интуициями и точным арифметическим знанием – и общую структуру – гибридное воплощённое знание, реализуемое в условиях ограниченных ресурсов рабочей памяти.

8.2. Проблема нормативности

Другой открытый вопрос касается нормативного измерения навыков устного счёта: каков критерий того, что устный счёт выполнен «правильно»? На первый взгляд ответ очевиден: правильно – значит в соответствии с правилами арифметики. Однако более пристальный анализ обнаруживает сложность: нормы устного счёта не ограничиваются арифметической истинностью, но включают также нормы скорости, надёжности, стратегической оптимальности.

Витгенштейновская критика «частного следования правилу» [Wittgenstein, 1953] ставит под вопрос само понятие «следования» арифметическому правилу в индивидуальном когнитивном процессе. Если правила применяются в публичной практике, то что именно «следует» правилу устный счёт, осуществляемый в сугубо внутреннем пространстве? Этот вопрос не получил удовлетворительного ответа в существующей литературе и остаётся открытым.

8.3. Проблема патологических случаев

Когнитивные науки описывают различные нарушения вычислительных способностей – акалькулию, дискалькулию, – а также нейрокогнитивные состояния, обеспечивающие исключительные вычислительные способности [Dehaene, 2011]. Философский анализ этих «патологических случаев» (в нейтральном, методологическом смысле) способен уточнить понимание структуры навыков устного счёта: что именно нарушается при акалькулии – декларативный, процедурный или метакогнитивный компонент? Каков когнитивный механизм исключительных вычислительных способностей?

Данные вопросы остаются открытыми и требуют дальнейшего исследования на пересечении философии, нейронауки и когнитивной психологии. Ответы на них способны существенно обогатить как предложенное определение, так и категориальную схему анализа.

9. Заключение

Настоящая статья предприняла попытку систематического философско-эпистемологического исследования навыков устного счёта – понятия, широко используемого в педагогике и когнитивной психологии, но до сих пор не получившего должного концептуального осмысления в философии.

В ходе исследования были достигнуты следующие результаты. Во-первых, предложено развёрнутое философско-эпистемологическое определение навыков устного счёта, трактующее их как интегративную когнитивную способность с гибридным – процедурно-декларативным – характером знания, реализуемую через культурно усвоенные стратегии при посредстве рабочей памяти.

Во-вторых, разработана четырёхмерная категориальная схема анализа данного феномена, охватывающая онтологическое, гносеологическое, процессуальное и культурно-семиотическое измерения. Показано, что в каждом из этих измерений устный счёт занимает промежуточную, гибридную позицию, не совпадающую ни с одним из крайних полюсов.

В-третьих, определено место навыков устного счёта в архитектуре математического знания: они занимают принципиально важный промежуточный уровень между биологически

данными протоарифметическими способностями и формализованным математическим знанием, выступая медиатором в процессе когнитивной энкультурации.

В-четвёртых, установлены связи устного счёта с ключевыми дискуссиями современной эпистемологии – о расширенном разуме, воплощённом познании, социальной эпистемологии, нормативности правила-следования.

Предложенный анализ имеет ряд существенных теоретических импликаций. Он показывает, что философия математики не может ограничиваться исследованием абстрактных математических структур, игнорируя конкретные когнитивные практики, в которых математика живёт и функционирует. Концептуальный анализ таких практик способен обогатить эпистемологию новыми различениями и перспективами.

Настоящее исследование открывает ряд направлений для дальнейшей работы. Прежде всего, предложенная категориальная схема нуждается в верификации путём её применения к конкретным историческим и кросс-культурным данным о вычислительных практиках. Далее, проблема нормативности устного счёта требует самостоятельного исследования в рамках витгенштейновской традиции. Наконец, соотношение навыков устного счёта с другими формами математического знания – геометрической интуицией, пониманием доказательств, алгебраическим мышлением – остаётся важнейшей темой для дальнейших исследований.

Тем самым, проведённое исследование вносит вклад в развитие эпистемологии математики, расширяя её предметное поле за счёт включения конкретных когнитивных практик как полноценных объектов философского анализа. Это открывает перспективы для дальнейших исследований на стыке философии, когнитивной науки и теории образования.

Список литературы

1. *Anderson, 1983 – Anderson J.R. The Architecture of Cognition. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1983. 345 p.*
2. *Ashcraft, 1992 – Ashcraft M.H. Cognitive arithmetic: A review of data and theory. Cognition, 1992, Vol. 44, No. 1–2, pp. 75–106.*
3. *Baddeley, 2012 – Baddeley A. Working memory: Theories, models, and controversies. Annual Review of Psychology, 2012, Vol. 63, pp. 1–29.*
4. *Benacerraf, 1973 – Benacerraf P. Mathematical truth. The Journal of Philosophy, 1973, Vol. 70, No. 19, pp. 661–679.*
5. *Buijsman, 2021 – Buijsman S. Building blocks for a cognitive science-led epistemology of arithmetic. Philosophical Studies, 2021, Vol. 178, No. 9, pp. 3151–3171.*
6. *Campbell; Xue, 2001 – Campbell J.I.D., Xue Q. Cognitive arithmetic across cultures. Journal of Experimental Psychology: General, 2001, Vol. 130, No. 2, pp. 299–315.*
7. *Clark; Chalmers, 1998 – Clark A., Chalmers D. The extended mind. Analysis, 1998, Vol. 58, No. 1, pp. 7–19.*
8. *De Cruz, 2016 – De Cruz H. Numerical cognition and mathematical realism. Philosophers' Imprint, 2016, Vol. 16, No. 16, pp. 1–13.*
9. *Dehaene, 1997 – Dehaene S. The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997. 274 p.*
10. *Dehaene, 2011 – Dehaene S. The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2011. 352 p.*
11. *Everett, 2017 – Everett C. Numbers and the Making of Us: Counting and the Course of Human Cultures. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2017. 309 p.*
12. *Fabry, 2020 – Fabry R.E. The cerebral, extra-cerebral bodily, and socio-cultural dimensions of enculturated arithmetical cognition. Synthese, 2020, Vol. 197, No. 9, pp. 3685–3720.*
13. *Field, 1989 – Field H. Realism, Mathematics and Modality. Oxford: Blackwell, 1989. 268 p.*
14. *Flavell, 1979 – Flavell J.H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. American Psychologist, 1979, Vol. 34, No. 10, pp. 906–911.*

15. Giaquinto, 2007 – Giaquinto M. Visual Thinking in Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2007. 281 p.

16. Goldman, 1999 – Goldman A. Knowledge in a Social World. Oxford: Oxford University Press, 1999. 407 p.

17. Hutchins, 1995 – Hutchins E. Cognition in the Wild. Cambridge, MA: MIT Press, 1995. 381 p.

18. Kasavin, 2013 – Kasavin I.T. Social epistemology and the analysis of knowledge practices. Epistemology and Philosophy of Science, 2013, Vol. 38, No. 4, pp. 5–19.

19. Kitcher, 1983 – Kitcher Ph. The Nature of Mathematical Knowledge. Oxford: Oxford University Press, 1983. 300 p.

20. Logan, 1988 – Logan G.D. Toward an instance theory of automatization. Psychological Review, 1988, Vol. 95, No. 4, pp. 492–527.

21. Overmann, 2023 – Overmann K.A. The Materiality of Numbers: Emergence and Elaboration from Prehistory to Present. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. 420 p.

22. Pantsar, 2014 – Pantsar M. An empirically feasible approach to the epistemology of arithmetic. Synthese, 2014, Vol. 191, No. 17, pp. 4201–4229.

23. Pantsar, 2019 – Pantsar M. The enculturated move from proto-arithmetic to arithmetic. Frontiers in Psychology, 2019, Vol. 10, Article 1454. DOI: 10.3389/fpsyg.2019.01454.

24. Pantsar, 2024 – Pantsar M. Numerical Cognition and the Epistemology of Arithmetic. Cambridge: Cambridge University Press, 2024. 230 p.

25. Polanyi, 1966 – Polanyi M. The Tacit Dimension. Garden City, NY: Doubleday, 1966. 108 p.

26. Ryle, 1949 – Ryle G. The Concept of Mind. London: Hutchinson, 1949. 332 p.

27. Schlimm, 2018 – Schlimm D. Numbers through numerals: The constitutive role of external representations. Phenomenology and the Cognitive Sciences, 2018, Vol. 17, No. 3, pp. 89–112. DOI: 10.1007/s11097-016-9444-3.

28. Siegler, 1988 – Siegler R.S. Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. Journal of Experimental Psychology: General, 1988, Vol. 117, No. 3, pp. 258–275.

29. Siegler; Lemaire, 1997 – Siegler R.S., Lemaire P. Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. Journal of Experimental Psychology: General, 1997, Vol. 126, No. 1, pp. 71–92.

30. Sosa, 2007 – Sosa E. A Virtue Epistemology: Apt Belief and Reflective Knowledge. Vol. 1. Oxford: Oxford University Press, 2007. 248 p.

31. Stanley; Williamson, 2001 – Stanley J., Williamson T. Knowing how. The Journal of Philosophy, 2001, Vol. 98, No. 8, pp. 411–444.

32. Varela; Thompson; Rosch, 1991 – Varela F.J., Thompson E., Rosch E. The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience. Cambridge, MA: MIT Press, 1991. 308 p.

33. Wiese, 2007 – Wiese H. The co-evolution of number concepts and counting words. Lingua, 2007, Vol. 117, No. 5, pp. 758–772.

34. Wittgenstein, 1953 – Wittgenstein L. Philosophical Investigations. Oxford: Blackwell, 1953. 250 p.